平成 23 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 23 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b を正の実数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ $f(x)=3x-2a\sin x\cos x$，$g(x)=x^2+b\cos^2 x-b$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $a=3$ のとき，$0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(2) $a=1$ のとき，$x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$ が成り立つような a の範囲を求めよ．

(4) $x \geqq 0$ において $g(x) \geqq 0$ が成り立つような b の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 a と行列 $A=\begin{pmatrix} a-2 & -2a \\ 4a & -2a+2 \end{pmatrix}$ がある．A が表す座標平面上の点の移動に関する以下の二つの条件を考える．

条件 1：原点 O 以外のある点 P が A によって P 自身に移される．
条件 2：原点 O 以外のある点 Q が A によって線分 OQ 上の Q 以外の点に移される．

以下の問いに答えよ．

(1) 条件 1 がみたされるとき，a の値を求めよ．

(2) 条件 1，条件 2 の両方がみたされるとき，a の値を求めよ．

(3) a は (2) で求めた値とする．自然数 n に対して，点 R_n を次のように定める．

- R_1 の座標を $(4,\ 5)$ とする．
- A によって R_{n-1} が移される先を R_n $(n \geqq 2)$ とする．

R_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とするとき，$x_n=\dfrac{12}{2^n}-2$，$y_n=\dfrac{16}{2^n}-3$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

3 正の実数 a と関数 $f(x) = |x^2 - a^2|$ $(-2a \leqq x \leqq 2a)$ がある．$y = f(x)$ のグラフを y 軸のまわりに回転させてできる形の容器に πa^2 (cm^3/秒) の割合で水を静かに注ぐ．水を注ぎ始めてから容器がいっぱいになるまでの時間を T(秒) とする．ただし，長さの単位は cm とする．以下の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) 水面の高さが a^2 (cm) になったとき，容器中の水の体積を V (cm^3) とする．V を a を用いて表せ．

(3) T を a を用いて表せ．

(4) 水を注ぎ始めてから t 秒後の水面の高さを h (cm) とする．h を a と t を用いて表せ．ただし，$0 < t < T$ とする．

(5) 水を注ぎ始めてから t 秒後の水面の上昇速度を v (cm/秒) とする．v を a と t を用いて表せ．ただし，$0 < t < T$ とする．

4 図のような番号のついたマス目と駒とサイコロを使って，以下に示す規則にしたがうゲームを考える．

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- 駒は最初 0 番のマス目に置く．
- サイコロを投げ，出た目の数だけ駒を 10 番のマス目に向かって進める．
- 駒がちょうど 10 番のマス目に止まればゴールとする．
- ただし，10 番のマス目を超える場合は，その分だけ 10 番のマス目から 0 番のマス目側に戻る．

たとえば，7 番のマス目に駒があり，出た目が 5 であった場合は，駒は 8 番のマス目に移動し，その次に出た目が 2 であった場合はゴールとする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 投目でゴールする確率を求めよ．

(2) 2 投目の後，9 番のマス目に駒がある確率を求めよ．

(3) 3 投目でゴールする確率を求めよ．

(4) このゲームを使って A，B の 2 名が対戦する．A から初めて，交互にサイコロを投げて各自の駒を進める試行を行ない，先にゴールした方を勝ちとする．ただし，どちらも 2 投以内でゴールしない場合は引き分けとする．引き分ける確率を求めよ．

(5) A，B の駒をそれぞれ 0 番，k 番 $(0 < k < 10)$ のマス目に置いて (4) と同様の対戦を開始するとき，A が勝つ確率より B が勝つ確率の方が高くなるための k の条件を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a=3$ のとき　$f(x)=3x-2{\cdot}3\sin x\cos x=3x-3\sin 2x$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3-6\cos 2x$

ゆえに，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表および極値は次のようなる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi-3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	3π

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi-3\sqrt{3}}{2}}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{5\pi+3\sqrt{3}}{2}}$

(2) $a=1$ のとき　$f(x)=3x-\sin 2x$

$f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3-2\cos 2x$

$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調増加．$f(0)=0$ であるから

$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq f(0)$　すなわち　$f(x)\geqq 0$

(3) $f(x)=3x-a\sin 2x$ を微分すると　$f'(x)=3-2a\cos 2x$

(i) $0<\dfrac{2a}{3}\leqq 1$　すなわち　$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$$f'(x)=3\left(1-\frac{2a}{3}\cos 2x\right) \text{ より}\quad f'(x)\geqq 0$$

$f(0)=0$ であるから　$x\geqq 0$ において　$f(x)\geqq 0$

(ii) $0<\dfrac{3}{2a}<1$　すなわち　$a>\dfrac{3}{2}$ のとき

$$f'(x)=2a\left(\frac{3}{2a}-\cos 2x\right) \text{ より}\quad \cos 2\alpha=\frac{3}{2a}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$$

をみたす α が存在する．このとき，$0<x<\alpha$ で $f(x)$ は単調減少であり，$f(0)=0$ であるから　$f(\alpha)<0$

よって，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq 0$ が成り立つ a の値の範囲は　$\boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{3}{2}}$

(4) $g(x)=2x-b\sin 2x$，$g(0)=0$ であるから

$$\frac{3}{2}g'(x)\geqq 0\quad\text{すなわち}\quad 3x-\frac{3b}{2}\sin 2x\geqq 0$$

を満たせばよいので，(3) の結果から

$$0<\frac{3b}{2}\leqq\frac{3}{2}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{0<b\leqq 1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とすると $(\vec{p}\neq\vec{0})$

$$A\vec{p}=\vec{p} \quad \text{すなわち} \quad (A-E)\vec{p}=\vec{0}$$

$A-E=\begin{pmatrix} a-3 & -2a \\ 4a & -2a+1 \end{pmatrix}$ が正則ならば，$\vec{p}=\vec{0}$ となり，条件に反する．したがって，$\det(A-E)=0$ であるから

$$(a-3)(-2a+1)-(-2a)\cdot 4a=0 \quad \text{ゆえに} \quad (3a-1)(2a+3)=0$$

よって　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3},\ -\frac{3}{2}}$

(2) $\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とする $(\vec{q}\neq\vec{0})$．(1) で求めた a の値について

$$A\vec{q}=\lambda\vec{q} \quad \text{すなわち} \quad (A-\lambda E)\vec{q}=\vec{0}$$

をみたす $0<\lambda<1$ が存在するかを確認すればよい．また，(1) と同様に $A-\lambda E$ は正則ではない．ゆえに，方程式 $\det(A-\lambda E)=0$ が $0<\lambda<1$ を解にもつかを確認すればよい．

i) $a=\dfrac{1}{3}$ のとき，$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -\frac{5}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3}-\lambda \end{pmatrix}$，$\det(A-\lambda E)=0$ より

$$\left(-\frac{5}{3}-\lambda\right)\left(\frac{4}{3}-\lambda\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\lambda-1)(3\lambda+4)=0$$

これは，$0<\lambda<1$ を解にもたないので，不適．

ii) $a=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -\frac{7}{2}-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix}$，$\det(A-\lambda E)=0$ より

$$\left(-\frac{7}{2}-\lambda\right)(5-\lambda)-3\cdot(-6)=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\lambda-1)(2\lambda-1)=0$$

これは，$0<\lambda<1$ をみたす解 $\dfrac{1}{2}$ をもつ．

i)，ii) より　$\boldsymbol{a=-\frac{3}{2}}$

別解　A の固有方程式 [1]

$$\lambda^2 + a\lambda + 6a^2 + 6a - 4 = 0$$

が解 1，β $(0 < \beta < 1)$ をもつから，解と係数の関係により

$$1 + \beta = -a, \quad 1{\cdot}\beta = 6a^2 + 6a - 4$$

上の 2 式から a を消去すると　$(2\beta - 1)(3\beta + 4) = 0$

$0 < \beta < 1$ より　$\beta = \dfrac{1}{2}$　また　$a = -\dfrac{3}{2}$

(3) 点 $\mathrm{R}_n(x_n,\ y_n)$ について

$$x_n = \frac{12}{2^n} - 2, \quad y_n = \frac{16}{2^n} - 3 \qquad \cdots(*)$$

とする．

i) $n = 1$ のとき

$$x_1 = \frac{12}{2^1} - 2 = 4, \quad y_1 = \frac{16}{2^1} - 3 = 5$$

よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n = k$ のとき

$$x_k = \frac{12}{2^k} - 2, \quad y_k = \frac{16}{2^k} - 3$$

が成り立つ仮定すると，$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{2^k} - 2 \\ \frac{16}{2^k} - 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}\left(\frac{12}{2^k} - 2\right) + 3\left(\frac{16}{2^k} - 3\right) \\ -6\left(\frac{12}{2^k} - 2\right) + 5\left(\frac{16}{2^k} - 3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{2^{k+1}} - 2 \\ \frac{16}{2^{k+1}} - 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

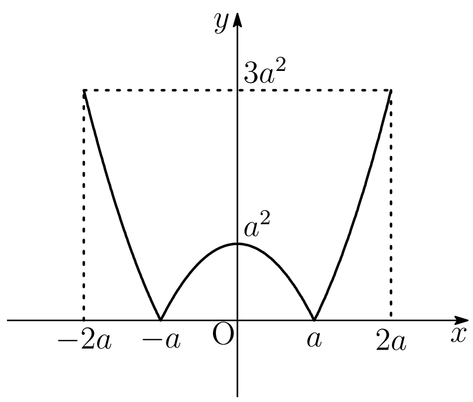
[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

解説 A の固有値 $\frac{1}{2}$，1 に対する，それぞれの固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を用いて，$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と表されるので

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^{n-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 2A^{n-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - A^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3 (1) $f(x) = |x^2 - a^2| = \begin{cases} x^2 - a^2 & (-2a \leqq x \leqq -a,\ a \leqq x \leqq 2a) \\ a^2 - x^2 & (-a < x < a) \end{cases}$

よって，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．



(2) $0 \leqq x \leqq a$ のとき　$y = a^2 - x^2$ より　$x^2 = a^2 - y$

$a \leqq x \leqq 2a$ のとき　$y = x^2 - a^2$ より　$x^2 = a^2 + y$

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^{a^2}(a^2 + y)\,dy - \pi\int_0^{a^2}(a^2 - y)\,dy \\ &= \pi\int_0^{a^2} 2y\,dy = \pi\Big[\,y^2\,\Big]_0^{a^2} = \boldsymbol{\pi a^4}\end{aligned}$$

(3) 容器が一杯になったときの水の体積は

$$V+\pi\int_{a^2}^{3a^2}(a^2+y)dy=\pi a^4+\pi\left[\, a^2y+\frac{y^2}{2}\,\right]_{a^2}^{3a^2}=7\pi a^4$$

よって　$T=\dfrac{7\pi a^4}{\pi a^2}=\boldsymbol{7a^2}$

(4) 水面の高さが a^2 になる時間は，(2) の結果から　$\dfrac{\pi a^4}{\pi a^2}=a^2$

(i) $0<t\leqq a^2$ のとき

$$\begin{aligned}\pi a^2t&=\pi\int_0^h(a^2+y)dy-\pi\int_0^h(a^2-y)dy\\&=\pi\int_0^h 2y\,dy=\pi\left[\, y^2\,\right]_0^h=\pi h^2\end{aligned}$$

ゆえに　$a^2t=h^2$　すなわち　$h=a\sqrt{t}$

(ii) $a^2<t<T$ のとき

$$\begin{aligned}\pi a^2t&=V+\pi\int_{a^2}^h(a^2+y)dy\\&=\pi a^4+\pi\left[\, a^2y+\frac{y^2}{2}\,\right]_{a^2}^h=\pi\left(-\frac{a^4}{2}+a^2h+\frac{h^2}{2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned}a^2t&=-\frac{a^4}{2}+a^2h+\frac{h^2}{2}\\2a^2t+2a^4&=h^2+2a^2h+a^4\\(h+a^2)^2&=a^2(2t+2a^2)\end{aligned}$$

$h>a^2$ に注意して　$h=a\sqrt{2t+2a^2}-a^2$

よって　$\boldsymbol{h=\begin{cases}a\sqrt{t} & (0<t\leqq a^2)\\ a\sqrt{2t+2a^2}-a^2 & (a^2<t<T)\end{cases}}$

(5) $v=\dfrac{dh}{dt}$ であるから　$\boldsymbol{v=\begin{cases}\dfrac{a}{2\sqrt{t}} & (0<t\leqq a^2)\\ \dfrac{a}{\sqrt{2t+2a^2}} & (a^2<t<T)\end{cases}}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

たとえば，$0 \leqq x \leqq 2a$ の範囲で $y=|x^2-a^2|$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 は

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{2\pi} &= \int_0^{2a} x\,|x^2-a^2|\,dx \\ &= -\int_0^a (x^3-a^2x)dx + \int_a^{2a} (x^3-a^2x)\,dx \end{aligned}$$

ここで x^3-a^2x の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{a^2}{2}x^2$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{2\pi} &= F(0)+F(2a)-2F(a) \\ &= 0+2a^4-2\cdot\left(-\frac{a^4}{4}\right) = \frac{5}{2}a^4 \end{aligned}$$

ゆえに　　$V_1 = 5\pi a^4$

本題の容器の容積は　$\pi(2a)^2\cdot 3a^2 - V_1 = 12\pi a^4 - 5\pi a^4 = 7\pi a^4$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 1投目に出た目がi，2投目に出た目がjである場合を$(i,\ j)$と表す．2投目でゴールするのは，(4, 6)，(5, 5)，(6, 4)の3通り．よって，その確率は

$$\frac{3}{6^2}=\mathbf{\frac{1}{12}}$$

(2) 1投目に出た目と2投目に出た目の和が9または11である．

出た目の和が9となるのは，(3, 6) (4, 5), (5, 4), (6, 3)の4通り．

出た目の和が11となるのは，(5, 6), (6, 5)の2通り．

よって，求める確率は　$\dfrac{4+2}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(3) 3投の目の和が10となる組合せは次のとおりである．

$$\{1,\ 3,\ 6\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 2,\ 6\},\ \{2,\ 3,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 4\},\ \{3,\ 3,\ 4\}$$

これらの場合の総数は　$3!\times 3+\dfrac{3!}{2!}\times 3=27$ (通り)

また，最初の2投の和が11または12となるのが，それぞれ2通り，1通りであるから，求める確率は

$$\frac{27+2+1}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\mathbf{\frac{5}{36}}$$

(4) A，Bがともに2投目でゴールしない確率であるから，(1)の結果から

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)^2=\mathbf{\frac{121}{144}}$$

(5) (i) $k \geqq 4$のとき，Bが勝つのは，Bが1投でゴールするか，Aが2投目でゴールできずBが2投目でゴールする場合である．このときBが1投目でゴールする確率$\dfrac{1}{6}$がAが2投目でゴールする確率より大きいので，Aの勝つ確率よりBの勝つ確率より大きい．

(ii) $k=3$のとき，Bが勝つ確率は(Aが2回でゴールできず，Bが2回でゴールするときで，Bの目の和は7で6通りある)

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)\times\frac{6}{6^2}=\frac{11}{12}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\times\frac{11}{6}>\frac{1}{12}$$

(iii) $k=2$のとき，Bが勝つ確率は

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)\times\frac{5}{6^2}=\frac{11}{12}\times\frac{5}{36}=\frac{1}{12}\times\frac{55}{36}>\frac{1}{12}$$

(iv) $k=1$のとき，Bが勝つ確率は

$$\left(1-\frac{1}{12}\right)\times\frac{4}{6^2}=\frac{11}{12}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{12}\times\frac{11}{9}>\frac{1}{12}$$

よって，求めるkの値の範囲は　$\mathbf{1 \leqq \boldsymbol{k} \leqq 9}$