平成16年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成16年2月25日

- 数I・II・III・A・B・C. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 必答. $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から1題を選択. (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ について，以下に答えよ.

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減，極値および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け.

(2) $a > 0$ として，$S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ とする．$S(2a) = 2S(a)$ となる a の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ から出発した動点Pが，次のように定義される点の列 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$，$\cdots$ の上をこの順番で限りなく移動していく.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ とする．以下に答えよ.

(1) $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} + \gamma = \beta(x_n + \alpha y_n + \gamma)$ が成り立つような定数 α，β，γ を2組求めよ.

(2) (1) で求めた2組の $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ を $(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)$ および $(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2)$ $\alpha_1 < \alpha_2$ とする．数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

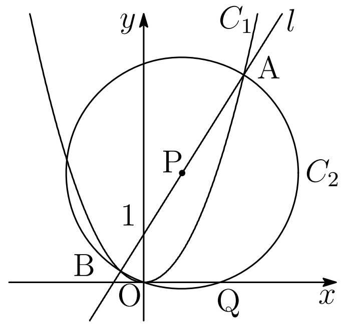
$$a_n = x_n + \alpha_1 y_n + \gamma_1$$
$$b_n = x_n + \alpha_2 y_n + \gamma_2$$

によって定めるとき，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ x_0，y_0 および n を用いて表せ.

(3) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項を，それぞれ x_0，y_0 および n を用いて表せ.

(4) 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ が直線 $y = \dfrac{1}{2}(x+3)$ の上にあるとき，動点Pが限りなく近づいていく点の座標を求めよ.

3 点 (0, 1) を通る傾き m の直線 l と放物線 $C_1 : y = x^2$ との交点を A，B とする．ただし，$m > 0$ とし，点 A は x 座標の値が正となる交点とする．さらに，線分 AB の中点を P とし，点 P を中心とし線分 AB を直径とする円を C_2 とする．以下に答えよ．



[$m = 1.6$ の場合の参考図]

(1) 点 A，B，P の座標を m を用いて表せ．

(2) 円 C_2 は原点 O を通ることを示せ．

(3) 円 C_2 と x 軸の交点のうち，原点以外の交点を Q とする．直線 l の傾き m が $m > 0$ の範囲を動くとき，△OBQ の面積を最大とする m の値と，△OBQ の面積の最大値を求めよ．

4 奇数個の相異なる数値データ $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が与えられたとき，そのメジアン (中央値) を出力することを意図して，以下のようなアルゴリズムを考えた．メジアンとは，与えられた数値データを大きさの順に並べたときに，全体の中央にくる値のことであり，例えば下の設問 (1) に与えられている $a_1 = 9$，$a_2 = 6$，$a_3 = 8$，$a_4 = 4$，$a_5 = 1$ の場合，そのメジアンは 6 である．ただし，アルゴリズム中における記述「$X \leftarrow Y$」は，Y の値あるいは Y を実行して得られた値を変数 X に格納することを意味する．

---

① $i \leftarrow 1$，$L \leftarrow \dfrac{n-1}{2}$ とする．

② $j = n$ ならば a_i を出力して停止する．

③ $j \leftarrow i + 1$，$K \leftarrow 0$ とする．

④ $j > n$ ならば ⑦ へ進む．

⑤ $a_i > a_j$ ならば $K \leftarrow K + 1$ とする．

⑥ $j \leftarrow j + 1$ として ④ へ戻る．

⑦ $K = L$ ならば a_i を出力して停止する．

⑧ $K < L$ ならば $L \leftarrow L - 1$ とする．

⑨ $i \leftarrow i + 1$ として ② へ戻る．

以下に答えよ．

(1) $n=5$ で a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 が以下のように与えられた場合について，アルゴリズムが停止するまで，ステップ ⑤ を実行した直後の各変数 i，j，K，L の値がどのように変化するか，下の形で解答せよ．

数値データ

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
9	6	8	4	1

i								$\cdots$
j								
K								
L								

(2) ステップ ⑤ で実行されるデータの比較 $(a_i > a_j)$ の回数が最小になるのは，どのようなデータが与えられたときか，$n=5$ の場合に具体的例を挙げて説明せよ．

(3) ステップ ⑤ で実行されるデータの比較 $(a_i > a_j)$ の回数が最大になるのは，どのようなデータが与えたときか，$n=5$ の場合に具体例を挙げて説明せよ．

(4) 一般に，与えられた a_1，a_2，$\cdots$，a_n の中の k 番目の要素 a_k $(1 \leqq k \leqq n)$ がメジアンになっている場合，ステップ ⑤ におけるデータの比較 $(a_i > a_j)$ は何回実行されるか，実行回数を n と k を用いて表せ．

5 それぞれのカードに 1 から 25 までの相異なる数字が一つずつ書かれた 25 枚のカードが箱に入っている．箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出し，また箱に戻すという操作を 32 回繰り返す．以下に答えよ．

(1) 1 回の操作で取り出した 3 枚のカードの中に数字 13 が書かれたカードが含まれている確率を求めよ．

(2) 32 回の操作が終わった時点において，数字 13 が書かれたカードが出た回数が k である確率 q_k を k を用いて表せ．

(3) (2) で求めた確率 q_k について $\dfrac{q_k}{q_{k-1}}$ を k を用いて表せ．

(4) (2) で求めた確率 q_k が最大となる k を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ r を $r>1$ を満たす実数とする．複素数平面上で複素数 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき，複素数 $w=z-\dfrac{1}{z}$ が描く軌跡を E とする．また，複素数平面上で円 $C:|z-6i|=2r$ を考える．ただし，i は虚数単位とする．以下に答えよ．

(1) 軌跡 E はどのような図形になるか，複素数平面上に図示せよ．

(2) 軌跡 E 上にある任意の 2 点間の距離の最大値を $l(r)$，円 C の直径を $m(r)$ として以下を示せ．

(i) $l(r)$ は r の増加関数である．

(ii) $m(r)$ はつねに $l(r)$ より大きく，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}(m(r)-l(r))=\infty$ となる．

(iii) $m(r)$ の導関数 $\dfrac{d}{dr}m(r)$ は，$l(r)$ の導関数 $\dfrac{d}{dr}l(r)$ より大きい．

(3) 軌跡 E と円 C が共有点をもつような r の値の範囲は $\boxed{} \leqq r \leqq \boxed{}$ である．この $\boxed{}$ に入る数を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

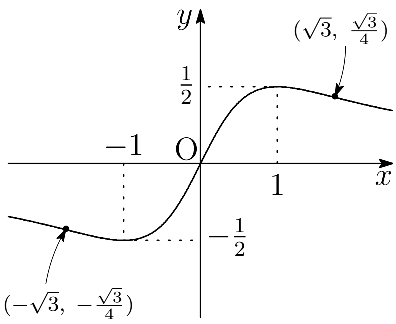
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘

極大値 $f(1)=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，極小値 $f(-1)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$，

変曲点は $\boldsymbol{\left(\pm\sqrt{3},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}$ **(複号同順)**

グラフの概形は，右のようになる．



(2) $S(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx=\left[\,\frac{1}{2}\log(x^2+1)\,\right]_0^a=\frac{1}{2}\log(a^2+1)$

$S(2a)=2S(a)$ より　　$\dfrac{1}{2}\log(1+4a^2)=2\cdot\dfrac{1}{2}\log(1+a^2)$

ゆえに　$\log(1+4a^2)=\log(1+a^2)^2$　　したがって　$1+4a^2=(1+a^2)^2$

整理すると　$a^2(a^2-2)=0$　　$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 条件式から $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

ゆえに $x_{n+1} = x_n - y_n + 3$，$y_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{3}{2}y_n$

これを $x_{n+1} + \alpha y_{n+1} + \gamma = \beta(x_n + \alpha y_n + \gamma) \cdots$ ① に代入すると

$$\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)x_n + \left(-1 + \frac{3}{2}\alpha\right)y_n + \gamma + 3 = \beta x_n + \alpha\beta y_n + \beta\gamma$$

したがって $1 - \dfrac{\alpha}{2} = \beta,\quad -1 + \dfrac{3}{2}\alpha = \alpha\beta,\quad \gamma + 3 = \beta\gamma$

これを解いて $\boldsymbol{(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (-2,\ 2,\ 3),\ \left(1,\ \frac{1}{2},\ -6\right)}$

(2) $\alpha_1 < \alpha_2$ より

$$(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) = (-2,\ 2,\ 3),\ (\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ -6\right)$$

したがって，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は

$$a_n = x_n - 2y_n + 3,\quad b_n = x_n + y_n - 6,$$
$$a_0 = x_0 - 2y_0 + 3,\quad b_0 = x_0 + y_0 - 6$$

また，① より，$a_{n+1} = 2a_n$，$b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n$ であるから

$$\boldsymbol{a_n = (x_0 - 2y_0 + 3)2^n,\ b_n = (x_0 + y_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(3) (2) の結果から

$$x_n - 2y_n + 3 = (x_0 - 2y_0 + 3)2^n$$
$$x_n + y_n - 6 = (x_0 + y_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

上の 2 式から

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1}{3}\left\{(x_0 - 2y_0 + 3)2^n + 2(x_0 + y_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} + 3}$$
$$\boldsymbol{y_n = \frac{1}{3}\left\{-(x_0 - 2y_0 + 3)2^n + (x_0 + y_0 - 6)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} + 3}$$

(4) $y_0 = \dfrac{1}{2}(x_0+3)$ より　$x_0 - 2y_0 + 3 = 0$

これを (3) の結果に代入すると

$$x_n = \frac{2}{3}(x_0+y_0-6)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$$
$$y_n = \frac{1}{3}(x_0+y_0-6)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_0+y_0-6)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ であるから，点 P は点 **(3, 3)** に近づく.

解説 補助方程式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{を解くと}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

これと条件式により　$\begin{pmatrix} x_{n+1}-3 \\ y_{n+1}-3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n-3 \\ y_n-3 \end{pmatrix}$

したがって　$\begin{pmatrix} x_n-3 \\ y_n-3 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0-3 \\ y_0-3 \end{pmatrix}$　$\cdots(*)$

A^n を求めると　$A^n = \dfrac{2^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \dfrac{2^{-n}}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　$\cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ から

$$x_n - 3 = \frac{1}{3}\left\{(x_0-2y_0+3)2^n + 2(x_0+y_0-6)2^{-n}\right\}$$
$$y_n - 3 = \frac{1}{3}\left\{-(x_0-2y_0+3)2^n + (x_0+y_0-6)2^{-n}\right\}$$

これから，動点 P の極限値を求めるが，(4) で動点 P が限りなく近づいていく点とあるから，この点の座標を $(x,\ y)$ とすると $n\to\infty$ のとき $x_n = x_{n+1} = x$，$y_n = y_{n+1} = y$ である．したがって，求める点は，補助方程式の解である.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C_1 : y = x^2$，$l : y = mx + 1$ から，y を消去すると

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}$$

(A の x 座標)>(B の x 座標) であるから

$$\mathrm{A}\left(\boldsymbol{\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2},\ \frac{m^2+2+m\sqrt{m^2+4}}{2}}\right),$$

$$\mathrm{B}\left(\boldsymbol{\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2},\ \frac{m^2+2-m\sqrt{m^2+4}}{2}}\right)$$

P は AB の中点であるから　$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{m}{2},\ \frac{m^2+2}{2}}\right)$

(2) (1) の結果から

$$\mathrm{AB}^2 = (\sqrt{m^2+4})^2 + (m\sqrt{m^2+4})^2 = (m^2+1)(m^2+4)$$

$$\mathrm{OP}^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m^2+2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(m^2+1)(m^2+4)$$

$\mathrm{OP}^2 = \dfrac{1}{4}\mathrm{AB}^2$ より　$\mathrm{OP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$　よって，O は C_2 上の点である．

(3) P は OQ の垂直二等分線にあるから，Q の x 座標は　$2 \times \dfrac{m}{2} = m$

B の y 座標および Q の x 座標から，△OBQ の面積の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}m \times \frac{m^2+2-m\sqrt{m^2+4}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(m^3+2m-m^2\sqrt{m^2+4}) \\ \frac{dS}{dm} &= \frac{1}{4}\left(3m^2+2-2m\sqrt{m^2+4} - \frac{m^3}{\sqrt{m^2+4}}\right) \\ &= \frac{(3m^2+2)\sqrt{m^2+4}-(3m^3+8m)}{4\sqrt{m^2+4}} \end{aligned}$$

ここで　$p = (3m^2+2)\sqrt{m^2+4} - (3m^3+8m)$,

$q = (3m^2+2)\sqrt{m^2+4} + (3m^3+8m) > 0$

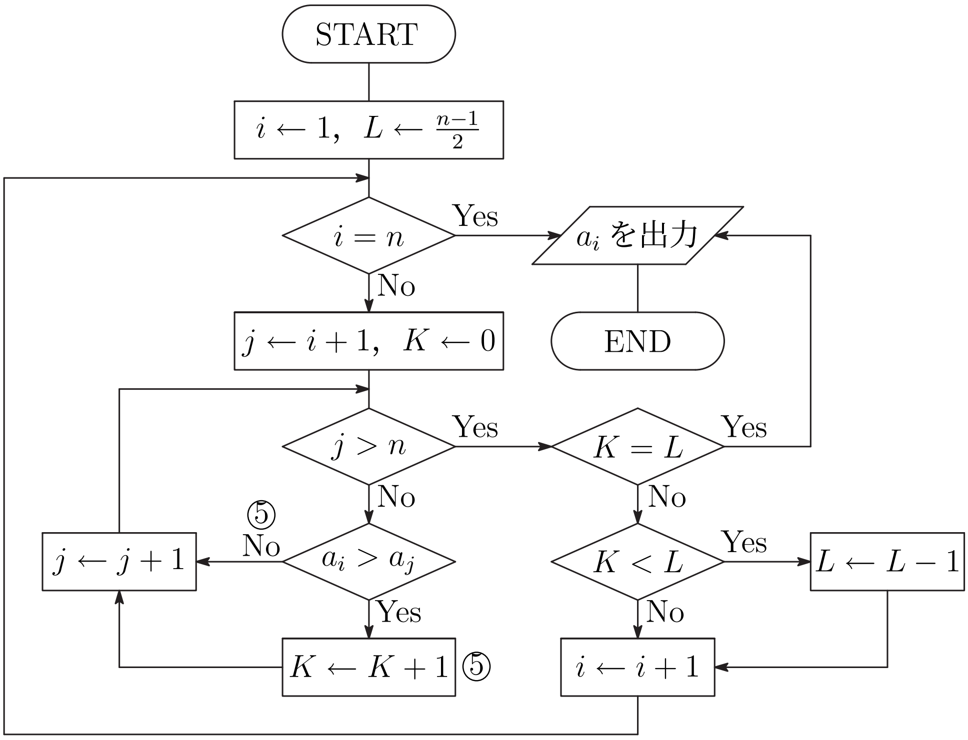
とおくと　$pq = (3m^2+2)^2(m^2+4) - (3m^3+8m)^2 = 4(4-3m^2)$

ゆえに　$\dfrac{dS}{dm} = \dfrac{p}{4\sqrt{m^2+4}} = \dfrac{4-3m^2}{q\sqrt{m^2+4}}$

m	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$\frac{dS}{dm}$		$+$	0	$-$
S		↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘

よって　$\boldsymbol{m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 与えられたアルゴリズムをフローチャートで示すと次のようになる．



⑤ を実行した直後の変数の中で K は，K が $+1$ される場合と不変な場合があることに注意して，変数遷移表を作成すると，次のようになる．

i	1	1	1	1	2	2	2
j	2	3	4	5	3	4	5
K	1	2	3	4	0	1	2
L	2	2	2	2	2	2	2

(2) メジアンを a_1 から順に探していくアルゴリズムであるから，$\boldsymbol{a_1 = 6}$ のとき，データの比較 $(a_i > a_j)$ の回数が最小となり，その回数は 4 回である．具体例の 1 つは次のようになる．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
6	1	4	8	9

(3) $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ に対するデータの比較 $(a_i > a_j)$ の回数は，それぞれ 4, 3，2，1，0 回であるから，**$\boldsymbol{a_4}$ または $\boldsymbol{a_5}$ がメジアンの値である**ときである．具体例の 1 つは次のようになる．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	4	8	9	6

(4) a_k がメジアンであるとき，$i=1,2,\cdots,k$ に対するデータの比較 $(a_i > a_j)$ の回数は，それぞれ $n-1$, $n-2,\cdots$, $n-k$ 回である．したがって，求める実行回数は

$$\sum_{l=1}^{k}(n-l) = nk - \frac{1}{2}k(k+1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}k(2n-k-1)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{{}_{24}\mathrm{C}_2}{{}_{25}\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\dfrac{3}{25}}$

(2) $\boldsymbol{q_k = {}_{32}\mathrm{C}_k\left(\frac{3}{25}\right)^k\left(\frac{22}{25}\right)^{32-k}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{{}_{32}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{3}{25}\right)^k\left(\dfrac{22}{25}\right)^{32-k}}{{}_{32}\mathrm{C}_{k-1}\left(\dfrac{3}{25}\right)^{k-1}\left(\dfrac{22}{25}\right)^{33-k}} = \frac{{}_{32}\mathrm{C}_k\cdot\dfrac{3}{25}}{{}_{32}\mathrm{C}_{k-1}\cdot\dfrac{22}{25}}$$
$$= \frac{32!}{k!(32-k)!} \times \frac{(k-1)!(33-k)!}{32!} \times \frac{3}{22} = \boldsymbol{\frac{3(33-k)}{22k}}$$

(4) (2) の結果から

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} - 1 = \frac{3(33-k)}{22k} - 1 = \frac{99-25k}{22k}$$

$1 \leqq k \leqq 3$ のとき　$\dfrac{q_k}{q_{k-1}} - 1 > 0$　すなわち　$q_{k-1} < q_k$

$4 \leqq k \leqq 32$ のとき　$\dfrac{q_k}{q_{k-1}} - 1 < 0$　すなわち　$q_{k-1} > q_k$

したがって　$q_1 < q_2 < q_3 > q_4 > q_5 > \cdots > q_{32}$

よって　$\boldsymbol{k=3}$ のとき最大

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと $(r > 1)$

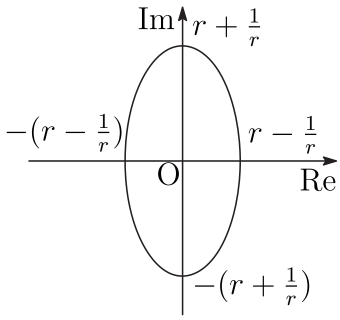
$$\begin{aligned} w = z - \frac{1}{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

$w = x + yi$ とおくと

$$x = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad y = \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

ゆえに $\qquad \dfrac{x^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} = 1$

よって，軌跡 E の表す図形は右図の楕円.



(2) E の長軸上の 2 点 $\pm\left(r + \frac{1}{r}\right)i$ を直径の両端とする円とする円を考えると，E 上のすべての点は，この円の周および内部にあるから，E 上にある任意の 2 点間の距離の最大値は $2\left(r + \frac{1}{r}\right)$．ゆえに，$l(r) = 2\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$，$m(r) = 4r$

(i) $\dfrac{d}{dr}l(r) = 2\left(1 - \dfrac{1}{r^2}\right)$ であるから，$r > 1$ より，$\dfrac{d}{dr}l(r) > 0$

よって，$l(r)$ は，増加関数である.

(ii) $m(r) - l(r) = 2\left(r - \dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{2(r^2-1)}{r}$

$r > 1$ より $\quad m(r) - l(r) > 0 \quad$ ゆえに $\quad m(r) > l(r)$

よって，$m(r)$ はつねに $l(r)$ より大きい.

また $\quad \displaystyle\lim_{r\to\infty}(m(r) - l(r)) = \lim_{r\to\infty} 2\left(r - \frac{1}{r}\right) = \infty$

(iii) $\dfrac{d}{dr}m(r) - \dfrac{d}{dr}l(r) = \dfrac{d}{dr}(m(r) - l(r)) = 2\left(1 + \dfrac{1}{r^2}\right) > 0$

よって $\qquad \dfrac{d}{dr}m(r) > \dfrac{d}{dr}l(r)$

(3) 円 C の虚軸との交点の 1 つ $(6 - 2r)i$ が楕円 E の周または内部にあればよいので $(r > 1)$

$$-\left(r + \frac{1}{r}\right) \leqq 6 - 2r \leqq r + \frac{1}{r} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} r^2 - 6r - 1 \leqq 0 \\ 3r^2 - 6r + 1 \geqq 0 \end{cases}$$

$r > 1$ に注意してこれを解くと $\quad \boldsymbol{\dfrac{3 + \sqrt{6}}{3} \leqq r \leqq 3 + \sqrt{10}}$