# 平成 22 年度　九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
# 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
# 情報工学部　平成 22 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

**1** $a$ を正の実数とする．また，対数は自然対数，$e$ は自然対数の底を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \log(ax)\,dx$ を求めよ．

(2) $0 < x < e$ の範囲で曲線 $y = \log(ax)$ と直線 $y = 1$ とが交わるように，$a$ の値の範囲を定めよ．

(3) $a$ の値が (2) で求めた範囲にあるとする．座標平面において，曲線 $y = \log(ax)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = e$ とで囲まれた図形のうち，$y \leqq 1$ の部分の面積を $S_1$，$y \geqq 1$ の部分の面積を $S_2$ とする．$S = S_1 - S_2$ を $a$ を用いて表せ．

(4) $a$ の値が (2) で求めた範囲にあるとする．$S$ の最大値とそのときの $a$ の値を求めよ．

**2** 実数 $\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

とする．また，実数 $k$ $(k > 0)$ に対して，$x$，$y$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

を満たす．そして，$x$，$y$，$k$ を用いて座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(0,\ k)$ を定める．原点を O とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を $k$，$\tan\theta$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{OPQ}$ を $\theta$ を用いて表せ．

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$ を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 $V(\theta)$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $V(\theta)$ について，$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{\theta}{2\pi} V(\theta)$ を求めよ．

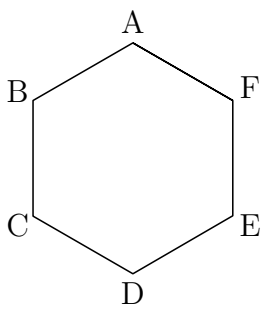
**3** 点 O を原点，点 P を楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ 上の点とする．$x$ 軸の正の部分を始線として動径 OP の表す角を $\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 P の $y$ 座標を $\dfrac{a+b\sin\theta}{c+d\sin\theta}$ $(a, b, c, d$ は実数$)$ の形で表せ．

(2) 点 P における楕円の接線を $l$ とする．直線 $l$ の方程式を求めよ．

(3) 点 A の座標を $(0,\ 6)$ とする．点 A を (2) の直線 $l$ に関して対称移動した点を Q とする．点 Q の座標を $\theta$ を用いて表せ．

**4** 右図のように平面上に正六角形 ABCDEF がある．時刻 $n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ において動点 P は正六角形の 6 つの頂点のいずれかにあり，時刻 1 では頂点 A にあるものとする．時刻 $n+1$ には，時刻 $n$ のときにあった頂点に隣り合う 2 つの頂点のいずれかに移動する．どちらの頂点に移動するかは同様に確からしいものとする．時刻 $n$ において，動点 P が頂点 A，B，C，D，E，F にある確率をそれぞれ $a_n$，$b_n$，$c_n$，$d_n$，$e_n$，$f_n$ とする．以下の問いに答えよ．




(1) $a_2$，$b_2$，$c_2$，$d_2$，$e_2$，$f_2$ を求めよ．

(2) $a_3$，$b_3$，$c_3$，$d_3$，$e_3$，$f_3$ を求めよ．

(3) $n$ が偶数のとき，$b_n+d_n+f_n$ を求めよ．

(4) すべての時刻 $n$ に対して，$b_n=f_n$ および $c_n=e_n$ が同時に成立することを数学的帰納法を用いて示せ．

(5) $m$ を 1 以上の整数とするとき，$d_{2m}$ を $m$ を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_{2m}$ を求めよ．

# 解答例

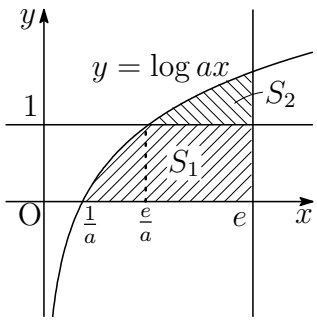
**1** (1)
$$\int \log(ax)\,dx = \int (x)'\log(ax)\,dx$$
$$= x\log(ax) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \boldsymbol{x\log(ax) - x + C} \quad (C:\text{積分定数})$$

(2) 曲線 $y=\log(ax)$ と直線 $y=1$ の共有点の $x$ 座標は

$$\log(ax)=1 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{e}{a}$$

このとき，正数 $a$ が $0<\dfrac{e}{a}<e$ を満たせばよいので　$\boldsymbol{a>1}$

(3) 右の図から




$$S_1 = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}} \log(ax)\,dx + \left(e-\frac{e}{a}\right)\cdot 1$$
$$= \Big[\,x\log(ax)-x\,\Big]_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}} + e - \frac{e}{a}$$
$$= e + \frac{1}{a} - \frac{e}{a}$$

$$S_1+S_2 = \int_{\frac{1}{a}}^{e} \log(ax)\,dx = \Big[\,x\log(ax)-x\,\Big]_{\frac{1}{a}}^{e} = e\log a + \frac{1}{a}$$

よって
$$S = S_1 - S_2$$
$$= 2S_1 - (S_1+S_2)$$
$$= 2\left(e+\frac{1}{a}-\frac{e}{a}\right) - \left(e\log a + \frac{1}{a}\right)$$
$$= \boldsymbol{2e - \frac{2e-1}{a} - e\log a}$$

(4) (3) の結果から　$\dfrac{dS}{da} = \dfrac{2e-1}{a^2} - \dfrac{e}{a} = \dfrac{2e-1-ea}{a^2}$

したがって，$S$ の増減表は，次にようになる．

| $a$ | (1) | $\cdots$ | $\frac{2e-1}{e}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{dS}{da}$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $S$ | | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ |

よって，$\boldsymbol{a = \dfrac{2e-1}{e}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2e - e\log(2e-1)}$ をとる．　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ より　$(E-A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 1-\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(E-A) &= (1-\cos 2\theta)^2 - (-\sin 2\theta)\sin 2\theta \\ &= 2(1-\cos 2\theta) = 4\sin^2\theta \end{aligned}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\det(E-A) \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} (E-A)^{-1} &= \frac{1}{4\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 1-\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & 1-\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 2\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\tan\theta} \\ -\frac{1}{\tan\theta} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E-A)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$

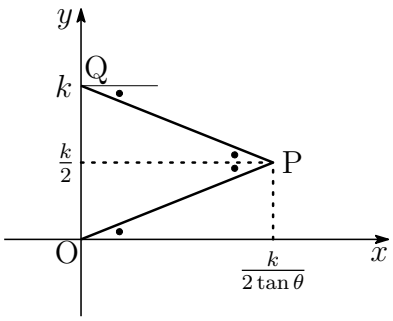
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\tan\theta} \\ -\frac{1}{\tan\theta} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2\tan\theta} \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix}$$

よって，点 P の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{k}{2\tan\theta}}, \boldsymbol{\dfrac{k}{2}}\right)$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta},\ 1\right) = \frac{k}{2\sin\theta}(\cos\theta,\ \sin\theta) \qquad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta}, -1\right) = \frac{k}{2\sin\theta}(\cos\theta, -\sin\theta)$$

上の 2 式から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の向きは $x$ 軸の正の向きから $\theta$ だけ，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の向きは $x$ 軸の正の向きから $-\theta$ だけ回転したものである．よって，右図から　$\boldsymbol{\angle \mathrm{OPQ} = 2\theta}$




(3) (円錐台の体積から三角錐の体積を引く)

$$V(\theta) = \frac{\pi}{3}\left\{k^2 + k\cdot\frac{k}{2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2\right\}\frac{k}{2\tan\theta} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{k}{2}\right)^2\frac{k}{2\tan\theta}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi k^3}{4\tan\theta}}$$

**円錐台の体積**

上底の半径 $r_1$，下底の半径 $r_2$，高さ $h$ の円錐台の体積 $V$ は

$$V = \frac{\pi}{3}({r_1}^2 + r_1 r_2 + {r_2}^2)h$$

**補足** △OPQ の面積 $\dfrac{k^2}{4\tan\theta}$ およびその重心の $y$ 座標 $\dfrac{k}{2}$ から，パップス・ギュルダンの定理 (高校数学の範囲外であるため確認用) から [1]

$$V(\theta) = 2\pi\cdot\frac{k}{2}\times\frac{k^2}{4\tan\theta} = \frac{\pi k^3}{4\tan\theta}$$

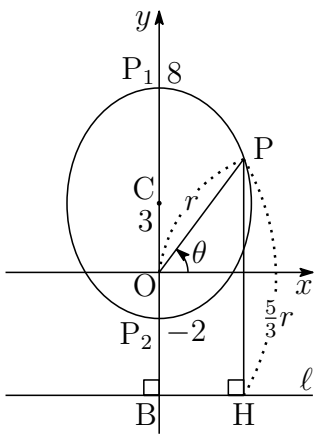
(4) (3) の結果から

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{2\pi}V(\theta) = \lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{2\pi}\times\frac{\pi k^3}{4\tan\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to+0}\frac{k^3}{8}\cdot\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\cos\theta = \frac{k^3}{8}\cdot 1\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{k^3}{8}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

**3** (1) O は，楕円の焦点であるから，右の図において，楕円の離心率 $e$ は




$$e = \frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CP_2}} = \frac{3}{5}$$

楕円の準線を $\ell$ とすると，楕円上の点 P から準線 $\ell$ に下した垂線を PH とすると

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

が成り立つ (2 次曲線について成り立つ関係式).
O から準線 $\ell$ までの距離 OB を $\lambda$ とする．右図から，PH を 2 通りに表すと

$$\mathrm{PH} = \frac{5}{3}r, \quad \mathrm{PH} = \lambda + r\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{3\lambda}{5 - 3\sin\theta}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき (P が $\mathrm{P_1}$ にある)，$r = 8$ であるから，上式より　$3\lambda = 16$

したがって　$r = \dfrac{16}{5 - 3\sin\theta}$　よって　$y = r\sin\theta = \boldsymbol{\dfrac{16\sin\theta}{5 - 3\sin\theta}}$

**補足** 2 次曲線の焦点を極とすると，その方程式を極方程式で表すことができる．

楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$ の準線は　$y = -\dfrac{16}{3}$

また，楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{25} = 1$ の準線は　$y = \dfrac{16}{3}$

その極方程式は　$r = \dfrac{16}{5 + 3\sin\theta}$

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{16\cos\theta}{5 - 3\sin\theta}, \dfrac{16\sin\theta}{5 - 3\sin\theta}\right)$ における楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$ の接線は

$$\frac{16\cos\theta}{5 - 3\sin\theta}\cdot\frac{x}{16} + \left(\frac{16\sin\theta}{5 - 3\sin\theta} - 3\right)\cdot\frac{y-3}{25} = 1$$

よって　$\boldsymbol{(5\cos\theta)x + (5\sin\theta - 3)y - 16 = 0}$

**補足** 楕円 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{(x_1 - \alpha)(x - \alpha)}{a^2} + \frac{(y_1 - \beta)(y - \beta)}{b^2} = 1$$

(3) 点 A(0, 6) を通り，$l$ に垂直な直線の方程式は

$$-(5\sin\theta-3)x+(5\cos\theta)(y-6)=0$$

ここで，$a=5\cos\theta$，$b=5\sin\theta-3$ とおくと，$l$ および上式は

$$ax+by=16,\quad -bx+ay=30\cos\theta$$

これら 2 直線の交点を M$(x,\ y)$ とすると

$$(a^2+b^2)x=16a-30b\cos\theta,\quad (a^2+b^2)y=16b+30a\cos\theta$$

このとき

$$\begin{aligned}
a^2+b^2&=(5\cos\theta)^2+(5\sin\theta-3)^2\\
&=2(17-15\cos\theta)\\
16a-30b\cos\theta&=16\cdot5\cos\theta-30(5\sin\theta-3)\cos\theta\\
&=10\cos\theta(17-15\sin\theta)\\
16b+30a\cos\theta&=16(5\sin\theta-3)+30\cdot5\cos\theta\cdot\cos\theta\\
&=-150\sin^2\theta+80\sin\theta+102\\
&=2(5\sin\theta+3)(17-15\sin\theta)
\end{aligned}$$

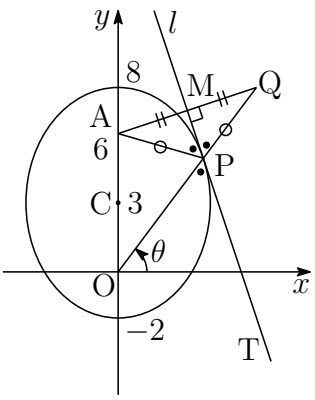
$17-15\sin\theta\neq0$ であるから　M$(5\cos\theta,\ 5\sin\theta+3)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta+3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta-3\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\cos\theta\\5\sin\theta-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\cos\theta\\10\sin\theta\end{pmatrix}$$

よって　　**Q$(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$**

**別解** 右の図で，△APM ≡ △QPM であるから




$$\angle\mathrm{APM}=\angle\mathrm{QPM},\quad \mathrm{AP}=\mathrm{PQ}$$

O，A は楕円の焦点であるから

$$\angle\mathrm{APM}=\angle\mathrm{OPT}$$

ゆえに　　$\angle\mathrm{QPM}=\angle\mathrm{OPT}$

Q は OP の延長線上にあるから

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}+\mathrm{PQ}=\mathrm{OP}+\mathrm{AP}=2\times5=10$$

よって　　**Q$(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$**

解説

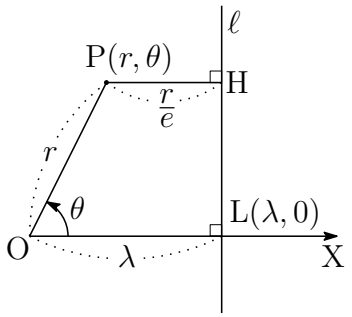
O を通らない直線 $\ell$(準線) に，点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ から下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になる．

点 $\mathrm{L}(\lambda,\ 0)$ を通り，始線 OX に垂直な直線を $\ell$ とする．

右の図において，L と H は $\ell$ 上にあるから

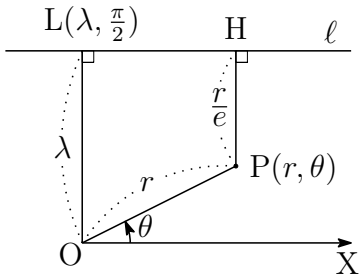



$$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに　$$r = \frac{e\lambda}{1+e\cos\theta} \quad \cdots ①$$

同様に，点 $\mathrm{L}(\lambda,\ \frac{\pi}{2})$ を通り，始線 OX に平行な直線を $\ell$ とする．

右の図において，L と H は $\ell$ 上にあるから




$$r\sin\theta + \frac{r}{e} = \lambda$$

ゆえに　$$r = \frac{e\lambda}{1+e\sin\theta} \quad \cdots ②$$

①，② が点 P の軌跡を表す極方程式である．

一般に，極方程式 $r = -f(\theta+\pi)$ と $r = f(\theta)$ は一致する．

したがって，$\lambda < 0$ のとき，$d = -\lambda$ とおくと $(d > 0)$，①，② は，それぞれ次のように表すこともできる．

$$r = \frac{e\lambda}{1+\cos\theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1-e\cos(\theta+\pi)} = \frac{ed}{1-e\cos\theta} \qquad \cdots ①'$$

$$r = \frac{e\lambda}{1+\sin\theta} = -\frac{e(-\lambda)}{1-e\sin(\theta+\pi)} = \frac{ed}{1-e\sin\theta} \qquad \cdots ②'$$

極方程式 ① を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$(1-e^2)x^2+y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ は，$e\neq 1$ のとき　$\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(x+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2+\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}y^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$ とおくと　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は $\lambda$ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(-ea,\ 0)$，　準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(ea,\ 0)$，　準線 $x=ea-\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のとき，$(*)$ は　$y^2=-2\lambda\left(x-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) $e>1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$ とおくと　$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

したがって，$(*)$ は $\lambda$ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{(x-ea)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(ea,\ 0)$，　準線 $x=ea-\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{(x+ea)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

中心 $(-ea,\ 0)$，　準線 $x=-ea+\dfrac{a}{e}$

これらの表す曲線は，$e$ のとる値によって，次のような 2 次曲線に分類される．この $e$ の値を離心率という．

［1］　$0<e<1$ のとき　　O を焦点の 1 つとする楕円

［2］　$e=1$ のとき　　O を焦点，$\ell$ を準線とする放物線

［3］　$e>1$ のとき　　O を焦点の 1 つとする双曲線

同様に，極方程式 ② を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表すと

$$x^2+(1-e^2)y^2+2e^2\lambda x-e^2\lambda^2=0 \quad \cdots(**)$$

$(**)$ は，$e\neq 1$ のとき　$\dfrac{1-e^2}{e^2\lambda^2}x^2+\dfrac{(1-e^2)^2}{e^2\lambda^2}\left(y+\dfrac{e^2\lambda}{1-e^2}\right)^2=1$

i) $0<e<1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1-e^2}{e|\lambda|}$ とおくと　$e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

したがって，$(**)$ は $\lambda$ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$，

中心 $(0,-ea)$，　準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-ea)^2}{b^2}=1$，

中心 $(0,\ ea)$，　準線 $y=ea-\dfrac{a}{e}$

ii) $e=1$ のとき，$(**)$ は　$x^2=-2\lambda\left(y-\dfrac{\lambda}{2}\right)$

iii) $e>1$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e|\lambda|}$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{e^2-1}{e|\lambda|}$ とおくと　$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$

したがって，$(**)$ は $\lambda$ の符号によって，次のようになる．

$\lambda>0$ のとき　$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y-ea)^2}{b^2}=1$，

中心 $(0,\ ea)$，　準線 $y=ea-\dfrac{a}{e}$

$\lambda<0$ のとき　$-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(y+ea)^2}{b^2}=1$，

中心 $(0,-ea)$，　準線 $y=-ea+\dfrac{a}{e}$

**補足** (1) の楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$ の焦点は $y$ 軸上にあるから (準線は $y$ 軸に垂直)，極方程式を次のようにおける．

$$r=\frac{\delta}{1+\varepsilon\sin\theta}$$

(1) に示した図の 2 点 $\mathrm{P}_1\left(8,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(2,\ \frac{3\pi}{2}\right)$ を通ることから

$$\delta=\frac{16}{5},\quad \varepsilon=-\frac{3}{5}\quad \text{ゆえに}\quad r=\frac{16}{5-3\sin\theta}$$

$(*)$，$(**)$ で示した楕円と双曲線の中心，放物線の頂点を，原点に平行移動した 2 次曲線は，次のようになる．

［1］楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$a>b$ のとき　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，焦点 $(\pm ea,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$　(複号同順)

$a<b$ のとき　$e=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$，焦点 $(0,\ \pm eb)$，準線 $y=\pm\dfrac{b}{e}$　(複号同順)

［2］放物線 $y^2=-2\lambda x$

$e=1$，焦点 $\left(-\dfrac{\lambda}{2},\ 0\right)$，準線 $x=\dfrac{\lambda}{2}$

放物線 $x^2=-2\lambda y$

$e=1$，焦点 $\left(0,\ -\dfrac{\lambda}{2}\right)$，準線 $y=\dfrac{\lambda}{2}$

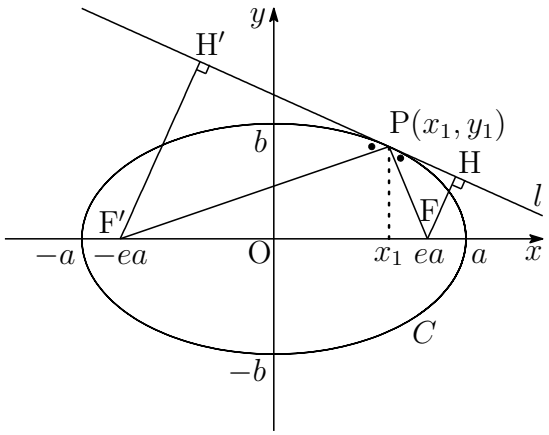
［3］双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，焦点 $(\pm ea,\ 0)$，準線 $x=\pm\dfrac{a}{e}$　(複号同順)

双曲線 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$，焦点 $(0,\ \pm eb)$，準線 $y=\pm\dfrac{b}{e}$　(複号同順)

楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ について $(a > b)$，$C$ 上の点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，焦点を $\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$，$C$ の P における接線を $l$ とする．F，F′ から $l$ にそれぞれ垂線 FH，F′H′ を引くと，次が成り立つ．




$$\mathrm{FP} = a - ex_1$$
$$\mathrm{F'P} = a + ex_1$$
$$\angle\mathrm{FPH} = \angle\mathrm{F'PH'}$$

証明

$$\begin{aligned}
\mathrm{FP}^2 &= (x_1 - ea)^2 + {y_1}^2 = {x_1}^2 - 2eax_1 + e^2a^2 + {y_1}^2 \\
&= {x_1}^2 - 2eax_1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)a^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - {x_1}^2) \\
&= a^2 - 2eax_1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}{x_1}^2 \\
&= a^2 - 2eax_1 + e^2{x_1}^2 = (a - ex_1)^2
\end{aligned}$$

$a > ex_1$ であるから　$\mathrm{FP} = a - ex_1$　同様にして　$\mathrm{F'P} = a + ex_1$

$\mathrm{F}(ea,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-ea,\ 0)$ から $l : \dfrac{x_1}{a^2}x + \dfrac{y_1}{b^2}y - 1 = 0$ までの距離は，それぞれ

$$\mathrm{FH} = \frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}ea - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a - ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{FP}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

$$\mathrm{F'H'} = \frac{\left|\dfrac{x_1}{a^2}(-ea) - 1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_1}{b^2}\right)^2}} = \frac{a + ex_1}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}} = \frac{\mathrm{F'P}}{\sqrt{{x_1}^2 + \left(\dfrac{ay_1}{b}\right)^2}}$$

上の 2 式から　$\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{FP}} = \dfrac{\mathrm{F'H'}}{\mathrm{F'P}}$　ゆえに　$\angle\mathrm{FPH} = \angle\mathrm{F'PH'}$　証終

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = 0$ であるから

$$
\begin{aligned}
a_2 &= f_1 \cdot \frac{1}{2} + b_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\
b_2 &= a_1 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \mathbf{\frac{1}{2}} \\
c_2 &= b_1 \cdot \frac{1}{2} + d_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\
d_2 &= c_1 \cdot \frac{1}{2} + e_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\
e_2 &= d_1 \cdot \frac{1}{2} + f_1 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\
f_2 &= d_1 \cdot \frac{1}{2} + a_1 \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果から

$$
\begin{aligned}
a_3 &= f_2 \cdot \frac{1}{2} + b_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}} \\
b_3 &= a_2 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\
c_3 &= b_2 \cdot \frac{1}{2} + d_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 0 = \mathbf{\frac{1}{4}} \\
d_3 &= c_2 \cdot \frac{1}{2} + e_2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0} \\
e_3 &= d_2 \cdot \frac{1}{2} + f_2 \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{4}} \\
f_3 &= d_2 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
b_{n+1} + d_{n+1} + f_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}(c_n + e_n) + \frac{1}{2}(e_n + a_n) \\
&= a_n + c_n + e_n \\
a_{n+1} + c_{n+1} + e_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + b_n) + \frac{1}{2}(b_n + d_n) + \frac{1}{2}(d_n + f_n) \\
&= b_n + d_n + f_n
\end{aligned}
$$

上の 2 式から
$$
\begin{aligned}
b_{n+2} + d_{n+2} + f_{n+2} &= a_{n+1} + c_{n+1} + e_{n+1} \\
&= b_n + d_n + f_n
\end{aligned}
$$

また　$b_2 + d_2 + f_2 = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$

よって　$n$ が偶数のとき　$\boldsymbol{b_n + d_n + f_n = 1}$

(4) $b_1 = 0$，$f_1 = 0$，$c_1 = 0$，$e_1 = 0$

ゆえに，$n = 1$ のとき，$b_n = f_n$，$c_n = e_n$ が成立する．

$n = k$ のとき，$b_k = f_k$，$c_k = e_k$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} b_{k+1} - f_{k+1} &= \frac{1}{2}(a_k + c_k) - \frac{1}{2}(e_k + a_k) \\ &= \frac{1}{2}(c_k - e_k) = 0 \\ c_{k+1} - e_{k+1} &= \frac{1}{2}(b_k + d_k) - \frac{1}{2}(d_k + f_k) \\ &= \frac{1}{2}(b_k - f_k) = 0 \end{aligned}$$

上の 2 式から，$n = k+1$ のときも，$b_{k+1} = f_{k+1}$，$c_{k+1} = e_{k+1}$ が成立する．

よって，すべての時刻 $n$ に対して，$b_n = f_n$ および $c_n = e_n$ が成立する．

(5) (3) の結果から　$b_{2m} + d_{2m} + f_{2m} = 1$　(4) の結果から　$f_{2m} = b_{2m}$

上の 2 式から　$2b_{2m} + d_{2m} = 1$　$\cdots$①

また，(4) の結果により

$$\begin{aligned} b_{n+1} - d_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + c_n) - \frac{1}{2}(c_n + e_n) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - e_n) = \frac{1}{2}(a_n - c_n) \\ a_{n+1} - c_{n+1} &= \frac{1}{2}(f_n + b_n) - \frac{1}{2}(b_n + d_n) \\ &= \frac{1}{2}(f_n - d_n) = \frac{1}{2}(b_n - d_n) \end{aligned}$$

上の 2 式から　$b_{n+2} - d_{n+2} = \dfrac{1}{4}(b_n - d_n)$

ゆえに　$b_{2m+2} - d_{2m+2} = \dfrac{1}{4}(b_{2m} - d_{2m})$

したがって　$b_{2m} - d_{2m} = (b_2 - d_2)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m-1}$　$\cdots$②

①，② から　$d_{2m} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{m-1}$　よって　$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} d_{2m} = \dfrac{1}{3}}$　■