平成 19 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 19 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b を $0 < a < 4b$ を満たす定数とする．放物線 $C_1 : y^2 = ax$ と直線 $l : x = -b$ に対し，放物線 C_1 上の動点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{at})$ $(t \geqq 0)$ を中心として直線 l に接する円を C_2 とする．以下に答えよ．

(1) 円 C_2 の方程式を t，a，b を用いて表せ．

(2) 円 C_2 は x 軸と異なる 2 点で交わることを示せ．

(3) 動点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{at})$ が $t \geqq 0$ の範囲で動くとき，(2) における交点間の距離の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 a $(a > 0)$ に対して曲線 $C_1 : y = x^2 + ax$ および曲線 $C_2 : y = -2x^2 + ax$ を考える．曲線 $C_3 : y = f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & (x < 0) \\ -2x^2 + ax & (x \geqq 0) \end{cases}$$

で与えられるものとする．また，実数 k に対して直線 $l : y = -ax + k$ を考える．

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 は原点 O で共通の接線をもつことを示せ．

(2) 直線 l が原点を通るとき，曲線 C_3 と直線 l で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) 曲線 C_3 と直線 l の共有点の個数が 2 となるとき k を a を用いて表せ．

(4) (3) で，共有点の個数が 2 となる $k > 0$ に対して，曲線 C_3，直線 l および y 軸によって囲まれる $x \geqq 0$ の部分を，x 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面上の点 A$(s,\ t)$ が 2×2 行列 D により点 B$(u,\ v)$ に移るとは，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

が成り立つことである．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<r<1$ とし，n を自然数とする．行列

$$M = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

に対し，M の n 乗を M^n で表す．座標平面上の 4 点 $\mathrm{P_0}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q_0}(-1,\ 1)$，$\mathrm{R_0}(-1,-1)$，$\mathrm{S_0}(1,-1)$ に対し，これらの 4 点が行列 M^n により移る点をそれぞれ P_n，Q_n，R_n，S_n とする．点 $\mathrm{P_1}$ は線分 $\mathrm{P_0Q_0}$ 上にあるものとする．以下に答えよ．

(1) r を θ を用いて表せ．

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$M^n = \begin{pmatrix} r^n\cos(n\theta) & -r^n\sin(n\theta) \\ r^n\sin(n\theta) & r^n\cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (r\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$ となることを示せ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}$ は垂直であることを示せ．

(5) 四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\mathrm{S}_n$ の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 袋 A には 1，2，3，4 の番号が書かれた球がそれぞれ 1 個ずつ入っており，袋 B には

番号 1 が書かれた球が 1 個，
番号 2 が書かれた球が 2 個，
番号 3 が書かれた球が 3 個，
番号 4 が書かれた球が 4 個，

入っている．ただし 1 個の球には 1 つの番号が書かれている．袋 A および袋 B から球を 1 個ずつ取り出すとき，同じ番号が書かれた球を取り出す確率を求めよ．

(2) 袋 A には 1，2，$\cdots$，n の番号が書かれた球がそれぞれ 1 個ずつ入っており，袋 B および袋 C には

番号 1 が書かれた球が 1 個，
番号 2 が書かれた球が 2 個，
番号 3 が書かれた球が 3 個，
$\vdots$
番号 n が書かれた球が n 個，

入っている．ただし 1 個の球には 1 つの番号が書かれている．以下に答えよ．

(i) 袋 A および袋 B から球を 1 個ずつ取り出すものとする．同じ番号が書かれた球を取り出す確率を n を用いて表せ．

(ii) 袋 A および袋 B から球を 1 個ずつ取り出すものとする．取り出した球に書かれた番号が同じであればその番号分のポイントがもらえるものとする．平均していくらのポイントがもらえるか n を用いて表せ．

(iii) 袋 B および袋 C から球を 1 個ずつ取り出すものとする．同じ番号が書かれた球を取り出す確率を n を用いて表せ．

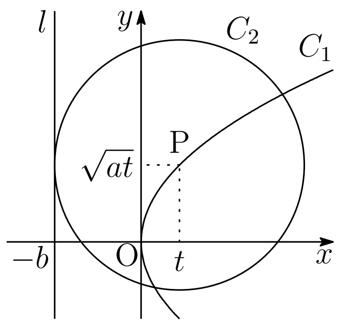
(iv) 袋 B および袋 C から球を 1 個ずつ取り出すものとする．取り出した球に書かれた番号が同じであればその番号分のポイントがもらえるものとする．平均していくらのポイントがもらえるか．自然数の立方の和の公式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を用いてよい．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_2 の中心は　$(t,\ \sqrt{at}\,)$,　　その半径は　$t-(-b)=t+b$

よって，C_2 の方程式は　　$\boldsymbol{(x-t)^2+(y-\sqrt{at})^2=(t+b)^2}$

(2) C_2 の半径を r，C_2 の中心 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{at})$ から x 軸との距離を d とおくと



$$r=t+b,\quad d=\sqrt{at}$$

ゆえに　$r-d=(t+b)-\sqrt{at}$

$$=\left(\sqrt{t}-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(4b-a)$$

$4b-a>0$ であるから　$r>d$　よって　C_2 は x 軸と 2 点で交わる

(3) 交点間の距離は $2\sqrt{r^2-d^2}$ であるから $(t \geqq 0)$

$$\begin{aligned} r^2-d^2 &= (t+b)^2-(\sqrt{at}\,)^2 \\ &= t^2-(a-2b)t+b^2 \\ &= \left(t-\frac{a-2b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-2b}{2}\right)^2+b^2 \\ &= \left(t-\frac{a-2b}{2}\right)^2+\frac{a(4b-a)}{4} \end{aligned}$$

よって　$2b<a<4b$ のとき　$t=\dfrac{a-2b}{2}$ で　最小値 $\boldsymbol{\sqrt{a(4b-a)}}$

$a \leqq 2b$ のとき　　$t=0$ で　　最小値 $\mathbf{2}\boldsymbol{b}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $g(x)=x^2+ax$，$h(x)=-2x^2+ax$ とおくと

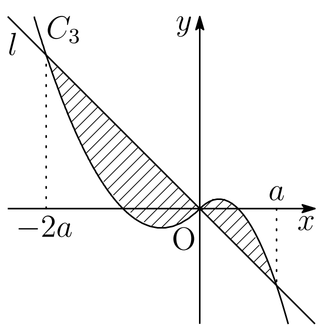
$$g'(x)=2x+a,\quad h'(x)=-4x+a$$

したがって　　$g(0)=h(0)=0$，$g'(0)=h'(0)=a$

よって，C_1 と C_2 は原点 O で共通の接線 $y=ax$ をもつ.

(2) l が原点を通るとき　$y=-ax$

l と C_3 の原点以外の共有点の x 座標は



i) $x<0$ のとき　$x^2+ax=-ax$

これを解いて　　$x=-2a$

ii) $x>0$ のとき　$-2x^2+ax=-ax$

これを解いて　　$x=a$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2a}^{0} \{-ax-(x^2+ax)\}dx + \int_{0}^{a} \{(-2x^2+ax)-(-ax)\}dx \\ &= -\int_{-2a}^{0} x(x+2a)dx - 2\int_{0}^{a} x(x-a)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{0-(-2a)\}^3 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{3}a^3} \end{aligned}$$

(3) C_3 と l の共有点が 2 個となるとき，C_3 と l は接する．

このとき，接線の傾きが $-a$ であるから，$f'(x)=-a$ とすると

i) $x<0$ のとき　$2x+a=-a$　ゆえに　$x=-a$，$f(-a)=0$

接点 $(-a,\ 0)$ は $l : y=-ax+k$ 上の点であるから

$$0=-a(-a)+k \quad \text{これを解いて} \quad k=-a^2$$

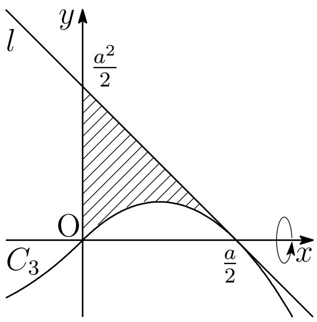
ii) $x \geqq 0$ のとき　$-4x+a=-a$　ゆえに　$x=\frac{a}{2}$，$f\left(\frac{a}{2}\right)=0$

接点 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ は $l : y=-ax+k$ 上の点であるから

$$0=-a\cdot\frac{a}{2}+k \quad \text{これを解いて} \quad k=\frac{a^2}{2}$$

i)，ii) より　　$\boldsymbol{k=-a^2,\ \frac{a^2}{2}}$

(4) (3) の結果から，求める体積は，右の図の斜線部分を x 軸の回りに回転させたものであるから，その体積を V とすると



$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{a^2}{2}\right)^2\frac{a}{2} - \pi\int_0^{\frac{a}{2}}(-2x^2+ax)^2dx \\ &= \frac{\pi}{24}a^5 - \pi\int_0^{\frac{a}{2}}(4x^4-4ax^3+a^2x^2)dx \\ &= \frac{\pi}{24}a^5 - \pi\left[\,\frac{4}{5}x^5 - ax^4 + \frac{a^2}{3}x^3\,\right]_0^{\frac{a}{2}} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{80}a^5} \end{aligned}$$

補足 定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

を利用すると [1]

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a}{2}}(-2x^2+ax)^2\,dx &= 4\int_0^{\frac{a}{2}}x^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2dx \\ &= 4\cdot\frac{2!2!}{5!}\left(\frac{a}{2}\right)^5 = \frac{a^5}{240} \end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf $\boxed{1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = M\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\theta - \sin\theta) \\ r(\sin\theta + \cos\theta) \end{pmatrix}$

$\mathrm{P_1}$ は線分 $\mathrm{P_0Q_0}$ 上にあるから

$$-1 \leqq r(\cos\theta - \sin\theta) \leqq 1, \quad r(\sin\theta + \cos\theta) = 1 \qquad \cdots (*)$$

$(*)$ の第 2 式から，$r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$ であるから

$$r(\cos\theta - \sin\theta) = -\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = -\frac{\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})} = -\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$-1 < r(\cos\theta - \sin\theta) < 1$ となり，$(*)$ の第 1 式を満たす.

よって $\quad \boldsymbol{r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}}$

(2) $$M^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \qquad \cdots (**)$$

i) $n = 1$ のとき，$(**)$ は明らかに成り立つ.

ii) $n = k$ のとき，

$$M^k = r^k \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} M^{k+1} = M^k M &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= r^{k+1}\begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに，$n = k + 1$ のときも $(**)$ が成り立つ.

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して，$(**)$ が成り立つ.

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}\\ &= \begin{pmatrix} r(\cos\theta - \sin\theta) \\ r(\sin\theta + \cos\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} r(\cos\theta - \sin\theta) \\ r(\sin\theta + \cos\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r(\cos\theta + \sin\theta) \\ r(\sin\theta + \cos\theta) \end{pmatrix}\\ &= r\sin\theta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} - \overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上の 2 式より，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} = (r\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ であるから

$$\begin{aligned}M^n\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} &= M^n(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OP_0}}) = M^n\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} - M^n\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = \overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}\\ M^n\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} &= (r\sin\theta)M^n\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}} = (r\sin\theta)(M^n\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}} - M^n\overrightarrow{\mathrm{OP_0}})\\ &= (r\sin\theta)(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}) = (r\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\end{aligned}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (r\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = M^n\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}} = r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n} = M^n\overrightarrow{\mathrm{Q_0R_0}} = r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2r^n\begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n} = 0$ より　$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\perp\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n} = M^n\overrightarrow{\mathrm{P_0S_0}} = r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2r^n\begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{S}_n\mathrm{R}_n} = M^n\overrightarrow{\mathrm{S_0R_0}} = r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2r^n\begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$

(4) の結果および上式から，四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n\mathrm{S}_n$ は，一辺が $2r^n$ の正方形であるから，求める面積は

$$(2r^n)^2 = \boldsymbol{4r^{2n}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 袋 B に入っている球は　$1+2+3+4=10$ (個)

よって，求める確率は　$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{10}=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(2) (i) 袋 A，B からともに番号 k を取り出す確率は $(k=1, 2, \cdots, n)$

$$\frac{1}{n}\times\frac{k}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{n}\times\frac{k}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2k}{n^2(n+1)}$$

よって，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2(n+1)}=\frac{2}{n^2(n+1)}\times\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

(ii) 求めるポイントの平均値は

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{2k}{n^2(n+1)}=\frac{2}{n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{2}{n^2(n+1)}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{2n+1}{3n}}$$

(iii) 袋 B，C からともに番号 k を取り出す確率は $(k=1, 2, \cdots, n)$

$$\left(\frac{k}{1+2+\cdots+n}\right)^2=\left\{\frac{2k}{n(n+1)}\right\}^2=\frac{4k^2}{n^2(n+1)^2}$$

よって，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}}$$

(iv) 求めるポイントの平均値は

$$\sum_{k=1}^{n}k\frac{4k^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\mathbf{1}$$