

## 平成 22 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

情報工学部 平成 22 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1  $a$  を正の実数とする. また, 対数は自然対数,  $e$  は自然対数の底を表す. 以下の問いに答えよ.

- (1) 不定積分  $\int \log(ax) dx$  を求めよ.
- (2)  $0 < x < e$  の範囲で曲線  $y = \log(ax)$  と直線  $y = 1$  とが交わるように,  $a$  の値の範囲を定めよ.
- (3)  $a$  の値が (2) で求めた範囲にあるとする. 座標平面において, 曲線  $y = \log(ax)$  と 2 直線  $y = 0$ ,  $x = e$  とで囲まれた図形のうち,  $y \leq 1$  の部分の面積を  $S_1$ ,  $y \geq 1$  の部分の面積を  $S_2$  とする.  $S = S_1 - S_2$  を  $a$  を用いて表せ.
- (4)  $a$  の値が (2) で求めた範囲にあるとする.  $S$  の最大値とそのときの  $a$  の値を求めよ.

2 実数  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) に対して行列  $A$  を

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

とする. また, 実数  $k$  ( $k > 0$ ) に対して,  $x, y$  は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

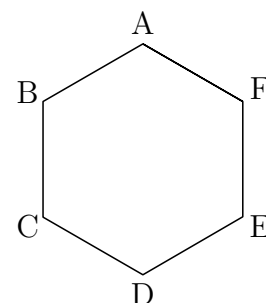
を満たす. そして,  $x, y, k$  を用いて座標平面上の 2 点  $P(x, y)$ ,  $Q(0, k)$  を定める. 原点を  $O$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $P$  の座標を  $k, \tan \theta$  を用いて表せ.
- (2)  $\angle OPQ$  を  $\theta$  を用いて表せ.
- (3)  $\triangle OPQ$  を  $x$  軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積  $V(\theta)$  を求めよ.
- (4) (3) で求めた  $V(\theta)$  について,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta}{2\pi} V(\theta)$  を求めよ.

3 点Oを原点, 点Pを楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$  上の点とする.  $x$  軸の正の部分を始線として動径OPの表す角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点Pの  $y$  座標を  $\frac{a + b \sin \theta}{c + d \sin \theta}$  ( $a, b, c, d$  は実数) の形で表せ.
- (2) 点Pにおける楕円の接線を  $l$  とする. 直線  $l$  の方程式を求めよ.
- (3) 点Aの座標を  $(0, 6)$  とする. 点Aを(2)の直線  $l$  に関して対称移動した点をQとする. 点Qの座標を  $\theta$  を用いて表せ.

4 右図のように平面上に正六角形ABCDEFがある. 時刻  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) において動点Pは正六角形の6つの頂点のいずれかにあり, 時刻1では頂点Aにあるものとする. 時刻  $n+1$  には, 時刻  $n$  のときにあった頂点に隣り合う2つの頂点のいずれかに移動する. どちらの頂点に移動するかは同様に確からしいものとする. 時刻  $n$  において, 動点Pが頂点A, B, C, D, E, Fにある確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$  とする. 以下の問いに答えよ.



- (1)  $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2$  を求めよ.
- (2)  $a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, f_3$  を求めよ.
- (3)  $n$  が偶数のとき,  $b_n + d_n + f_n$  を求めよ.
- (4) すべての時刻  $n$  に対して,  $b_n = f_n$  および  $c_n = e_n$  が同時に成立することを数学的帰納法を用いて示せ.
- (5)  $m$  を1以上の整数とするとき,  $d_{2m}$  を  $m$  を用いて表せ. また,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{2m}$  を求めよ.

## 正解

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad \int \log(ax) dx &= \int (x)' \log(ax) dx \\
 &= x \log(ax) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \mathbf{x \log(ax) - x + C} \quad (C: \text{積分定数})
 \end{aligned}$$

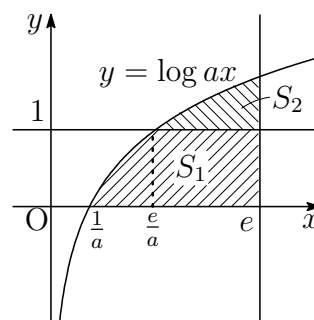
(2) 曲線  $y = \log(ax)$  と直線  $y = 1$  の共有点の  $x$  座標は

$$\log(ax) = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{e}{a}$$

このとき、正数  $a$  が  $0 < \frac{e}{a} < e$  を満たせばよいので  $\mathbf{a > 1}$

(3) 右の図から

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}} \log(ax) dx + \left(e - \frac{e}{a}\right) \cdot 1 \\
 &= \left[ x \log(ax) - x \right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}} + e - \frac{e}{a} \\
 &= e + \frac{1}{a} - \frac{e}{a}
 \end{aligned}$$



$$S_1 + S_2 = \int_{\frac{1}{a}}^e \log(ax) dx = \left[ x \log(ax) - x \right]_{\frac{1}{a}}^e = e \log a + \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad S &= S_1 - S_2 \\
 &= 2S_1 - (S_1 + S_2) \\
 &= 2 \left( e + \frac{1}{a} - \frac{e}{a} \right) - \left( e \log a + \frac{1}{a} \right) \\
 &= \mathbf{2e - \frac{2e-1}{a} - e \log a}
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad (3) \text{の結果から} \quad \frac{dS}{da} = \frac{2e-1}{a^2} - \frac{e}{a} = \frac{2e-1-ea}{a^2}$$

したがって、 $S$  の増減表は、次ようになる。

$a$	(1)	...	$\frac{2e-1}{e}$	...
$\frac{dS}{da}$		+	0	-
$S$		↗	極大	↘

よって、 $\mathbf{a = \frac{2e-1}{e}}$  のとき最大値  $\mathbf{2e - e \log(2e-1)}$  をとる。

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \text{ より } (E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1 - \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(E - A) &= (1 - \cos 2\theta)^2 - (-\sin 2\theta) \sin 2\theta \\ &= 2(1 - \cos 2\theta) = 4 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より,  $\det(E - A) \neq 0$  であるから

$$\begin{aligned} (E - A)^{-1} &= \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & 1 - \cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\tan \theta} \\ -\frac{1}{\tan \theta} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

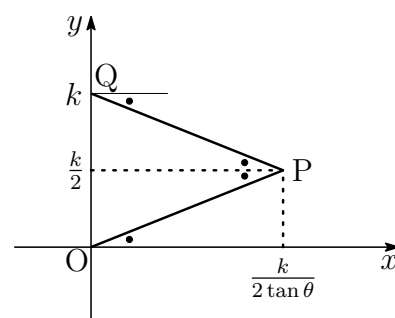
$$\begin{aligned} \text{したがって } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (E - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\tan \theta} \\ -\frac{1}{\tan \theta} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2 \tan \theta} \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, 点 P の座標は  $\left( \frac{k}{2 \tan \theta}, \frac{k}{2} \right)$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \theta \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{QP} &= \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \tan \theta \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{k}{2 \sin \theta} (\cos \theta, \sin \theta) & &= \frac{k}{2 \sin \theta} (\cos \theta, -\sin \theta)\end{aligned}$$

上の2式から、 $\vec{OP}$ の向きは  $x$  軸の正の向きから  $\theta$  だけ、 $\vec{QP}$ の向きは  $x$  軸の正の向きから  $-\theta$  だけ回転したものである。よって、右図から  $\angle OPQ = 2\theta$



(3) (円錐台の体積から三角錐の体積を引く)

$$\begin{aligned}V(\theta) &= \frac{\pi}{3} \left\{ k^2 + k \cdot \frac{k}{2} + \left( \frac{k}{2} \right)^2 \right\} \frac{k}{2 \tan \theta} - \frac{\pi}{3} \left( \frac{k}{2} \right)^2 \frac{k}{2 \tan \theta} \\ &= \frac{\pi k^3}{4 \tan \theta}\end{aligned}$$

円錐台の体積

上底の半径  $r_1$ 、下底の半径  $r_2$ 、高さ  $h$  の円錐台の体積  $V$  は

$$V = \frac{\pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) h$$

補足  $\triangle OPQ$  の面積  $\frac{k^2}{4 \tan \theta}$  およびその重心の  $y$  座標  $\frac{k}{2}$  から、パップス・ギュルダンの定理 (高校数学の範囲外であるため確認用) から<sup>1</sup>

$$V(\theta) = 2\pi \cdot \frac{k}{2} \times \frac{k^2}{4 \tan \theta} = \frac{\pi k^3}{4 \tan \theta}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta}{2\pi} V(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta}{2\pi} \times \frac{\pi k^3}{4 \tan \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{k^3}{8} \cdot \frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta = \frac{k^3}{8} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{k^3}{8}\end{aligned}$$

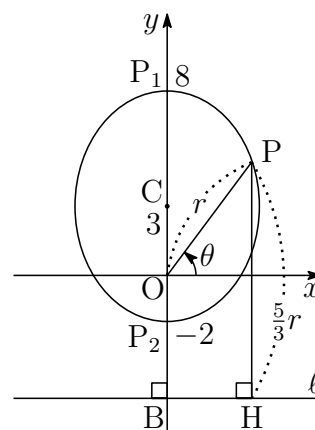
<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2012.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf)

- 3 (1) Oは、楕円の焦点であるから、右の図において、楕円の離心率  $e$  は

$$e = \frac{CO}{CP_2} = \frac{3}{5}$$

楕円の準線を  $l$  とすると、楕円上の点  $P$  から準線  $l$  に下した垂線を  $PH$  とすると

$$e = \frac{OP}{PH}$$



が成り立つ (2次曲線について成り立つ関係式).

Oから準線  $l$  までの距離  $OB$  を  $\lambda$  とする. 右図から,  $PH$  を2通りに表すと

$$PH = \frac{5}{3}r, \quad PH = \lambda + r \sin \theta \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{3\lambda}{5 - 3 \sin \theta}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき ( $P$  が  $P_1$  にある),  $r = 8$  であるから, 上式より  $3\lambda = 16$

$$\text{したがって} \quad r = \frac{16}{5 - 3 \sin \theta} \quad \text{よって} \quad y = r \sin \theta = \frac{16 \sin \theta}{5 - 3 \sin \theta}$$

補足 2次曲線の焦点を極とすると, その方程式を極方程式で表すことができる.

$$\text{楕円} \frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \text{ の準線は } y = -\frac{16}{3}$$

$$\text{また, 楕円} \frac{x^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1 \text{ の準線は } y = \frac{16}{3}$$

$$\text{その極方程式は } r = \frac{16}{5 + 3 \sin \theta}$$

- (2)  $P\left(\frac{16 \cos \theta}{5 - 3 \sin \theta}, \frac{16 \sin \theta}{5 - 3 \sin \theta}\right)$  における楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$  の接線は

$$\frac{16 \cos \theta}{5 - 3 \sin \theta} \cdot \frac{x}{16} + \left(\frac{16 \sin \theta}{5 - 3 \sin \theta} - 3\right) \cdot \frac{y-3}{25} = 1$$

$$\text{よって} \quad (5 \cos \theta)x + (5 \sin \theta - 3)y - 16 = 0$$

補足 楕円  $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線の方程式は

$$\frac{(x_1 - \alpha)(x - \alpha)}{a^2} + \frac{(y_1 - \beta)(y - \beta)}{b^2} = 1$$

(3) 点 A(0, 6) を通り,  $l$  に垂直な直線の方程式は

$$-(5 \sin \theta - 3)x + (5 \cos \theta)(y - 6) = 0$$

ここで,  $a = 5 \cos \theta$ ,  $b = 5 \sin \theta - 3$  とおくと,  $l$  および上式は

$$ax + by = 16, \quad -bx + ay = 30 \cos \theta$$

これら 2 直線の交点を  $M(x, y)$  とすると

$$(a^2 + b^2)x = 16a - 30b \cos \theta, \quad (a^2 + b^2)y = 16b + 30a \cos \theta$$

このとき

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (5 \cos \theta)^2 + (5 \sin \theta - 3)^2 \\ &= 2(17 - 15 \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16a - 30b \cos \theta &= 16 \cdot 5 \cos \theta - 30(5 \sin \theta - 3) \cos \theta \\ &= 10 \cos \theta(17 - 15 \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16b + 30a \cos \theta &= 16(5 \sin \theta - 3) + 30 \cdot 5 \cos \theta \cdot \cos \theta \\ &= -150 \sin^2 \theta + 80 \sin \theta + 102 \\ &= 2(5 \sin \theta + 3)(17 - 15 \sin \theta) \end{aligned}$$

$17 - 15 \sin \theta \neq 0$  であるから  $M(5 \cos \theta, 5 \sin \theta + 3)$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \cos \theta \\ 5 \sin \theta + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cos \theta \\ 5 \sin \theta - 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \cos \theta \\ 5 \sin \theta - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cos \theta \\ 10 \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって  $Q(10 \cos \theta, 10 \sin \theta)$

別解 右の図で,  $\triangle APM \equiv \triangle QPM$  であるから

$$\angle APM = \angle QPM, \quad AP = PQ$$

O, A は楕円の焦点であるから

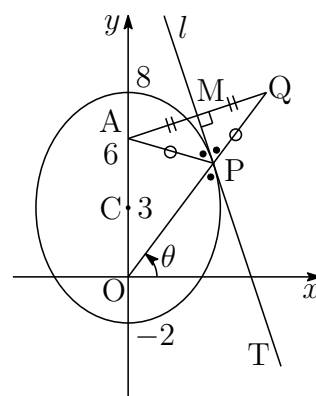
$$\angle APM = \angle OPT$$

ゆえに  $\angle QPM = \angle OPT$

Q は OP の延長線上にあるから

$$OQ = OP + PQ = OP + AP = 2 \times 5 = 10$$

よって  $Q(10 \cos \theta, 10 \sin \theta)$



## 解説

O を通らない直線  $\ell$  (準線) に、点  $P(r, \theta)$  から下ろした垂線を  $PH$  とするとき

$$e = \frac{OP}{PH}$$

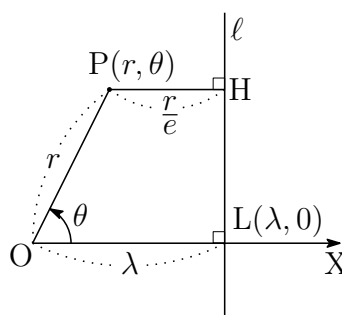
の値が一定であるような点  $P$  の軌跡は、2次曲線になる。

点  $L(\lambda, 0)$  を通り、始線  $OX$  に垂直な直線を  $\ell$  とする。

右の図において、 $L$  と  $H$  は  $\ell$  上にあるから

$$r \cos \theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに 
$$r = \frac{e\lambda}{1 + e \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

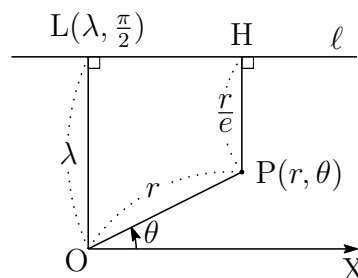


同様に、点  $L(\lambda, \frac{\pi}{2})$  を通り、始線  $OX$  に平行な直線を  $\ell$  とする。

右の図において、 $L$  と  $H$  は  $\ell$  上にあるから

$$r \sin \theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに 
$$r = \frac{e\lambda}{1 + e \sin \theta} \quad \dots \textcircled{2}$$



①, ② が点  $P$  の軌跡を表す極方程式である。

一般に、極方程式  $r = -f(\theta + \pi)$  と  $r = f(\theta)$  は一致する。

したがって、 $\lambda < 0$  のとき、 $d = -\lambda$  とおくと ( $d > 0$ )、①, ② は、それぞれ次のように表すこともできる。

$$r = \frac{e\lambda}{1 + \cos \theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1 - e \cos(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$r = \frac{e\lambda}{1 + \sin \theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1 - e \sin(\theta + \pi)} = \frac{ed}{1 - e \sin \theta} \quad \dots \textcircled{2}'$$



極方程式①を直角座標  $(x, y)$  に関する方程式で表すと

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2\lambda x - e^2\lambda^2 = 0 \quad \dots (*)$$

(\*) は,  $e \neq 1$  のとき  $\frac{(1 - e^2)^2}{e^2\lambda^2} \left(x + \frac{e^2\lambda}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1 - e^2}{e^2\lambda^2} y^2 = 1$

i)  $0 < e < 1$  のとき,  $\frac{1}{a} = \frac{1 - e^2}{e|\lambda|}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e|\lambda|}$  とおくと  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

したがって, (\*) は  $\lambda$  の符号によって, 次のようになる.

$\lambda > 0$  のとき  $\frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$   
中心  $(-ea, 0)$ , 準線  $x = -ea + \frac{a}{e}$

$\lambda < 0$  のとき  $\frac{(x - ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$   
中心  $(ea, 0)$ , 準線  $x = ea - \frac{a}{e}$

ii)  $e = 1$  のとき, (\*) は  $y^2 = -2\lambda \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)$

iii)  $e > 1$  のとき,  $\frac{1}{a} = \frac{e^2 - 1}{e|\lambda|}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e|\lambda|}$  とおくと  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

したがって, (\*) は  $\lambda$  の符号によって, 次のようになる.

$\lambda > 0$  のとき  $\frac{(x - ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$   
中心  $(ea, 0)$ , 準線  $x = ea - \frac{a}{e}$

$\lambda < 0$  のとき  $\frac{(x + ea)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$   
中心  $(-ea, 0)$ , 準線  $x = -ea + \frac{a}{e}$

これらの表す曲線は,  $e$  のとる値によって, 次のような2次曲線に分類される.  
この  $e$  の値を離心率という.

- |                     |                         |
|---------------------|-------------------------|
| [1] $0 < e < 1$ のとき | O を焦点の1つとする楕円           |
| [2] $e = 1$ のとき     | O を焦点, $\ell$ を準線とする放物線 |
| [3] $e > 1$ のとき     | O を焦点の1つとする双曲線          |

同様に、極方程式②を直交座標  $(x, y)$  に関する方程式で表すと

$$x^2 + (1 - e^2)y^2 + 2e^2\lambda x - e^2\lambda^2 = 0 \quad \dots(**)$$

(\*\*) は、 $e \neq 1$  のとき  $\frac{1 - e^2}{e^2\lambda^2}x^2 + \frac{(1 - e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(y + \frac{e^2\lambda}{1 - e^2}\right)^2 = 1$

i)  $0 < e < 1$  のとき、 $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e|\lambda|}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{1 - e^2}{e|\lambda|}$  とおくと  $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$

したがって、(\*\*) は  $\lambda$  の符号によって、次のようになる。

$\lambda > 0$  のとき  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + ea)^2}{b^2} = 1$ ,  
中心  $(0, -ea)$ , 準線  $y = -ea + \frac{a}{e}$

$\lambda < 0$  のとき  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - ea)^2}{b^2} = 1$ ,  
中心  $(0, ea)$ , 準線  $y = ea - \frac{a}{e}$

ii)  $e = 1$  のとき、(\*\*) は  $x^2 = -2\lambda\left(y - \frac{\lambda}{2}\right)$

iii)  $e > 1$  のとき、 $\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e|\lambda|}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{e^2 - 1}{e|\lambda|}$  とおくと  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

したがって、(\*\*) は  $\lambda$  の符号によって、次のようになる。

$\lambda > 0$  のとき  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - ea)^2}{b^2} = 1$ ,  
中心  $(0, ea)$ , 準線  $y = ea - \frac{a}{e}$

$\lambda < 0$  のとき  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + ea)^2}{b^2} = 1$ ,  
中心  $(0, -ea)$ , 準線  $y = -ea + \frac{a}{e}$

補足 (1) の楕円  $\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$  の焦点は  $y$  軸上にあるから (準線は  $y$  軸に垂直), 極方程式を次のようにおける。

$$r = \frac{\delta}{1 + \varepsilon \sin \theta}$$

(1) に示した図の 2 点  $P_1(8, \frac{\pi}{2})$ ,  $P_2(2, \frac{3\pi}{2})$  を通ることから

$$\delta = \frac{16}{5}, \quad \varepsilon = -\frac{3}{5} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{16}{5 - 3 \sin \theta}$$

(\*), (\*\*) で示した楕円と双曲線の中心, 放物線の頂点を, 原点に平行移動した 2 次曲線は, 次のようになる.

[1] 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a > b$  のとき  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , 焦点  $(\pm ea, 0)$ , 準線  $x = \pm \frac{a}{e}$  (複号同順)

$a < b$  のとき  $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ , 焦点  $(0, \pm eb)$ , 準線  $y = \pm \frac{b}{e}$  (複号同順)

[2] 放物線  $y^2 = -2\lambda x$

$e = 1$ , 焦点  $\left(-\frac{\lambda}{2}, 0\right)$ , 準線  $x = \frac{\lambda}{2}$

放物線  $x^2 = -2\lambda y$

$e = 1$ , 焦点  $\left(0, -\frac{\lambda}{2}\right)$ , 準線  $y = \frac{\lambda}{2}$

[3] 双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ , 焦点  $(\pm ea, 0)$ , 準線  $x = \pm \frac{a}{e}$  (複号同順)

双曲線  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

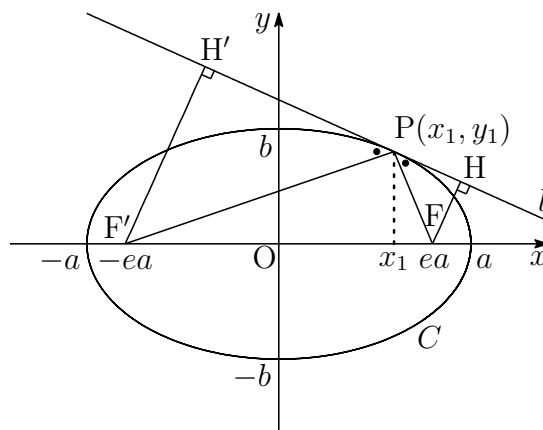
$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ , 焦点  $(0, \pm eb)$ , 準線  $y = \pm \frac{b}{e}$  (複号同順)

楕円  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  について ( $a > b$ ),  
 $C$  上の点を  $P(x_1, y_1)$ , 焦点を  $F(ea, 0)$ ,  
 $F'(-ea, 0)$ ,  $C$  の  $P$  における接線を  $l$  と  
 する.  $F, F'$  から  $l$  にそれぞれ垂線  $FH$ ,  
 $F'H'$  を引くと, 次が成り立つ.

$$FP = a - ex_1$$

$$F'P = a + ex_1$$

$$\angle FPH = \angle F'PH'$$



証明

$$\begin{aligned} FP^2 &= (x_1 - ea)^2 + y_1^2 = x_1^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2) \\ &= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x_1^2 \\ &= a^2 - 2eax_1 + e^2x_1^2 = (a - ex_1)^2 \end{aligned}$$

$a > ex_1$  であるから  $FP = a - ex_1$  同様にして  $F'P = a + ex_1$

$F(ea, 0), F'(-ea, 0)$  から  $l: \frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$  までの距離は, それぞれ

$$\begin{aligned} FH &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a - ex_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{FP}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \\ F'H' &= \frac{\left|\frac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + ex_1}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{F'P}{\sqrt{x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2}} \end{aligned}$$

上の2式から  $\frac{FH}{FP} = \frac{F'H'}{F'P}$  ゆえに  $\angle FPH = \angle F'PH'$  証終

**4** (1)  $a_1 = 1, b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = 0$  であるから

$$\begin{aligned} a_2 &= f_1 \cdot \frac{1}{2} + b_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\ b_2 &= a_1 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{\mathbf{1}}{2} \\ c_2 &= b_1 \cdot \frac{1}{2} + d_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\ d_2 &= c_1 \cdot \frac{1}{2} + e_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\ e_2 &= d_1 \cdot \frac{1}{2} + f_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\ f_2 &= d_1 \cdot \frac{1}{2} + a_1 \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{1}}{2} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a_3 &= f_2 \cdot \frac{1}{2} + b_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{2} \\ b_3 &= a_2 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\ c_3 &= b_2 \cdot \frac{1}{2} + d_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{\mathbf{1}}{4} \\ d_3 &= c_2 \cdot \frac{1}{2} + e_2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\ e_3 &= d_2 \cdot \frac{1}{2} + f_2 \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{4} \\ f_3 &= d_2 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad b_{n+1} + d_{n+1} + f_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}(c_n + e_n) + \frac{1}{2}(e_n + a_n) \\ &= a_n + c_n + e_n \\ a_{n+1} + c_{n+1} + e_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + b_n) + \frac{1}{2}(b_n + d_n) + \frac{1}{2}(d_n + f_n) \\ &= b_n + d_n + f_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{上の2式から} \quad b_{n+2} + d_{n+2} + f_{n+2} &= a_{n+1} + c_{n+1} + e_{n+1} \\ &= b_n + d_n + f_n \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad b_2 + d_2 + f_2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{よって } n \text{ が偶数のとき} \quad \mathbf{b_n + d_n + f_n = 1}$$

$$(4) \quad b_1 = 0, f_1 = 0, c_1 = 0, e_1 = 0$$

ゆえに,  $n = 1$  のとき,  $b_n = f_n, c_n = e_n$  が成立する.

$n = k$  のとき,  $b_k = f_k, c_k = e_k$  が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} b_{k+1} - f_{k+1} &= \frac{1}{2}(a_k + c_k) - \frac{1}{2}(e_k + a_k) \\ &= \frac{1}{2}(c_k - e_k) = 0 \\ c_{k+1} - e_{k+1} &= \frac{1}{2}(b_k + d_k) - \frac{1}{2}(d_k + f_k) \\ &= \frac{1}{2}(b_k - f_k) = 0 \end{aligned}$$

上の2式から,  $n = k + 1$  のときも,  $b_{k+1} = f_{k+1}, c_{k+1} = e_{k+1}$  が成立する.  
よって, すべての時刻  $n$  に対して,  $b_n = f_n$  および  $c_n = e_n$  が成立する.

$$(5) \quad (3) \text{ の結果から } b_{2m} + d_{2m} + f_{2m} = 1 \quad (4) \text{ の結果から } f_{2m} = b_{2m}$$

$$\text{上の2式から} \quad 2b_{2m} + d_{2m} = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, (4) の結果により

$$\begin{aligned} b_{n+1} - d_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) - \frac{1}{2}(c_n + e_n) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - e_n) = \frac{1}{2}(a_n - c_n) \\ a_{n+1} - c_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + b_n) - \frac{1}{2}(b_n + d_n) \\ &= \frac{1}{2}(f_n - d_n) = \frac{1}{2}(b_n - d_n) \end{aligned}$$

$$\text{上の2式から} \quad b_{n+2} - d_{n+2} = \frac{1}{4}(b_n - d_n)$$

$$\text{ゆえに} \quad b_{2m+2} - d_{2m+2} = \frac{1}{4}(b_{2m} - d_{2m})$$

$$\text{したがって} \quad b_{2m} - d_{2m} = (b_2 - d_2) \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から} \quad d_{2m} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \quad \text{よって} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} d_{2m} = \frac{1}{3}$$