

平成 18 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

情報工学部 平成 18 年 2 月 25 日

● 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 実数 a ($a > 0$) に対して曲線 $y = ax^2 - a - 1$ を C_1 とし, C_1 と x 軸によって囲まれる部分の面積を S とする. また, $y \geq ax^2 - a - 1$ を満たす領域にあり, 原点を中心とする半径最大の円を C_2 とする. 以下に答えよ.

- (1) S を a を用いて表せ.
- (2) S の最小値とそのときの a の値を求めよ.
- (3) (2) で求めた a の値に対して, C_1 と C_2 によって囲まれる部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

2 a, b は実数で, $b > 0$ とする. 2×1 行列 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ($n = 1, 2, \dots$) が

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

を満たす. 以下に答えよ.

- (1) $y_2 > 0$ を満たすような a の範囲を b を用いて表せ.
- (2) $y_2 > 0$ かつ $y_3 = 0$ となるとき, a を b を用いて表せ.
- (3) $y_2 > 0$ かつ $y_3 = 0$ となるとき,

$$\begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

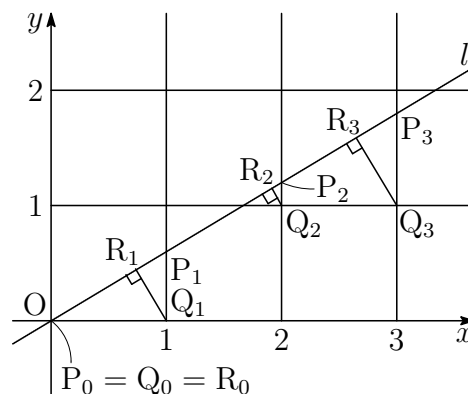
を満たす a と b を求めよ.

- (4) O を原点とする座標平面において, 座標が (x_n, y_n) である点を P_n とする. (3) で求めた a, b に対して, $\triangle OP_n P_{n+1}$ の面積を S_n とするとき, 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ.

- 3 赤玉は、装置 M の中では、1 分経過後に 2 個の白玉に変化する．白玉は、装置 M の中では、1 分経過後に 1 個の赤玉と 1 個の白玉に変化する．時刻 $t = 1$ (分) に装置 M へ赤玉を 1 個入れ、以降、1 分経過ごとに装置 M へ赤玉を 1 個追加する．時刻 $t = n$ (分) における装置 M 中の赤玉と白玉の個数をそれぞれ a_n と b_n ($n = 1, 2, \dots$) とする．このとき、時刻 $t = 3$ (分) までの赤玉と白玉の個数は、 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3, b_1 = 0, b_2 = 2, b_3 = 4$ となる．以下に答えよ．

- (1) a_{n+1} を b_n を用いて表し、 b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ．
- (2) a_{n+2}, a_{n+1}, a_n ($n = 1, 2, \dots$) が満たす関係式を求めよ．
- (3) $c_n = a_{n+1} - 2a_n$ とするとき、数列 $\{c_n\}$ の一般項が $c_n = (-1)^n$ となることを示せ．
- (4) $d_n = \frac{a_n}{2^n}$ とするとき、数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．
- (5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

- 4 r は $1 < r < 2$ を満たす実数とし、 m と n は 0 以上の整数とする．図のように、 xy 平面上の直線 $y = m$ と $x = n$ を描き、これらの直線の交点 (n, m) を格子点と呼ぶ．また、原点を通る傾き $\frac{1}{r}$ の直線 $y = \frac{1}{r}x$ を直線 l とし、直線 $x = n$ と直線 l との交点を $P_n \left(n, \frac{n}{r} \right)$ とする．直線 $x = n$ 上の格子点のうち、点 P_n のすぐ下にある格子点を $Q(n, a_n)$ とする．すなわち、 a_n は $\frac{n}{r} - 1 < a_n \leq \frac{n}{r}$ を満たす整



数である．さらに、点 Q_n から直線 l に下ろした垂線と l との交点を R_n とする．ただし、点 P_n が格子点であるときは、 $P_n = Q_n = R_n$ とする．以下に答えよ．

- (1) 次の空欄に適する数を答えよ．
すべての n に対して、 a_n は整数であり、 $a_{n+1} - a_n \geq 0$ である．また、直線 l の傾き $\frac{1}{r}$ が、 $\square < \frac{1}{r} < \square$ を満たすので、 P_{n+1} と P_n の y 座標の差は 1 未満である．したがって、 $a_{n+1} - a_n \leq \square$ である．以上により、すべての n に対して $a_{n+1} - a_n = 0$ または $a_{n+1} - a_n = 1$ となる．
- (2) $R_n \neq Q_n$ のとき、2 点 Q_n, R_n を通る直線の方程式と点 R_n の座標をそれぞれ r, n, a_n を用いて表せ．
- (3) $a_{n+1} - a_n = 0$ のとき線分 $R_n R_{n+1}$ の長さを h_a とし、 $a_{n+1} - a_n = 1$ のときの線分 $R_n R_{n+1}$ の長さを h_b とする． $R_n \neq Q_n$ かつ $R_{n+1} \neq Q_{n+1}$ のとき、 h_a および h_b をそれぞれ r を用いて表せ．
- (4) (3) で求めた h_a と h_b に対して、 $\frac{h_b}{h_a} = r$ が成立するときの r の値を求めよ．

正解

1 (1) C_1 の x 軸との共有点の x 座標は

$$ax^2 - a - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm \sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

$$\alpha = -\sqrt{\frac{a+1}{a}}, \beta = \sqrt{\frac{a+1}{a}} \quad \text{とおくと, 求める面積 } S \text{ は}$$

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\alpha}^{\beta} (ax^2 - a - 1) dx = -a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 dx = \frac{a}{6} \left(2\sqrt{\frac{a+1}{a}} \right)^3 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{(a+1)^3}{a}} \end{aligned}$$

(2) $f(a) = \frac{(a+1)^3}{a}$ とおくと ($a > 0$)

$$f'(a) = \frac{3(a+1)^2 a - (a+1)^3}{a^2} = \frac{(2a-1)(a+1)^2}{a^2}$$

したがって, $f(a)$ の増減表は, 次のようになる.

a	(0)	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		\searrow	$\frac{27}{4}$	\nearrow

よって, S は $a = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{27}{4}} = 2\sqrt{3}$ をとる.

解説 $f(a)$ は原点と曲線 $y = (x+1)^3$ 上の点 $(a, (a+1)^3)$ を結ぶ直線の傾きであるから ($a > 0$), 原点からこの曲線に引いた接線の傾きを求めると $\frac{27}{4}$.

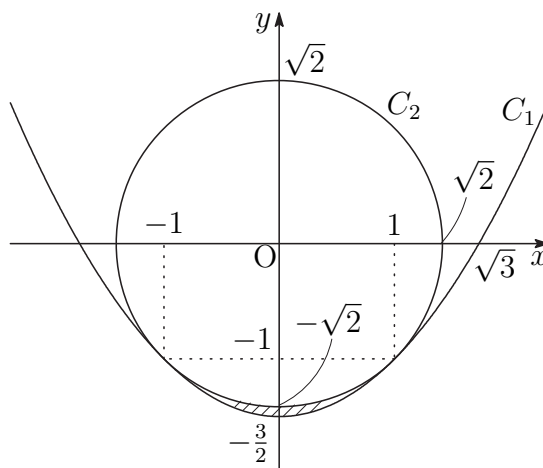
したがって, $f(a) \geq \frac{27}{4}$.

(3) $a = \frac{1}{2}$ より, 原点 O から C_1 上の点 $P\left(t, \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}\right)$ との距離について

$$OP^2 = t^2 + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(t^2 - 1)^2 + 2$$

したがって, OP は $t = \pm 1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる.

ゆえに, C_1 と C_2 の接点の座標は, $(\pm 1, -1)$



$C_1: x^2 = 2y + 3$, $C_2: x^2 = 2 - y^2$ であるから, 求める体積を V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (2y + 3) dy - \int_{-\sqrt{2}}^{-1} (2 - y^2) dy \\ &= \left[y^2 + 3y \right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} - \left[2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{-1} = \frac{23}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

よって $V = \left(\frac{23}{12} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \pi$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ より } y_2 = b + \sqrt{3}a$$

$$y_2 > 0 \text{ であるから } b + \sqrt{3}a > 0 \text{ これを解いて } a > -\frac{1}{\sqrt{3}}b$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに } y_3 = 2ab + \sqrt{3}(a^2 - b^2) = (a + \sqrt{3}b)(\sqrt{3}a - b)$$

$y_2 > 0$ かつ $y_3 = 0$ であるから, (1) の結果および上式より

$$a > -\frac{1}{\sqrt{3}}b \text{ かつ } (a + \sqrt{3}b)(\sqrt{3}a - b) = 0$$

$$b > 0 \text{ より } a > -\frac{1}{\sqrt{3}}b > -\sqrt{3}b \text{ であるから } a = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ より } A^7 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) の結果から

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{b}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに } A^6 = \left(\frac{2b}{\sqrt{3}}\right)^6 \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \left(\frac{2b}{\sqrt{3}}\right)^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b > 0 \text{ に注意して } \left(\frac{2b}{\sqrt{3}}\right)^6 = 8 \text{ を解くと } b = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\text{これを (2) の結果に代入すると } a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4) (3)の結果から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ より } \det A = a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2$$

ここで, $X_n = \begin{pmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{pmatrix}$ とおくと ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$X_n = A^{n-1} X_1, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

上式より $\det X_1 = 2\sqrt{6}$ であるから

$$\det X_n = (\det A)^{n-1} \det X_1 = 2^{n-1} \cdot 2\sqrt{6} = 2^n \sqrt{6}$$

X_n から面積 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2} |\det X_n| = \frac{1}{2} |2^n \sqrt{6}| = 2^{n-1} \sqrt{6}$$

- 3** (1) n 分後における赤玉 a_n 個は, $n+1$ 分後に白玉 $2a_n$ 個に変化し, n 分後における白玉 b_n 個は, $n+1$ 分後に赤玉 b_n 個と白玉 b_n 個に変化する. これに赤玉 1 個が追加されるから, $n+1$ 分後には赤玉 b_n+1 個と白玉 $2a_n+b_n$ 個になる. よって $a_{n+1} = b_n + 1 \cdots \textcircled{1}$, $b_{n+1} = 2a_n + b_n \cdots \textcircled{2}$

- (2) $\textcircled{1}$ より $b_n = a_{n+1} - 1$, $b_{n+1} = a_{n+2} - 1$
これらを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$a_{n+2} - 1 = 2a_n + (a_{n+1} - 1) \quad \text{よって} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

- (3) (2)の結果から $a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$

$$c_n = a_{n+1} - a_n \text{ より } c_{n+1} = -c_n$$

$$c_1 = a_2 - 2a_1 = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \text{ であるから}$$

$$c_n = c_1 \cdot (-1)^{n-1} = -1 \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$$

(4) (3)の結果から $a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n$ ゆえに $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$d_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ より } d_{n+1} - d_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$d_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから, } n \geq 2 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するので $d_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

(5) (4)の結果から

$$a_n = 2^n d_n = 2^n \times \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} = \frac{1}{3} \{ 2^n - (-1)^n \}$$

① より

$$b_n = a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3} \{ 2^{n+1} - (-1)^{n+1} \} - 1 = \frac{1}{3} \{ 2^{n+1} - (-1)^{n+1} - 3 \}$$

解説 (2)の結果より, $\{a_n\}$ の特性方程式 $x^2 - x - 2 = 0$ の解が $2, -1$ であるから, 一般項は¹

$$a_n = p \cdot 2^n + q \cdot (-1)^n$$

となる (p, q は定数). 実際, $a_1 = 1, a_2 = 1$ より

$$2p - q = 1, \quad 4p + q = 1 \quad \text{これを解いて } p = \frac{1}{3}, \quad q = -\frac{1}{3}$$

$$\text{よって } a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n - \frac{1}{3} \cdot (-1)^n = \frac{1}{3} \{ 2^n - (-1)^n \}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf の 4 の補足を参照.

$$\boxed{4} \quad (1) \quad 1 < r < 2 \text{ より } \frac{1}{2} < r < 1$$

$$\frac{n}{r} - 1 < a_n \leq \frac{n}{r}, \quad \frac{n+1}{r} - 1 < a_{n+1} \leq \frac{n+1}{r} \text{ より}$$

$$a_{n+1} - a_n < \frac{n+1}{r} - \left(\frac{n}{r} - 1\right) = \frac{1}{r} + 1 < 2$$

$$a_n, a_{n+1} \text{ は整数であるから } a_{n+1} - a_n \leq 1$$

$$(2) \quad \text{直線 } Q_n R_n \text{ は, 点 } Q_n(n, a_n) \text{ を通り, } l: y = \frac{1}{r}x \text{ に垂直であるから}$$

$$y - a_n = -r(x - n) \quad \text{すなわち } y = -rx + a_n + r$$

$$\text{これと } l \text{ を連立させて解くと } x = \frac{r(a_n + nr)}{r^2 + 1}, \quad y = \frac{a_n + nr}{r^2 + 1}$$

$$\text{よって } R_n \left(\frac{r(a_n + nr)}{r^2 + 1}, \frac{a_n + nr}{r^2 + 1} \right)$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果より } R_{n+1} \left(\frac{r(a_{n+1} + nr + r)}{r^2 + 1}, \frac{a_{n+1} + nr + r}{r^2 + 1} \right) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} R_n R_{n+1}^2 &= \left\{ \frac{r(a_{n+1} - a_n + r)}{r^2 + 1} \right\}^2 + \left(\frac{a_{n+1} - a_n + r}{r^2 + 1} \right)^2 \\ &= \frac{(a_{n+1} - a_n + r)^2}{r^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } R_n R_{n+1} = \frac{a_{n+1} - a_n + r}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$\text{よって } a_{n+1} - a_n = 0 \text{ のとき } h_a = \frac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$a_{n+1} - a_n = 1 \text{ のとき } h_b = \frac{r + 1}{\sqrt{r^2 + 1}}$$

$$(4) \quad (3) \text{ の結果から, } \frac{h_b}{h_a} = r \text{ のとき } \frac{r + 1}{r} = r$$

$$\text{したがって } r^2 - r - 1 = 0$$

$$1 < r < 2 \text{ に注意してこれを解くと } r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$