

## 平成 21 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

## 数 I · II · III · A · B · C (120 分)

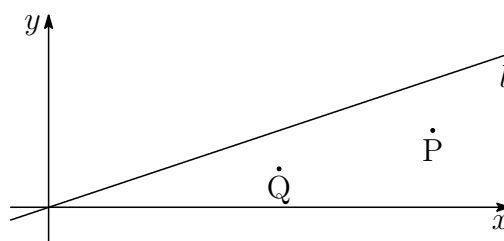
情報工学部 平成 21 年 2 月 25 日

## 問題 1 2 3 4

1 曲線  $C : y = x\sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) と、直線  $l : y = kx$  ( $k$  は実数) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  上の点で  $y$  座標が最大となるものの座標を求めよ。
- (2) 曲線  $C$  と直線  $l$  が原点以外の交点を持つときの  $k$  の範囲を求め、その交点の座標を  $k$  を用いて表せ。
- (3) 実数  $k$  は (2) で求めた範囲を動くものとする。原点を  $O$ 、(2) で求めた交点を  $P$  とし、曲線  $C$  と線分  $OP$  で囲まれる図形  $A$  の面積を  $S$  とする。また点  $P$  から  $x$  軸に下ろした垂線と  $x$  軸との交点を  $Q$  とし、 $\triangle OPQ$  の面積を  $T$  とする。 $k \geq \frac{1}{4}$  のとき、 $|S - T|$  の最大値および最小値と、そのときの  $k$  の値をそれぞれ求めよ。
- (4) (3) の図形  $A$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積が、 $\triangle OPQ$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積と等しくなるときの  $k$  の値を求めよ。

2 座標平面上に直線  $l : y = \frac{1}{3}x$  と点  $P(9, 2)$ ,  $Q(5, 1)$  がある。以下の問いに答えよ。



- (1) 座標平面上の点を  $x$  軸に関して対称な点に移す移動 (1 次変換) を表す行列  $A$  を求めよ。
- (2) 座標平面上の点を直線  $l$  に関して対称な点に移す移動 (1 次変換) を表す行列  $B$  を求めよ。
- (3) 点  $R$  を  $x$  軸上を動く点とする。このとき、折れ線  $PRQ$  の長さの最小値を求めよ。
- (4) 点  $R$  を  $x$  軸上を動く点、点  $S$  を直線  $l$  上を動く点とする。このとき、折れ線  $PRSQ$  の長さの最小値を求めよ。

3 座標平面上に与えられた2点  $P(0, 1)$ ,  $A(a, 0)$  ( $a \geq 0$ ) に対し, 点  $Q$  を直線  $AP$  上に  $A$  から見て  $P$  と同じ側に  $AP \cdot AQ = a(a+1)$  を満たすようにとる. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $a > 0$  のとき  $x$  軸上に点  $B(b, 0)$  ( $b \leq 0$ ) を  $AP \cdot AQ = AO \cdot AB$  を満たすようにとる. ただし, 点  $O$  は原点を表す. このとき  $b$  の値を求めよ.
- (2) 点  $A$  が  $a > 0$  を満たしながら  $x$  軸上を移動するとき, 点  $Q$  は同一の円  $C$  の周上にある. この円の中心の座標と半径を求めよ.
- (3) 点  $Q$  の  $y$  座標の値が最大となるときの点  $Q$  の座標を求めよ. またそのときの  $a$  の値を求めよ.

4 箱の中に, 数字の1を記入したカード, 2を記入したカード, 3を記入したカードがそれぞれ  $n$  枚, 合計  $3n$  枚入っている. ただし,  $n \geq 4$  であり, またカードの裏側には何も書かれていないものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 箱の中からカードを1枚取り出し, 数字を見ないでふせておく. 次に箱の中から取り出したカードの数字が1である確率を求めよ.
- (2) 箱の中から2枚のカードを同時に取り出したとき, カードの数字が異なる確率を  $n$  を用いて表せ.
- (3) 箱の中から3枚のカードを同時に取り出したとき, カードの数字がちょうど2種類である確率を  $n$  を用いて表せ.
- (4) 箱の中から4枚のカードを同時に取り出したとき, カードの数字がちょうど2種類である確率を  $n$  を用いて表せ.

## 解答例

1 (1)  $0 \leq x \leq 1$  より

$$y = x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

したがって、 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、最大値  $\frac{1}{2}$  をとる.

よって、求める座標は  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

(2)  $x\sqrt{1-x^2} = kx$  より、 $C$  と  $l$  の原点以外の交点であるから

$$k = \sqrt{1-x^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき、 $0 < x \leq 1$  であるから  $0 \leq k < 1$

①より、 $x = \sqrt{1-k^2}$ . これを  $y = kx$  に代入すると

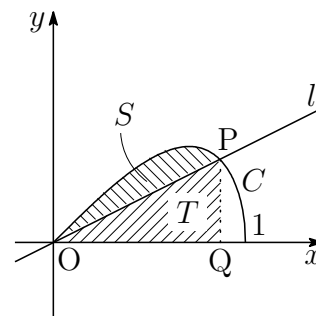
$$y = k\sqrt{1-k^2}$$

よって、求める交点の座標は  $(\sqrt{1-k^2}, k\sqrt{1-k^2})$

(3) 右の図から

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot k\sqrt{1-k^2} = \frac{1}{2}k(1-k^2),$$

$$\begin{aligned} S+T &= \int_0^{\sqrt{1-k^2}} x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{3}(1-k^3) \end{aligned}$$



したがって  $|S-T| = |(S+T) - 2T|$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{3}(1-k^3) - 2 \cdot \frac{1}{2}k(1-k^2) \right| \\ &= \frac{1}{3} |2k^3 - 3k + 1| \end{aligned}$$

$$f(k) = 2k^3 - 3k + 1 \text{ とおくと } f'(k) = 3(2k^2 - 1)$$

$$(1) \text{ の結果から, } k \text{ の値の範囲は } \frac{1}{4} \leq k < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

このとき,  $f(k)$  の増減表は次のようになる.

$k$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		-	0	+	
$f(k)$	$\frac{9}{32}$	$\searrow$	$1 - \sqrt{2}$	$\nearrow$	(0)

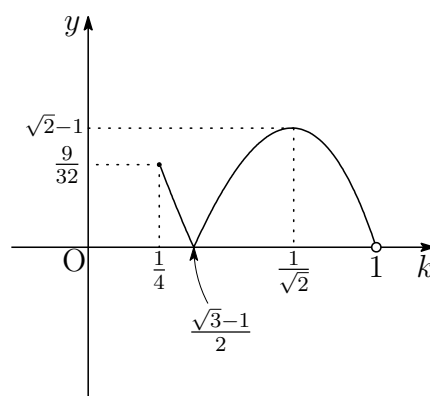
$$f(k) = 0 \text{ とすると}$$

$$(k-1)(2k^2+2k-1) = 0 \quad \text{このとき, } \textcircled{2} \text{ に注意して } k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$y = |f(k)|$  のグラフは, 右の図のようになる. よって,  $|S-T|$  は

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき } \quad \text{最大値 } \frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

$$k = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ のとき } \quad \text{最小値 } 0$$



- (4) 図形  $A$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V_1$ ,  $\triangle OPQ$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V_2$  とすると

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \pi \int_0^{\sqrt{1-k^2}} (x\sqrt{1-x^2})^2 dx \\ &= \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{1-k^2}} = \frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15} \{5 - 3(1-k^2)\} \\ &= \frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15} (2+3k^2), \\ V_2 &= \frac{1}{3} \cdot \pi (k\sqrt{1-k^2})^2 \cdot \sqrt{1-k^2} = \frac{1}{3} \pi k^2 (1-k^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$V_1 = V_2$  のとき,  $V_1 + V_2 = 2V_2$  であるから

$$\frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15} (2+3k^2) = 2 \times \frac{1}{3} \pi k^2 (1-k^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{ゆえに } 2+3k^2 = 10k^2 \quad \text{このとき, } 0 \leq k < 1 \text{ に注意して } k = \frac{\sqrt{14}}{7}$$



- 2 (1)  $x$  軸に関して点  $(x, y)$  と対称な点は  $(x, -y)$  であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (2)  $l: y = \frac{1}{3}x$  の方向ベクトル  $\vec{d}$ , 法線ベクトルベクトル  $\vec{n}$  を

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると, 座標平面上の任意の位置ベクトル

$$s\vec{d} + t\vec{n} \quad (s, t \text{ は実数})$$

は, この直線に関する対称移動により

$$s\vec{d} - t\vec{n}$$

に移る. したがって,  $l$  に関する対称移動を表す行列  $B$  により

$$B(s\vec{d} + t\vec{n}) = s\vec{d} - t\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad sB\vec{d} + tB\vec{n} = s\vec{d} + t(-\vec{n})$$

上式は,  $s, t$  に関する恒等式であるから

$$B\vec{d} = \vec{d}, \quad B\vec{n} = -\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad B \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

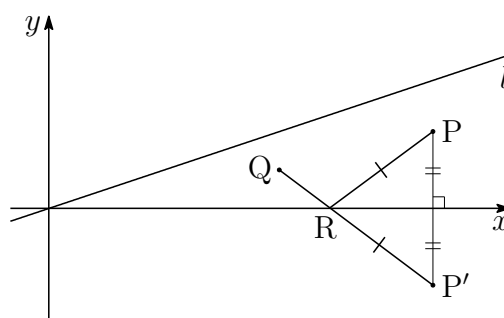
$$\begin{aligned} \text{よって} \quad B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (3)  $x$  軸に関して  $P(9, 2)$  と対称な点を  $P'$  とすると,  $P'(9, -2)$ .

$$\begin{aligned} PR + RQ &= P'R + RQ \\ &\geq P'Q \end{aligned}$$

等号が成立するのは, 3点  $P'$ ,  $R$ ,  $Q$  が同一直線上にあるときであるから, 求める最小値は

$$\sqrt{(9-5)^2 + (-2-1)^2} = 5$$



- (4)  $l$  に関して  $Q$  と対称な点を  $Q'$  とすると  $Q'$  の座標は, (2) の結果より

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} PR + RS + SQ \\ = P'R + RS + SQ' \geq P'R' \end{aligned}$$

等号が成り立つのは, 4点  $P'$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $Q'$  が同一直線上にあるときであるから, 求める最小値は

$$\sqrt{\left(\frac{23}{5} - 9\right)^2 + \left(\frac{11}{5} + 2\right)^2} = \sqrt{37}$$



- 3** (1) 条件から  $AP \cdot AQ = a(a+1) \cdots \textcircled{1}$

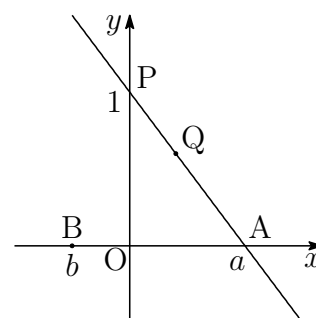
$$a > 0, b \leq 0 \text{ より } AO = a, AB = a - b$$

これらを  $AP \cdot AQ = AO \cdot AB$  に代入すると

$$a(a+1) = a(a-b)$$

$$a \neq 0 \text{ であるから } a+1 = a-b$$

$$\text{よって } b = -1$$



$$(2) \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (0, 1) - (a, 0) = (-a, 1) \text{ より } AP^2 = a^2 + 1$$

$$\text{上式および①から } \frac{AQ}{AP} = \frac{AP \cdot AQ}{AP^2} = \frac{a(a+1)}{a^2+1}$$

仮定より,  $\overrightarrow{AP}$  と  $\overrightarrow{AQ}$  は同じ向きであるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{AQ}{AP} \overrightarrow{AP} \\ &= (a, 0) + \frac{a(a+1)}{a^2+1}(-a, 1) = \left( \frac{a(1-a)}{a^2+1}, \frac{a(1+a)}{a^2+1} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } Q(x, y) \text{ は } x = \frac{a(1-a)}{a^2+1}, \quad y = \frac{a(1+a)}{a^2+1}$$

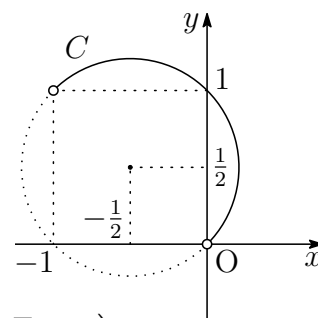
$a > 0$  より,  $a = \tan \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とおくと

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tan \theta(1 - \tan \theta)}{\tan^2 \theta + 1} = \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( 2\theta - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\tan \theta(1 + \tan \theta)}{\tan^2 \theta + 1} = \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( 2\theta - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \quad \dots \text{②} \end{aligned}$$

ゆえに, 点  $Q$  の軌跡は  $O$  と点  $(-1, 1)$  を直径の両端とする円周上を  $O$  から点  $(-1, 1)$  まで反時計回りに描いた図形 ( $O$  と  $(-1, 1)$  を含まない).

よって 中心  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 半径  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



(3)  $Q$  の  $y$  座標が最大となる点は, ①, ② より

$$2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } Q \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)$$

このとき,  $\theta = \frac{3\pi}{8}$  であるから,  $a = \tan \frac{3\pi}{8} > 0$  より

$$\tan^2 \frac{3\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{1 + \cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2} + 1)^2 \quad \text{よって } a = \sqrt{2} + 1$$

補足  $AP \cdot AQ = AO \cdot AB$  が成り立つから, 方べきの定理の逆により, 4点  $P, Q, O, B$  が同一円周上にあり,  $\angle POB = 90^\circ$  であるから,  $PB$  を直径とする円であること分かるが,  $Q$  の  $y$  座標の最大値は分からない。 ■

- 4 (1) 最初のカードが1で、次に取り出したカードも1である確率は

$$\frac{n}{3n} \times \frac{n-1}{3n-1} = \frac{n-1}{3(3n-1)}$$

最初のカードが1以外で、次に取り出したカードも1である確率は

$$\frac{2n}{3n} \times \frac{n}{3n-1} = \frac{2n}{3(3n-1)}$$

よって、求める確率は  $\frac{n-1}{3(3n-1)} + \frac{2n}{3(3n-1)} = \frac{1}{3}$

解説 取り出す順番に関係なく、カードが1である確率は  $\frac{1}{3}$

- (2) 異なる数字の組み合わせは、 ${}_3C_2$ (通り)であるから

$$\frac{{}_3C_2 \times n^2}{{}_3n C_2} = 3n^2 \times \frac{2}{3n(3n-1)} = \frac{2n}{3n-1}$$

- (3) 3枚のカードの組み合わせは、次の6通り.

$$\{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 2, 3\}, \{3, 3, 1\}, \{3, 3, 2\}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_n C_2 \times {}_n C_1}{{}_3n C_3} \times 6 &= \frac{n(n-1)}{2} \times n \times \frac{6}{3n(3n-1)(3n-2)} \times 6 \\ &= \frac{6n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)} \end{aligned}$$

(4) 4枚のカードの組み合わせは、次の場合に分けて求める.

- i)  $\{1, 1, 1, 2\}$ ,  $\{1, 1, 1, 3\}$ ,  $\{2, 2, 2, 1\}$ ,  
 $\{2, 2, 2, 3\}$ ,  $\{3, 3, 3, 1\}$ ,  $\{3, 3, 3, 2\}$   
 ii)  $\{1, 1, 2, 2\}$ ,  $\{1, 1, 3, 3\}$ ,  $\{2, 2, 3, 3\}$

i) の場合の確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_n C_3 \times {}_n C_1}{{}_3 n C_4} \times 6 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times n \times \frac{4!}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)} \times 6 \\ &= \frac{8n(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} \end{aligned}$$

ii) の場合の確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_n C_2 \times {}_n C_2}{{}_3 n C_4} \times 3 &= \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{4!}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)} \times 3 \\ &= \frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)} \end{aligned}$$

i) と ii) は互いに独立であるから

$$\frac{8n(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)} + \frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{2n(7n-11)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

