平成 18 年度　九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
数 I・II・III・A・B・C (120 分)
情報工学部　平成 18 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 実数 a $(a>0)$ に対して曲線 $y=ax^2-a-1$ を C_1 とし，C_1 と x 軸によって囲まれる部分の面積を S とする．また，$y \geqq ax^2-a-1$ を満たす領域にあり，原点を中心とする半径最大の円を C_2 とする．以下に答えよ．

(1) S を a を用いて表せ．

(2) S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a の値に対して，C_1 と C_2 によって囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

2 a，b は実数で，$b>0$ とする．2×1 行列 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n=1,2,\cdots)$ が

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

を満たす．以下に答えよ．

(1) $y_2>0$ を満たすような a の範囲を b を用いて表せ．

(2) $y_2>0$ かつ $y_3=0$ となるとき，a を b を用いて表せ．

(3) $y_2>0$ かつ $y_3=0$ となるとき，

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

を満たす a と b を求めよ．

(4) O を原点とする座標平面において，座標が $(x_n,\ y_n)$ である点を P_n とする．(3) で求めた a，b に対して，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

3 赤玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 2 個の白玉に変化する．白玉は，装置 M の中では，1 分経過後に 1 個の赤玉と 1 個の白玉に変化する．時刻 $t=1$(分) に装置 M へ赤玉を 1 個入れ，以降，1 分経過ごとに装置 M へ赤玉を 1 個追加する．時刻 $t=n$(分) における装置 M 中の赤玉と白玉の個数をそれぞれ a_n と b_n $(n=1,2,\cdots)$ とする．このとき，時刻 $t=3$(分) までの赤玉と白玉の個数は，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$b_1=0$，$b_2=2$，$b_3=4$ となる．以下に答えよ．

(1) a_{n+1} を b_n を用いて表し，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．

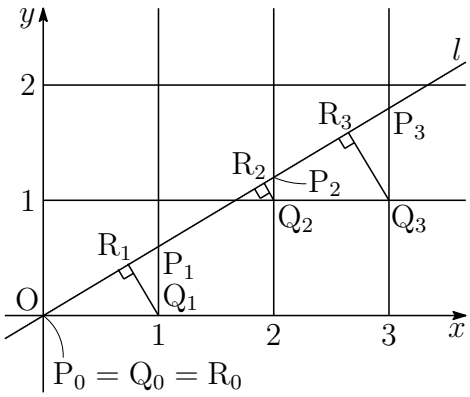
(2) a_{n+2}，a_{n+1}，a_n $(n=1,2,\cdots)$ が満たす関係式を求めよ．

(3) $c_n=a_{n+1}-2a_n$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項が $c_n=(-1)^n$ となることを示せ．

(4) $d_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とするとき，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

4 r は $1<r<2$ を満たす実数とし，m と n は 0 以上の整数とする．図のように，xy 平面上の直線 $y=m$ と $x=n$ を描き，これらの直線の交点 $(n,\ m)$ を格子点と呼ぶ．また，原点を通る傾き $\dfrac{1}{r}$ の直線 $y=\dfrac{1}{r}x$ を直線 l とし，直線 $x=n$ と直線 l との交点を $\mathrm{P}_n\left(n,\ \dfrac{n}{r}\right)$ とする．直線 $x=n$ 上の格子点のうち，点 P_n のすぐ下にある格子点を $\mathrm{Q}(n,\ a_n)$ とする．すなわち，a_n は $\dfrac{n}{r}-1<a_n\leqq\dfrac{n}{r}$ を満たす整数である．さらに，点 Q_n から直線 l に下ろした垂線と l との交点を R_n とする．ただし，点 P_n が格子点であるときは，$\mathrm{P}_n=\mathrm{Q}_n=\mathrm{R}_n$ とする．以下に答えよ．



(1) 次の空欄に適する数を答えよ．
すべての n に対して，a_n は整数であり，$a_{n+1}-a_n\geqq 0$ である．また，直線 l の傾き $\dfrac{1}{r}$ が，$\boxed{}<\dfrac{1}{r}<\boxed{}$ を満たすので，P_{n+1} と P_n の y 座標の差は 1 未満である．したがって，$a_{n+1}-a_n\leqq\boxed{}$ である．以上により，すべての n に対して $a_{n+1}-a_n=0$ または $a_{n+1}-a_n=1$ となる．

(2) $\mathrm{R}_n\neq\mathrm{Q}_n$ のとき，2 点 Q_n，R_n を通る直線の方程式と点 R_n の座標をそれぞれ r，n，a_n を用いて表せ．

(3) $a_{n+1}-a_n=0$ のとき線分 $\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}$ の長さを h_a とし，$a_{n+1}-a_n=1$ のときの線分 $\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}$ の長さを h_b とする．$\mathrm{R}_n\neq\mathrm{Q}_n$ かつ $\mathrm{R}_{n+1}\neq\mathrm{Q}_{n+1}$ のとき，h_a および h_b をそれぞれ r を用いて表せ．

(4) (3) で求めた h_a と h_b に対して，$\dfrac{h_b}{h_a}=r$ が成立するときの r の値を求めよ．

解答例

1 (1) C_1 の x 軸との共有点の x 座標は

$$ax^2 - a - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

$\alpha = -\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$，$\beta = \sqrt{\dfrac{a+1}{a}}$ とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\int_\alpha^\beta (ax^2 - a - 1)\,dx = -a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\,dx = \frac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{a+1}{a}}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}}} \end{aligned}$$

(2) $f(a) = \dfrac{(a+1)^3}{a}$ とおくと $(a > 0)$

$$f'(a) = \frac{3(a+1)^2 a - (a+1)^3}{a^2} = \frac{(2a-1)(a+1)^2}{a^2}$$

したがって，$f(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

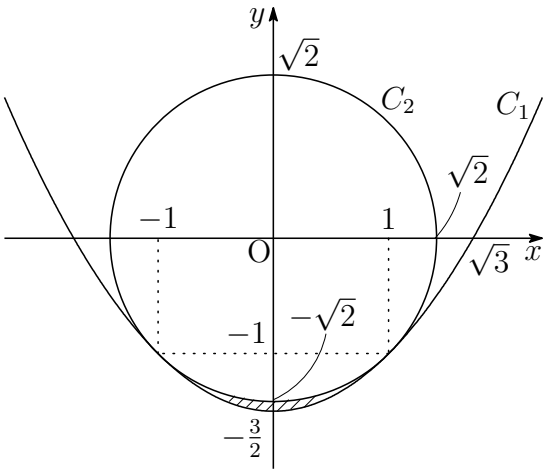
よって，S は $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$ をとる．

解説 $f(a)$ は原点と曲線 $y = (x+1)^3$ 上の点 $(a,\ (a+1)^3)$ を結ぶ直線の傾きであるから $(a > 0)$，原点からこの曲線に引いた接線の傾きを求めると $\dfrac{27}{4}$．
したがって，$f(a) \geqq \dfrac{27}{4}$．

(3) $a=\dfrac{1}{2}$ より，原点 O から C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{2}-\dfrac{3}{2}\right)$ との距離について

$$\mathrm{OP}^2=t^2+\left(\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}(t^2-1)^2+2$$

したがって，OP は $t=\pm1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる．
ゆえに，C_1 と C_2 の接点の座標は，$(\pm1,-1)$



$C_1: x^2=2y+3$，$C_2: x^2=2-y^2$ であるから，求める体積を V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}(2y+3)\,dy-\int_{-\sqrt{2}}^{-1}(2-y^2)\,dy\\&=\Big[\,y^2+3y\,\Big]_{-\frac{3}{2}}^{-1}-\Big[\,2y-\frac{y^3}{3}\,\Big]_{-\sqrt{2}}^{-1}=\frac{23}{12}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\left(\dfrac{23}{12}-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)\pi}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ より　$y_2 = b + \sqrt{3}a$

$y_2 > 0$ であるから　$b + \sqrt{3}a > 0$　これを解いて　$\boldsymbol{a > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}b}$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

ゆえに　$y_3 = 2ab + \sqrt{3}(a^2 - b^2) = (a + \sqrt{3}b)(\sqrt{3}a - b)$

$y_2 > 0$ かつ $y_3 = 0$ であるから，(1) の結果および上式より

$$a > -\frac{1}{\sqrt{3}}b \quad \text{かつ} \quad (a + \sqrt{3}b)(\sqrt{3}a - b) = 0$$

$b > 0$ より $a > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}b > -\sqrt{3}b$ であるから　$\boldsymbol{a = \dfrac{b}{\sqrt{3}}}$

(3) $\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ より　$A^7 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) の結果から

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{2b}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

ゆえに　$A^6 = \left(\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)^6\begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \left(\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)^6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b > 0$ に注意して $\left(\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\right)^6 = 8$ を解くと　$\boldsymbol{b = \sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

これを (2) の結果に代入すると　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ より　$\det A = a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2$

ここで，$X_n = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{pmatrix}$ とおくと $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$X_n = A^{n-1}X_1, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

上式より $\det X_1 = 2\sqrt{6}$ であるから

$$\det X_n = (\det A)^{n-1}\det X_1 = 2^{n-1}\cdot 2\sqrt{6} = 2^n\sqrt{6}$$

X_n から面積 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}|\det X_n| = \frac{1}{2}\left|2^n\sqrt{6}\right| = \boldsymbol{2^{n-1}\sqrt{6}}$$

■

3 (1) n 分後における赤玉 a_n 個は，$n+1$ 分後に白玉 $2a_n$ 個に変化し，n 分後における白玉 b_n 個は，$n+1$ 分後に赤玉 b_n 個と白玉 b_n 個に変化する．これに赤玉 1 個が追加されるから，$n+1$ 分後には赤玉 b_n+1 個と白玉 $2a_n+b_n$ 個になる．よって　$\boldsymbol{a_{n+1} = b_n + 1} \cdots$ ①，$\boldsymbol{b_{n+1} = 2a_n + b_n} \cdots$ ②

(2) ① より　$b_n = a_{n+1} - 1$，$b_{n+1} = a_{n+2} - 1$
これらを ② に代入すると

$$a_{n+2} - 1 = 2a_n + (a_{n+1} - 1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n}$$

(3) (2) の結果から　$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$

$c_n = a_{n+1} - a_n$ より　$c_{n+1} = -c_n$

$c_1 = a_2 - 2a_1 = 1 - 2\cdot 1 = -1$ であるから

$$c_n = c_1\cdot(-1)^{n-1} = -1\cdot(-1)^{n-1} = \boldsymbol{(-1)^n}$$

(4) (3) の結果から　$a_{n+1}-2a_n=(-1)^n$　ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$d_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より　$d_{n+1}-d_n=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$d_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} d_n &= d_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するので　$\boldsymbol{d_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(5) (4) の結果から

$$a_n=2^nd_n=2^n\times\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}}$$

① より

$$b_n=a_{n+1}-1=\frac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}-1=\boldsymbol{\frac{1}{3}\{2^{n+1}-(-1)^{n+1}-3\}}$$

解説 (2) の結果より，$\{a_n\}$ の特性方程式 $x^2-x-2=0$ の解が $2,-1$ であるから，一般項は[1]

$$a_n=p\cdot 2^n+q\cdot(-1)^n$$

となる (p，q は定数)．実際，$a_1=1$，$a_2=1$ より

$$2p-q=1,\quad 4p+q=1\quad \text{これを解いて}\quad p=\frac{1}{3},\ q=-\frac{1}{3}$$

よって　$a_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^n-\dfrac{1}{3}\cdot(-1)^n=\dfrac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf の $\boxed{4}$ の補足を参照.

$\boxed{4}$ (1) $1 < r < 2$ より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < r < 1}$

$\dfrac{n}{r} - 1 < a_n \leqq \dfrac{n}{r}$，$\dfrac{n+1}{r} - 1 < a_{n+1} \leqq \dfrac{n+1}{r}$ より

$$a_{n+1} - a_n < \frac{n+1}{r} - \left(\frac{n}{r} - 1\right) = \frac{1}{r} + 1 < 2$$

a_n，a_{n+1} は整数であるから　$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n \leqq 1}$

(2) 直線 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n$ は，点 $\mathrm{Q}_n(n,\ a_n)$ を通り，$l : y = \dfrac{1}{r}x$ に垂直であるから

$$y - a_n = -r(x - n) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -rx + a_n + r}$$

これと l を連立させて解くと　$x = \dfrac{r(a_n + nr)}{r^2 + 1}$，$y = \dfrac{a_n + nr}{r^2 + 1}$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{R}_n\left(\dfrac{r(a_n + nr)}{r^2 + 1},\ \dfrac{a_n + nr}{r^2 + 1}\right)}$

(3) (2) の結果より $\mathrm{R}_{n+1}\left(\dfrac{r(a_{n+1} + nr + r)}{r^2 + 1},\ \dfrac{a_{n+1} + nr + r}{r^2 + 1}\right)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}{}^2 &= \left\{\frac{r(a_{n+1} - a_n + r)}{r^2 + 1}\right\}^2 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n + r}{r^2 + 1}\right)^2 \\ &= \frac{(a_{n+1} - a_n + r)^2}{r^2 + 1}\end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - a_n + r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

よって　$a_{n+1} - a_n = 0$ のとき　$\boldsymbol{h_a = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}}$

$a_{n+1} - a_n = 1$ のとき　$\boldsymbol{h_b = \dfrac{r + 1}{\sqrt{r^2 + 1}}}$

(4) (3) の結果から，$\dfrac{h_b}{h_a} = r$ のとき　$\dfrac{r + 1}{r} = r$

したがって　$r^2 - r - 1 = 0$

$1 < r < 2$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{r = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ ■