平成17年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成17年2月25日

- 数I・II・III・A・B・C. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 必答. $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から1題を選択. (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を実数とする．関数 $f_1(x) = 2x^2 - ax + \dfrac{1}{2}$，$f_2(x) = x^2 + ax - a$，$g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ について，以下に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)$ を求め，$x \geqq 0$ の範囲で $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) すべての $x \geqq 0$ に対して $f_1(g(x)) \geqq f_2(g(x))$ となる a の範囲を求めよ．

(3) $a = 1$ のとき，曲線 $y = f_1(g(x))$ と $y = f_2(g(x))$，直線 $x = 1$，y 軸によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 a $(a > 0)$ と実数 t $(t \geqq 0)$ に対して，つぎのように表される複素数 $z(t)$ を考える．

$$z(t) = \frac{1}{2 - 2t^2 - \sqrt{a}\,ti}$$

ただし，i は虚数単位とする．複素数平面上において，原点をOとし，複素数 $z(t)$ と $z(2t)$ が表す点をそれぞれA，Bとする．以下に答えよ．

(1) $z(t)$ の実部と虚部をそれぞれ a と t を用いて表せ．

(2) $a = 2$ のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ が直角となる t を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{AOB}$ が直角となる t が存在する a の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ について，以下に答えよ．ただし，E は2次の単位行列とする．

(1) $c \neq 0$ であるとき，$A^2 + 3E = 4A$ が成り立つような実数 a，b の組をすべて求めよ．

(2) $c = 0$ であるとき，$A^2 + 3E = 4A$ が成り立つような実数 a，b の組をすべて求めよ．

(3) $A^2 + 3E = 4A$ かつ $(A - 2E)^5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるような実数 a，b，c を求めよ．

(4) (3) の実数 a，b，c から定まる行列 A について，以下が成り立つような自然数 n を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n} (A - 2E)(A - kE) = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 三つの正整数 n, a, b $(a \leqq b)$ が与えられたとき，1 以上 n 以下の整数のうち $a \times i + b \times j$ (ただし i, j はともに 0 以上の整数) の形で表すことができないものの個数 S を数えたい．以下のアルゴリズムは n, a, b を入力として与えると S を計算して出力するアルゴリズムである．ただし，アルゴリズム中における記述「$X \leftarrow Y$」は，Y の値あるいは Y を実行して得られた値を X に格納することを意味する．以下に答えよ．

【アルゴリズム】

① $S \leftarrow n$ とする．
② $k \leftarrow 1$ とする．
③ $x \leftarrow k$ とする．
④ $x < 0$ なら ⑦ へ進む．
⑤ x を a で割った余りが 0 ならば $S \leftarrow S - 1$ として ⑦ へ進む．
⑥ $x \leftarrow x - b$ として ④ へ戻る．
⑦ $k = n$ ならば S を出力して停止する．
⑧ $k \leftarrow k + 1$ として ③ へ戻る．

---

(1) 下の表は，$a = 6$, $b = 11$, $n = 100$ を入力してこのアルゴリズムを実行したときに，アルゴリズムの ⑦ に到達した時点での k, x, S の値を表にしたものであり，$k = 35$ のときは $x = 24$, $S = 86$ である．k の値が 36, 37, 38, 39, 40 のそれぞれの場合の x と S の値を下の表の形で解答せよ．

k	$\cdots$	35	36	37	38	39	40	$\cdots$
x	$\cdots$	24						$\cdots$
S	$\cdots$	86						$\cdots$

(2) $n = 10$, $a = 2$ のとき，⑥ の実行回数が最も少なくなるのはどのような b が与えられたときか．また，そのときの実行回数を求めよ．

(3) $n = 10$, $a = 2$ のとき，⑥ の実行回数が最も多くなるのはどのような b が与えられたときか．

(4) a と b の最大公約数を c としたとき，$a \times i + b \times j$ の形で表すことができる数は c の倍数であることを示せ．

(5) 前問の性質を利用して，a, b が最大公約数 $c \geqq 2$ をもつとき，アルゴリズムの ③〜⑦ を実行する回数を減らすように ② と ⑧ を修正せよ．ただし，最大公約数 c も入力して与えられるものとする．

5 9枚のカードがあり，カードの表にはそれぞれ「2」「3」「4」「5」「6」「7」「8」「9」「10」の数が書かれている．また，裏にはすべて「1」が書かれている．これらのカードを投げたときに，それぞれのカードの表が上側になる確率と裏が上側になる確率は，ともに $\frac{1}{2}$ であるとする．9枚のカードすべてを同時に投げて，各カードの上側に現れた数をすべて掛けあわせた値を得点とする．以下に答えよ．

(1) 得点が8点になる確率を求めよ．

(2) 得点が偶数になる確率を求めよ．

(3) 得点が8の倍数になる確率を求めよ．

(4) 9枚のカードからある1枚のカードを取り除き，カードを8枚にした．この8枚のカードを同時に投げたときに得点が8の倍数になる確率は，(3)で求めた確率の $\frac{3}{4}$ 倍になった．取り除いたカードの表に書かれている数として考えられるものをすべて答えよ．

6 関数 $f(x)=x^2$ と実数 a，b を用いて表される関数 $g(x)=a(x-1)^2+b$ を考える．$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが異なる二つの交点をもつとする．以下に答えよ．

(1) a，b がみたすべき条件を求め，点 $(a,\ b)$ が存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

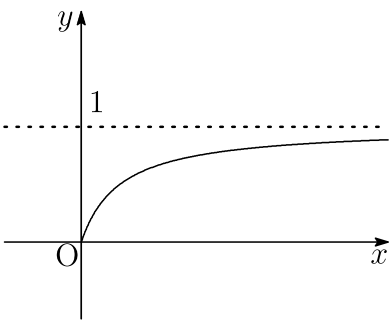
(2) 二つの交点の x 座標をそれぞれ α，β とするとき，$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ を求めよ．

(3) 二つの交点を通る直線の方程式を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$g(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ のグラフの概形は右のようになる.



また $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to\infty} g(x) = 1}$

(2) $t = g(x)$ とおくと，(1) の結果から，$x \geqq 0$ のとき　$0 \leqq t \leqq 1$

ここで，$h(t) = f_1(t) - f_2(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t^2 - at + \frac{1}{2}a - (t^2 + at - a) \\ &= t^2 - 2at + \frac{3}{2}a = (t-a)^2 + \frac{3}{2}a - a^2 \end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq 1$ における $h(t)$ の最小値が 0 以上であればよい.

(i) $a < 0$ のとき，最小値 $h(0) = \dfrac{3}{2}a < 0$ となり，不適.

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，最小値 $h(a) = \dfrac{3}{2}a - a^2$

ゆえに　$\dfrac{3}{2}a - a^2 \geqq 0$　すなわち　$a\left(a - \dfrac{3}{2}\right) \leqq 0$

a の値の範囲に注意して，これを解くと　$0 \leqq a \leqq 1$

(iii) $1 < a$ のとき，最小値 $h(1) = 1 - \dfrac{a}{2}$　ゆえに　$1 - \dfrac{a}{2} \geqq 0$

a の値の範囲に注意して，これを解くと　$1 < a \leqq 2$

(i)〜(iii) から，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{0 \leqq a \leqq 2}$

(3) (2) の結果から，$a = 1$ のとき，$f_1(t) - f_2(t) = (t-1)^2 + \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} f_1(g(x)) - f_2(g(x)) &= \{g(x) - 1\}^2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{x}{x+1} - 1\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_0^1 \left\{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\right\} dx = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \mathbf{1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $z(t) = \dfrac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}ti} = \dfrac{2-2t^2+\sqrt{a}ti}{(2-2t^2)^2+at^2} = \dfrac{2-2t^2+\sqrt{a}ti}{4t^4+(a-8)t^2+4}$

よって，$z(t)$ の実部は $\boldsymbol{\dfrac{2-2t^2}{4t^4+(a-8)t^2+4}}$，

虚部は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}\,t}{4t^4+(a-8)t^2+4}}$

(2) $z(t) = \dfrac{1}{2-2t^2-\sqrt{a}ti}$，$z(2t) = \dfrac{1}{2(1-4t^2-\sqrt{a}ti)}$ より

$$\begin{aligned}\frac{z(2t)}{z(t)} &= \frac{2-2t^2-\sqrt{a}ti}{2(1-4t^2-\sqrt{a}ti)} = \frac{(2-2t^2-\sqrt{a}ti)(2-4t^2+\sqrt{a}ti)}{2\{(1-4t^2)^2+at^2\}} \\ &= \frac{8t^4+(a-10)t^2+2+\sqrt{a}t(2t^2+1)i}{2\{16t^4+(a-8)t^2+1\}} \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

$a=2$ のとき $\dfrac{z(2t)}{z(t)} = \dfrac{2(2t^2-1)^2+\sqrt{2}t(2t^2+1)i}{16t^4-6t^2+1}$

$\angle$AOB が直角であるとき，$\dfrac{z(2t)}{z(t)}$ は純虚数であるから

$$2(2t^2-1)^2=0,\quad \sqrt{2}t(t^2+1)\neq 0$$

$t \geqq 0$ に注意してこれを解くと $\boldsymbol{t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\angle$AOB が直角であるとき，$\dfrac{z(2t)}{z(t)}$ は純虚数であるから，$(*)$ より次式をみたす $t \geqq 0$ が存在すればよい $(a>0)$.

$$8t^4+(a-10)t^2+2=0,\quad \sqrt{a}t(2t^2+1)\neq 0$$

第 1 式から $t\neq 0$ であるから，このとき第 2 式をみたす．したがって

$$8t^4+(a-10)t^2+2=0$$

をみたす t が存在する a の値の範囲を求めればよい.
ここで，$x=t^2$ とおくと $(x>0)$，2 次方程式

$$8x^2+(a-10)x+2=0 \quad \cdots(**)$$

が正の解をもつような a の値の範囲を求めればよい.
2 次方程式 $(**)$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha\beta=\frac{2}{8}>0 \quad \text{このとき} \quad \alpha>0,\ \beta>0$$

ゆえに　$\alpha+\beta=-\dfrac{a-10}{8}>0$　すなわち　$a<10 \quad \cdots$①

$(**)$ の解は実数解であるから $D\geqq 0$ より

$$(a-10)^2-4\cdot 8\cdot 2=(a-2)(a-18)\geqq 0$$

ゆえに　$a\leqq 2,\ 18\leqq a \quad \cdots$②

よって，①，② および $a>0$ により　$\boldsymbol{0<a\leqq 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 条件式から　$A^2-4A+3E=O$ $\cdots$①

A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2-(a+b)A+abE=O$$

上の 2 式から　$(a+b-4)A=(ab-3)E$ $\cdots$②

$a+b-4\neq 0$ のとき，A は E の実数倍となり，A の (1,2) 成分 $c\neq 0$ に反する．ゆえに　$a+b-4=0,\quad ab-3=0$

これを解いて　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)}$

(2) ② から

$a+b-4\neq 0$ のとき，A の (1,2) 成分 $c=0$ に注意して，A は E の実数倍となるので，$A=kE$ (k は実数) とおく．これを $(*)$ に代入して

$$(k^2-4k+3)E=O \quad \text{ゆえに} \quad k=1,\ 3$$

このとき，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (3,\ 3)$

$a+b-4=0$ のとき，(1) と同様にして，$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$ を得る．

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 1),\ (3,\ 3),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)}$

(3) $A^2-4A+3E=O$ より，$(A-2E)^2=E$ であるから

$$(A-2E)^5=(A-2E)\{(A-2E)^2\}^2=A-2E$$

ゆえに　$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$　これを解いて　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

よって　$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=2}$

(4) 条件式から，$A^2-4A+3E=O$ であるから

$$\begin{aligned}(A-2E)(A-kE)&=A^2-(k+2)A+2kE\\&=(A^2-4A+3E)+(2-k)A+(2k-3)E\\&=(2-k)A+(2k-3)E\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(A-2E)(A-kE)&=\sum_{k=1}^{n}\{(2-k)A+(2k-3)E\}\\&=\frac{n}{2}\{1+(2-n)\}A+\frac{n}{2}\{-1+(2n-3)\}E\\&=\frac{n(3-n)}{2}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}+n(n-2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\frac{n}{2}\begin{pmatrix}n-1&6-2n\\0&5-n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

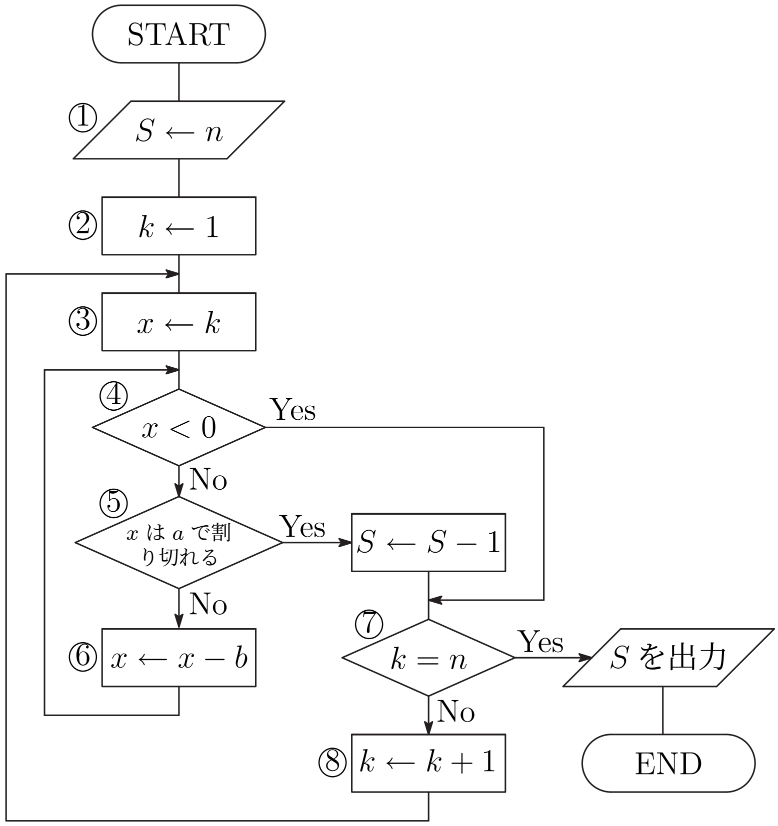
したがって，次式を満たす n を求めればよい．

$$\frac{n}{2}\begin{pmatrix}n-1&6-2n\\0&5-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-10\\0&0\end{pmatrix}\quad\cdots ③$$

両辺の (2,2) 成分から　　$n=5$

これは ③ を満たす．よって　　$\boldsymbol{n=5}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 与えられたアルゴリズムをフローチャートで示すと次のようになる．



⑦ の x は，④ の x に等しいことに注意して，変数遷移表を作成すると

⑧ k	④ x	S	
		86	
36	36	85	⑦
37	37		
	26		
	15		
	4		
	-7		⑦

⑧ k	④ x	S	
38	38		
	27		
	16		
	5		
	-6		⑦

⑧ k	④ x	S	
39	39		
	28		
	17		
	6	84	⑦
40	40		
	29		
	18	83	⑦

したがって

k	$\cdots$	35	36	37	38	39	40	$\cdots$
x	$\cdots$	24	**36**	**−7**	**−6**	**6**	**18**	$\cdots$
S	$\cdots$	86	**85**	**85**	**85**	**84**	**83**	$\cdots$

(2) ⑥ が実行されるのは，x が奇数のときである．

(i) 10 以上の整数 b のとき，5 回

(ii) $b = 3,\ 5,\ 7,\ 9$ のとき，5 回

(iii) $b = 2$ のとき，15 回

(iv) $b = 4$ のとき，9 回

(v) $b = 6$ のとき，7 回

(vi) $b = 8$ のとき，6 回

よって，整数 b が **3，5，7 または 9 以上の整数** のとき，**5 回**

(3) $\boldsymbol{b = 2}$ のとき実行回数は，次の **15 回**である．

k	③ x	⑥ x
1	1	-1
3	3	1
		-1
5	5	3
		1
		-1

k	③ x	⑥ x
7	7	5
		3
		1
		-1

k	③ x	⑥ x
9	9	7
		5
		3
		1
		-1

(4) a と b の最大公約数が c であるから

$$a = ca', \quad b = cb' \quad (a',\ b' \text{は整数})$$

とおくと

$$\begin{aligned} a \times i + b \times j &= ca' \times i + cb' \times j \\ &= c(a'i + b'j) \end{aligned}$$

よって，$a \times i + b \times j$ は c の倍数である．

(5) (4) の結果から，k が c の倍数についてのみ実行すればよい．
したがって，次のように修正すればよい．

② を「$\boldsymbol{k \leftarrow c}$」
⑧ を「$\boldsymbol{k \leftarrow k + c}$」

注意 (5) の n は c の倍数であることを前提にしている．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 得点が 8 点になるのは，次の (i)，(ii) である．

(i) 「8」のカードが表で，他の 8 枚のカードはすべて裏

(ii) 「2」,「4」のカードが表で，他の 7 枚のカードはすべて裏

よって，求める確率は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^8} = \mathbf{\frac{1}{256}}$$

(2) 得点が奇数になるのは，偶数のカード「2」,「4」,「6」,「8」,「10」の 5 枚のカードすべてが裏になる確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{31}{32}}$$

(3) 得点が,「8」の倍数になる確率を，次の (i)〜(iii) の場合に分けて求める．

(i) 「8」が表であるとき

$$\frac{1}{2}$$

(ii) 「8」が裏で,「4」が表であるとき,

「2」「6」「10」の少なくとも 1 枚は表であるから

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{7}{32}$$

(iii) 「8」,「4」が裏であるとき,

「2」,「6」,「10」の 3 枚がすべて表であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

(i)〜(iii) は，互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{32} + \frac{1}{32} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

(4) 奇数のカードを取り除いても元の確率に等しいから，取り除いたカードは,「2」,「4」,「6」,「8」,「10」のいずれかである．

(i) 「2」,「6」,「10」のいずれか1枚を取り除いたとき，8の倍数になる確率は，(3) と同様にして

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{11}{16}$$

(ii) 「4」を取り除いたとき，8の倍数になる確率は，(3) と同様にして

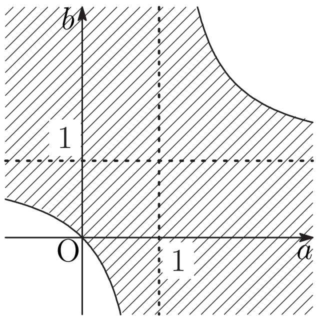
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{9}{16}$$

(iii) 「4」を取り除いたとき，8の倍数になる確率は，(3) と同様にして

$$\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$$

よって，取り除いたカードの表に書かれている数は「**4**」

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y=x^2$ と $y=a(x-1)^2+b$ から y を消去して整理すると



$$(a-1)x^2-2ax+a+b=0 \quad (*)$$

この2次方程式は異なる2つの実数解をもつから

$$a-1\neq 0,\quad (-a)^2-(a-1)(a+b)>0$$

ゆえに $\begin{cases} a\neq 1 \\ (a-1)(b-1)<1 \end{cases}$ 　よって $\begin{cases} \boldsymbol{b<\dfrac{1}{a-1}+1\quad (a>1)} \\ \boldsymbol{b>\dfrac{1}{a-1}+1\quad (a<1)} \end{cases}$

点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線と直線 $a=1$ は除く．

(2) $(*)$ の解と係数の関係により $\quad\boldsymbol{\alpha+\beta=\dfrac{2a}{a-1},\quad \alpha\beta=\dfrac{a+b}{a-1}}$

(3) 2つの交点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ を通る直線は

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

これに (3) の結果を代入して $\quad\boldsymbol{y=\dfrac{2a}{a-1}x-\dfrac{a+b}{a-1}}$