平成 20 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 20 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 実数 c $(c>0)$ に対して，$x>0$ で定義された次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=\log_e x-c(x-1)$$

ただし，e は自然対数の底である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は最大値を持つことを示せ．また，$f(x)$ が最大になるときの x の値とそのときの $f(x)$ の値を c を用いて表せ．

(2) (1) で求めた最大値を m とするとき，c の値によらず $m \geqq 0$ であることを示せ．

(3) すべての x $(x>0)$ に対して，$f(x) \leqq 0$ が成り立つときの c の値を求めよ．

(4) すべての x $(x>0)$ に対して

$$\log_a x-b(x-1) \leqq 0$$

が成り立つときの，実数 a $(a>1)$ と b $(b>0)$ が満たすべき関係式を求めよ．

2 実数 a，b $(a>0,\ b>0)$ に対して，点 $(1,\ 1)$ を通る放物線 $C: y=ax^2+b$ と，放物線 C の点 $(1,\ 1)$ における接線 l を考える．以下の問いに答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) 接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(3) 放物線 C，接線 l および y 軸で囲まれた図形のうち，$y \geqq 0$ の部分の面積 S を a を用いて表せ．

(4) S が最大となるときの a の値とそのときの S の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ を 2×2 行列 M により次の式で定める．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$a > 0$，$b > 0$，$a + b < 1$ を満たす実数 a，b に対して，行列 M を

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & 1-a-b \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

で与える．$x_0 = 1$，$y_0 = 0$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$x_n + y_n = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 1$ のとき，y_n を y_{n-1}，a，b を用いて表せ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，x_n を x_{n-1}，a，b を用いて表せ．

(4) 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ の一般項を a，b を用いて表せ．

(5) 原点を O，座標 $(x_n,\ y_n)$ を表す点を P_n とするとき，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を S_n とする．$L_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} L_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 出席者 n 人の会議で，出席者のうち $\dfrac{2}{3}$ 以上が議案に賛成する確率 T_n と，$\dfrac{1}{2}$ 以上が賛成する確率 H_n を考える．各出席者が議案に賛成する確率を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とし，各出席者が賛成するかしないかは互いにに独立であるとする．

たとえば，$H_2 = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$ である．

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，出席者は賛成するかしないかのどちらかであるものとする．

(1) T_3 を求めよ．

(2) $H_2 \geqq T_3$ を示せ．

(3) 差 $H_2 - T_3$ が最も大きくなるときの p の値を求めよ．

(4) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，$T_3 \geqq T_6 \geqq T_9$ を示せ．

(5) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき，H_{2k+1} $(k \geqq 1)$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\log_e x-c(x-1)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{x}-c=\frac{1-cx}{x}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{c}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

右の増減表により　$\boldsymbol{x=\frac{1}{c}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{-\log_e c-1+c}$

(2) (1) の結果から　$m=-\log_e c-1+c\ \ (c>0)$

これを微分すると

$$\frac{dm}{dc}=-\frac{1}{c}+1=\frac{c-1}{c}$$

c	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dm}{dc}$		$-$	0	$+$
m		$\searrow$	0	$\nearrow$

右の増減表から　$m\geqq 0$

(3) すべての x に対して，$f(x)\leqq 0$ が成り立つとき，
$f(x)$ の最大値 m が $m\leqq 0$ であるから，(2) の結果から

$$m=0\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{c=1}$$

(4) $a>1$ のとき，すべての x $(x>0)$ に対して

$$\log_a x-b(x-1)\leqq 0$$

が成り立つとき

$$\frac{\log_e x}{\log_e a}-b(x-1)\leqq 0\quad \text{ゆえに}\quad \log_e x-(b\log_e a)\cdot(x-1)\leqq 0$$

$c=b\log_e a$ とおくと，上の第 2 式は　　$f(x)\leqq 0$

これがすべての x に対して成り立つとき，(3) の結果から

$$\boldsymbol{b\log a=1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 放物線 $y=ax^2+b$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1=a\cdot 1^2+b \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{b=1-a}$$

(2) $y=ax^2+b$ を微分すると　　$y'=2ax$

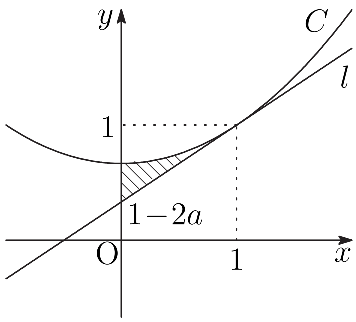
ゆえに，$x=1$ のとき　　$y'=2a$

求める接線 l は，点 $(1,\ 1)$ を通り，傾き $2a$ の直線であるから

$$y-1=2a(x-1) \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{y=2ax+1-2a}$$

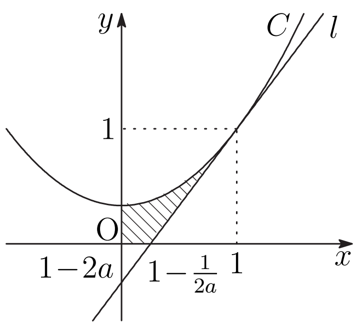
(3) $a>0$，$b>0$ および (1) の結果から　$1-a>0$　ゆえに　$0<a<1$

i) $1-2a>0$　すなわち　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{ax^2+1-a-(2ax+1-2a)\}\,dx \\ &= a\int_0^1 (x-1)^2\,dx \\ &= a\left[\,\frac{1}{3}(x-1)^3\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{a}{3}} \end{aligned}$$

ii) $1-2a \leqq 0$　すなわち　$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (ax^2+1-a)\,dx \\ &\qquad -\frac{1}{2}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}\cdot 1 \\ &= \left[\,\frac{a}{3}x^3+(1-a)x\,\right]_0^1-\frac{1}{4a} \\ &= \boldsymbol{1-\left(\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a}\right)} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から，$\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ において，S は最大値をとる．

相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{2a}{3}+\frac{1}{4a} \geqq 2\sqrt{\frac{2a}{3}\cdot\frac{1}{4a}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

上式において，等号が成立するとき　$\dfrac{2a}{3}=\dfrac{1}{4a}$　すなわち　$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{4}<1$ に注意して，$\boldsymbol{a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$ のとき，S は最大値 $\boldsymbol{1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1-a & 1-a-b \\ a & a+b \end{pmatrix} \cdots (*)$ より

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-a)x_n + (1-a-b)y_n & \cdots ① \\ y_{n+1} = ax_n + (a+b)y_n & \cdots ② \end{cases}$$

①，② の辺々を加えると　$x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$

よって　　$x_n + y_n = x_0 + y_0 = 1$

(2) (1) の結果から，$x_n = 1 - y_n$．これを ② に代入すると

$$y_{n+1} = a(1-y_n) + (a+b)y_n \quad \text{ゆえに} \quad y_{n+1} = by_n + a$$

よって　　$\boldsymbol{y_n = by_{n-1} + a}$　$(n = 1, 2, 3 \cdots)$

(3) (1) の結果から，$y_n = 1 - x_n$．これを ① に代入すると

$x_{n+1} = (1-a)x_n + (1-a-b)(1-x_n)$　ゆえに　$x_{n+1} = bx_n + 1 - a - b$

よって　　$\boldsymbol{x_n = bx_{n-1} + 1 - a - b}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(4) (2) の結果から

$$y_n - \frac{a}{1-b} = b\left(y_{n-1} - \frac{a}{1-b}\right)$$
$$y_n - \frac{a}{1-b} = b^n\left(y_0 - \frac{a}{1-b}\right)$$

$y_0 = 0$ より　　$\boldsymbol{y_n = \dfrac{a(1-b^n)}{1-b}}$

上式を $x_n = 1 - y_n$ に代入すると

$$x_n = 1 - \frac{a(1-b^n)}{1-b} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x_n = \frac{1-a-b+ab^n}{1-b}}$$

(5) $A_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{pmatrix}$ とおくと，$A_1 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$(*)$ より　$A_n = M^{n-1}A_1$　ゆえに　$\det A_n = (\det M)^{n-1} \det A_1$

このとき　$\det M = (1-a)(a+b) - (1-a-b)a = b$，$\det A_1 = a$

したがって　　$\det A_n = ab^{n-1}$

また，$S_n = \dfrac{1}{2}|\det A_n|$ であるから，$a > 0$，$b > 0$ より　$S_n = \dfrac{1}{2}ab^{n-1}$

$L_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ は初項が $\dfrac{1}{2}a$，公比が b $(0 < b < 1)$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{a}{2(1-b)}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 3 人のうち，2 人または 3 人が賛成する確率であるから

$$T_3 = {}_3\mathrm{C}_2 p^2(1-p) + p^3 = \boldsymbol{3p^2 - 2p^3}$$

(2) (1) の結果および $H_2 = 2p - p^2$ から

$$\begin{aligned} H_2 - T_3 &= (2p - p^2) - (3p^2 - 2p^3) \\ &= 2p^3 - 4p^2 + 2p \\ &= 2p(p-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって　　$H_2 \geqq T_3$

(3) $f(p) = H_2 - T_3$ とおくと　$f(p) = 2p^3 - 4p^2 + 2p$

ゆえに　　$f'(p) = 6p^2 - 8p + 2 = 2(3p-1)(p-1)$

$0 \leqq p \leqq 1$ における $f(p)$ の増減表は次のようになる．

p	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$H_2 - T_3$ が最大になるとき　　$\boldsymbol{p = \dfrac{1}{3}}$

(4)
$$T_{3n} = \sum_{k=2n}^{3n} {}_{3n}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} \sum_{k=2n}^{3n} {}_{3n}\mathrm{C}_k$$

上式に $n = 1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{aligned} T_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{k=2}^{3} {}_3\mathrm{C}_k = \frac{1}{8}\left({}_3\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_3\right) \\ &= \frac{3+1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{128}{256}, \\ T_6 &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \sum_{k=4}^{6} {}_6\mathrm{C}_k = \frac{1}{64}\left({}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_5 + {}_6\mathrm{C}_6\right) \\ &= \frac{15+6+1}{64} = \frac{22}{64} = \frac{88}{256}, \\ T_9 &= \left(\frac{1}{2}\right)^9 \sum_{k=6}^{9} {}_9\mathrm{C}_k = \frac{1}{512}\left({}_9\mathrm{C}_6 + {}_9\mathrm{C}_7 + {}_9\mathrm{C}_8 + {}_9\mathrm{C}_9\right) \\ &= \frac{84+36+9+1}{512} = \frac{65}{256} \end{aligned}$$

よって　　$T_3 \geqq T_6 \geqq T_9$

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad H_{2k+1} &= \sum_{j=k+1}^{2k+1} {}_{2k+1}\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2k+1-j} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \sum_{j=k+1}^{2k+1} {}_{2k+1}\mathrm{C}_j \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \sum_{j=k+1}^{2k+1} (2 \times {}_{2k+1}\mathrm{C}_j) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \sum_{j=k+1}^{2k+1} ({}_{2k+1}\mathrm{C}_j + {}_{2k+1}\mathrm{C}_{2k+1-j}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \sum_{j=0}^{2k+1} {}_{2k+1}\mathrm{C}_j \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2} \times 2^{2k+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$