平成 21 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 21 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 曲線 $C : y = x\sqrt{1-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と，直線 $l : y = kx$ (k は実数) を考える．以下の問いに答えよ．

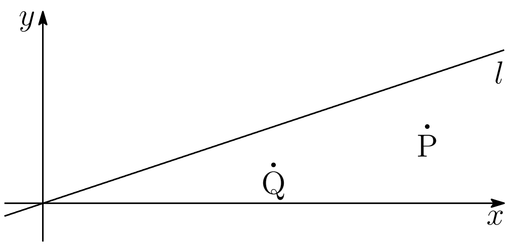
(1) 曲線 C 上の点で y 座標が最大となるものの座標を求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l が原点以外の交点を持つときの k の範囲を求め，その交点の座標を k を用いて表せ．

(3) 実数 k は (2) で求めた範囲を動くものとする．原点を O，(2) で求めた交点を P とし，曲線 C と線分 OP で囲まれる図形 A の面積を S とする．また点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を Q とし，△OPQ の面積を T とする．$k \geqq \dfrac{1}{4}$ のとき，$|S-T|$ の最大値および最小値と，そのときの k の値をそれぞれ求めよ．

(4) (3) の図形 A を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積が，△OPQ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積と等しくなるときの k の値を求めよ．

2 座標平面上に直線 $l : y = \dfrac{1}{3}x$ と点 P(9, 2)，Q(5, 1) がある．以下の問いに答えよ．



(1) 座標平面上の点を x 軸に関して対称な点に移す移動 (1 次変換) を表す行列 A を求めよ．

(2) 座標平面上の点を直線 l に関して対称な点に移す移動 (1 次変換) を表す行列 B を求めよ．

(3) 点 R を x 軸上を動く点とする．このとき，折れ線 PRQ の長さの最小値を求めよ．

(4) 点 R を x 軸上を動く点，点 S を直線 l 上を動く点とする．このとき，折れ線 PRSQ の長さの最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上に与えられた2点P$(0,\ 1)$，A$(a,\ 0)$ $(a \geqq 0)$ に対し，点Qを直線AP上にAから見てPと同じ側に AP$\cdot$AQ $= a(a+1)$ を満たすようにとる．以下の問いに答えよ．

(1) $a > 0$ のとき x 軸上に点B$(b,\ 0)$ $(b \leqq 0)$ を AP$\cdot$AQ $=$ AO$\cdot$AB を満たすようにとる．ただし，点Oは原点を表す．このとき b の値を求めよ．

(2) 点Aが $a > 0$ を満たしながら x 軸上を移動するとき，点Qは同一の円 C の周上にある．この円の中心の座標と半径を求めよ．

(3) 点Qの y 座標の値が最大となるときの点Qの座標を求めよ．またそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 箱の中に，数字の1を記入したカード，2を記入したカード，3を記入したカードがそれぞれ n 枚，合計 $3n$ 枚入っている．ただし，$n \geqq 4$ であり，またカードの裏側には何も書かれていないものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 箱の中からカードを1枚取り出し，数字を見ないでふせておく．次に箱の中から取り出したカードの数字が1である確率を求めよ．

(2) 箱の中から2枚のカードを同時に取り出したとき，カードの数字が異なる確率を n を用いて表せ．

(3) 箱の中から3枚のカードを同時に取り出したとき，カードの数字がちょうど2種類である確率を n を用いて表せ．

(4) 箱の中から4枚のカードを同時に取り出したとき，カードの数字がちょうど2種類である確率を n を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 \leqq x \leqq 1$ より

$$y = x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2-x^4} = \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

したがって，$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる．

よって，求める座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

(2) $x\sqrt{1-x^2} = kx$ より，C と l の原点以外の交点であるから

$$k = \sqrt{1-x^2} \quad \cdots ①$$

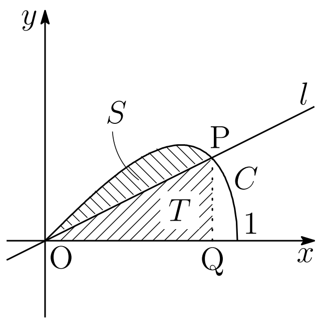
このとき，$0 < x \leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{0 \leqq k < 1}$

① より，$x = \sqrt{1-k^2}$．これを $y = kx$ に代入すると

$$y = k\sqrt{1-k^2}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{(\sqrt{1-k^2},\ k\sqrt{1-k^2})}$

(3) 右の図から



$$T = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-k^2}\cdot k\sqrt{1-k^2} = \frac{1}{2}k(1-k^2),$$

$$S+T = \int_0^{\sqrt{1-k^2}} x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{3}(1-k^3)$$

したがって

$$|S-T| = |(S+T)-2T|$$

$$= \left|\frac{1}{3}(1-k^3) - 2\cdot\frac{1}{2}k(1-k^2)\right|$$

$$= \frac{1}{3}|2k^3-3k+1|$$

$f(k)=2k^3-3k+1$ とおくと　　$f'(k)=3(2k^2-1)$

(1) の結果から，k の値の範囲は　　$\dfrac{1}{4} \leqq k < 1$　　$\cdots$②

このとき，$f(k)$ の増減表は次のようになる．

k	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$-$	0	$+$	
$f(k)$	$\frac{9}{32}$	↘	$1-\sqrt{2}$	↗	(0)

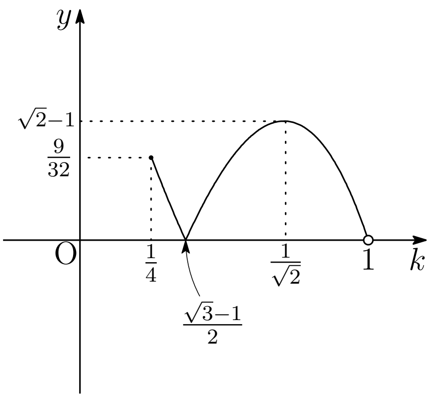
$f(k)=0$ とすると

$$(k-1)(2k^2+2k-1)=0 \quad \text{このとき，②に注意して} \quad k=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$y=|f(k)|$ のグラフは，右の図のようになる．よって，$|S-T|$ は

$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき**　　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}}$

$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$ **のとき**　**最小値** $\boldsymbol{0}$



(4) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1，△OPQ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると

$$\begin{aligned}
V_1+V_2 &= \pi\int_0^{\sqrt{1-k^2}} \left(x\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\
&= \pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{1-k^2}} = \frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15}\{5-3(1-k^2)\} \\
&= \frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15}(2+3k^2), \\
V_2 &= \frac{1}{3}\cdot\pi(k\sqrt{1-k^2})^2\cdot\sqrt{1-k^2} = \frac{1}{3}\pi k^2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$V_1=V_2$ のとき，$V_1+V_2=2V_2$ であるから

$$\frac{\pi(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}{15}(2+3k^2)=2\times\frac{1}{3}\pi k^2(1-k^2)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに　$2+3k^2=10k^2$　このとき，$0 \leqq k < 1$ に注意して　$\boldsymbol{k=\dfrac{\sqrt{14}}{7}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) x 軸に関して点 $(x,\ y)$ と対称な点は $(x, -y)$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $l : y = \dfrac{1}{3}x$ の方向ベクトル $\vec{d}$，法線ベクトルベクトル $\vec{n}$ を

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とすると，座標平面上の任意の位置ベクトル

$$s\vec{d} + t\vec{n} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

は，この直線に関する対称移動により

$$s\vec{d} - t\vec{n}$$

に移る．したがって，l に関する対称移動を表す行列 B により

$$B(s\vec{d} + t\vec{n}) = s\vec{d} - t\vec{d} \quad \text{ゆえに} \quad sB\vec{d} + tB\vec{n} = s\vec{d} + t(-\vec{n})$$

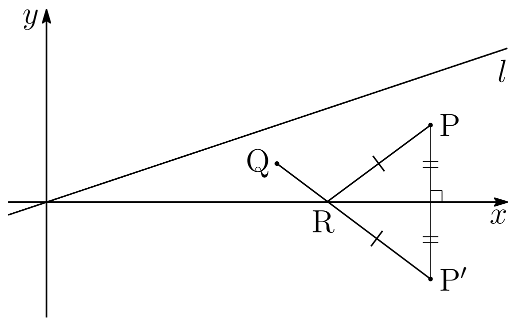
上式は，s，t に関する恒等式であるから

$$B\vec{d} = \vec{d}, \ \ B\vec{n} = -\vec{n} \quad \text{ゆえに} \quad B\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

よって $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

(3) x 軸に関して P(9, 2) と対称な点を P′ とすると，P′(9, −2).

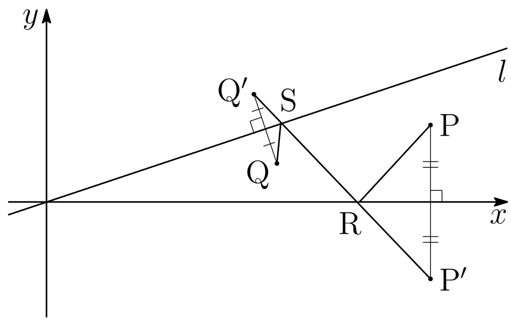


$$\mathrm{PR}+\mathrm{RQ}=\mathrm{P'R}+\mathrm{RQ}$$
$$\geqq \mathrm{P'Q}$$

等号が成立するのは，3 点 P′，R，Q が同一直線上にあるときであるから，求める最小値は

$$\sqrt{(9-5)^2+(-2-1)^2}=\mathbf{5}$$

(4) l に関して Q と対称な点を Q′ とすると Q′ の座標は，(2) の結果より



$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}23\\ 11\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PR}+\mathrm{RS}+\mathrm{SQ}$$
$$=\mathrm{P'R}+\mathrm{RS}+\mathrm{SQ'}\geqq \mathrm{P'R'}$$

等号が成り立つのは，4 点 P′，R，S，Q′ が同一直線上にあるときであるから，求める最小値は

$$\sqrt{\left(\frac{23}{5}-9\right)^2+\left(\frac{11}{5}+2\right)^2}=\boldsymbol{\sqrt{37}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 条件から　　　　$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=a(a+1)\cdots$①

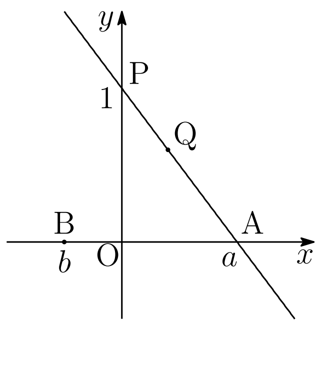
$a>0$，$b\leqq 0$ より　$\mathrm{AO}=a$，$\mathrm{AB}=a-b$

これらを $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AB}$ に代入すると

$$a(a+1)=a(a-b)$$

$a\neq 0$ であるから　　$a+1=a-b$

よって　　$\boldsymbol{b=-1}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 1)-(a,\ 0)=(-a,\ 1)$ より　$\mathrm{AP}^2=a^2+1$

上式および①から　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}^2}=\dfrac{a(a+1)}{a^2+1}$

仮定より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は同じ向きであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(a,\ 0)+\frac{a(a+1)}{a^2+1}(-a,\ 1)=\left(\frac{a(1-a)}{a^2+1},\ \frac{a(1+a)}{a^2+1}\right)\end{aligned}$$

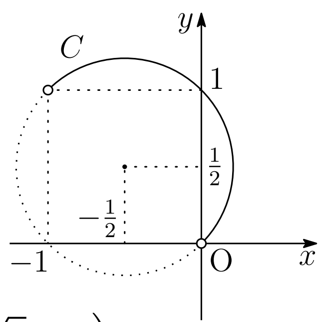
ゆえに，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ は　$x=\dfrac{a(1-a)}{a^2+1}$,　$y=\dfrac{a(1+a)}{a^2+1}$

$a>0$ より，$a=\tan\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと

$$\begin{aligned}x&=\frac{\tan\theta(1-\tan\theta)}{\tan^2\theta+1}=\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\quad\cdots①\\y&=\frac{\tan\theta(1+\tan\theta)}{\tan^2\theta+1}=\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\quad\cdots②\end{aligned}$$

ゆえに，点 Q の軌跡は O と点 $(-1,\ 1)$ を直径の両端とする円周上を O から点 $(-1,\ 1)$ まで反時計回りに描いた図形 (O と $(-1,\ 1)$ を含まない)．

よって　中心 $\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$



(3) Q の y 座標が最大となる点は，①，② より

$$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\text{のとき}\quad \mathbf{Q}\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$$

このとき，$\theta=\dfrac{3\pi}{8}$ であるから，$a=\tan\dfrac{3\pi}{8}>0$ より

$$\tan^2\frac{3\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{1+\cos\frac{3\pi}{4}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=(\sqrt{2}+1)^2\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{a=\sqrt{2}+1}$$

補足 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\mathrm{AO}\cdot\mathrm{AB}$ が成り立つから，方べきの定理の逆により，4 点 P，Q，O，B が同一円周上にあり，$\angle\mathrm{POB}=90^\circ$ であるから，PB を直径とする円であること分かるが，Q の y 座標の最大値は分からない．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 最初のカードが 1 で，次に取り出したカードも 1 である確率は

$$\frac{n}{3n}\times\frac{n-1}{3n-1}=\frac{n-1}{3(3n-1)}$$

最初のカードが 1 以外で，次に取り出したカードも 1 である確率は

$$\frac{2n}{3n}\times\frac{n}{3n-1}=\frac{2n}{3(3n-1)}$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{n-1}{3(3n-1)}+\dfrac{2n}{3(3n-1)}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

解説 取り出す順番に関係なく，カードが 1 である確率は $\dfrac{1}{3}$

(2) 異なる数字の組み合わせは，${}_3\mathrm{C}_2$(通り) であるから

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times n^2}{{}_{3n}\mathrm{C}_2}=3n^2\times\frac{2}{3n(3n-1)}=\boldsymbol{\frac{2n}{3n-1}}$$

(3) 3 枚のカードの組み合わせは，次の 6 通り．

$$\{1,1,2\},\ \{1,1,3\},\ \{2,2,1\},\ \{2,2,3\},\ \{3,3,1\},\ \{3,3,2\}$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_1}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}\times 6&=\frac{n(n-1)}{2}\times n\times\frac{6}{3n(3n-1)(3n-2)}\times 6\\&=\boldsymbol{\frac{6n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}}\end{aligned}$$

(4) 4 枚のカードの組み合わせは，次の場合に分けて求める．

i) $\{1,1,1,2\},\ \{1,1,1,3\},\ \{2,2,2,1\},$
$\{2,2,2,3\},\ \{3,3,3,1\},\ \{3,3,3,2\}$

ii) $\{1,1,2,2,\},\ \{1,1,3,3,\},\ \{2,2,3,3\}$

i) の場合の確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_3\times{}_n\mathrm{C}_1}{{}_{3n}\mathrm{C}_4}\times 6&=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1}\times n\times\frac{4!}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)}\times 6\\&=\frac{8n(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}\end{aligned}$$

ii) の場合の確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{3n}\mathrm{C}_4}\times 3&=\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{4!}{3n(3n-1)(3n-2)(3n-3)}\times 3\\&=\frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}\end{aligned}$$

i) と ii) は互いに独立であるから

$$\frac{8n(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}+\frac{2n(n-1)}{(3n-1)(3n-2)}=\boldsymbol{\frac{2n(7n-11)}{3(3n-1)(3n-2)}}$$