平成 15 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 15 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C.　$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ 必答.　$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から 1 題を選択.（120 分）

$\boxed{\mathbf{1}}$ 底面が半径 2m の円で高さが 2m の円筒形の水槽の中央に，半径 1m の鉄製の球が置かれている．この水槽に毎秒 $a\,\mathrm{m}^3$ の割合で水を注ぎ入れる．以下に答えよ．

(1) この水槽に貯えられる水の最大量を求めよ．

(2) 水面の高さが $h\,\mathrm{m}$ $(0 \leqq h \leqq 2)$ になったとき，水槽に貯えられている水量 V を h を用いて表せ．

(3) 水面の高さが $h\,\mathrm{m}$ $(0 < h < 2)$ になったときの水面の上昇速度 $v(h)$ を a と h を用いて表せ．

(4) 水面の上昇速度の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a，b，c，d，p，q，r，s を実数として，行列 $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$J = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が $H^2 = E$，$J^2 = -E$ を満たすものとする．ただし，$a + d \neq 0$ で，E は単位行列を表す．以下に答えよ．

(1) a，b，c，d の値を求めよ．

(2) r，s を p，q を用いて表せ．

(3) 行列 X が実数 u，v を用いて $X = uH + vJ$ と表されるものとする．行列 Y は実数 x，y を用いて $Y = xH + yJ$ と表され，$XY = YX = E$ であるとき，行列 Y を u，v を用いて表せ．ただし，$u \neq 0$ または $v \neq 0$ とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数平面上において，3 つの複素数 z，u，w を表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(u)$，$\mathrm{R}(w)$ とする．以下に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 点 $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$u = \dfrac{z + (1 - i)}{2}$ で表される点 $\mathrm{Q}(u)$ が描く図形を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$w = \dfrac{4\{z - (1 + i)\}}{z - (2 + i)}$ で表される点 $\mathrm{R}(w)$ が描く図形を求めよ．ただし $r \neq 1$ とする．

$\boxed{4}$ 入力として3以上の正の奇数nが与えられたとき，それが素数であるかどうかを判定するアルゴリズムを考える．

次の二つのアルゴリズムは，いずれも，nが素数の場合は「nは素数である」と出力して停止し，nが素数でない場合は「nは素数でない」と出力し，その根拠として$n = ab$となる整数a, b $(a \geqq b > 1)$を出力して停止することを意図している．

ただし，アルゴリズム中における記述「$X \leftarrow Y$」は，Yを実行して得られた値をXに格納することを意味し，$[x]$はxを超えない最大の整数を表すものとする．

アルゴリズム**1**

① $x \leftarrow 3$とする．
② $x > [\sqrt{n}]$ならば,「nは素数である」と出力して停止する．
③ $y \leftarrow \dfrac{n}{x}$とする．
④ yが整数であるならば，$a \leftarrow \dfrac{n}{x}$，$b \leftarrow x$とした後,「$n$は素数でない」および$a$と$b$の値を出力して停止する．
⑤ xの値を2増やす．
⑥ ②にもどる．

アルゴリズム**2**

① $x \leftarrow [\sqrt{n}]$とする．
② $n = x^2$ならば，$a \leftarrow x$，$b \leftarrow x$とした後,「nは素数でない」およびaとbの値を出力して停止する．
③ xの値を1増やす．
④ $x = \dfrac{n+1}{2}$ならば,「nは素数である」と出力して停止する．
⑤ $y \leftarrow \sqrt{x^2 - n}$とする．
⑥ yが整数であるならば，$a \leftarrow x + y$，$b \leftarrow x - y$とした後,「nは素数でない」およびaとbの値を出力して停止する．
⑦ ③へもどる．

以下に答えよ．

(1) $n = 161$ のとき，アルゴリズム 1 の ③ における x と y の値の変化，および，アルゴリズム 2 の ⑤ における x と y の値の変化を以下の表の形で解答せよ．

アルゴリズム 1

x						$\cdots$
y						$\cdots$

アルゴリズム 2

x						$\cdots$
y						$\cdots$

(2) 以下の表の整数 n が入力として与えられたとき，アルゴリズム 1 の ③ の実行回数とアルゴリズム 2 の ⑤ の実行回数を以下の表の形で解答せよ．ただし，実行回数が 5 回を越えるときは回数の変わりに $*$ マークを記入せよ．

n	115	117	119	121	123
アルゴリズム 1 の ③ の実行回数					
アルゴリズム 2 の ⑤ の実行回数					

5 はじめに，袋 A には赤玉が 1 個と白玉が 2 個，袋 B にも赤玉が 2 個入っている．袋 A から無作為に玉を 1 個取り出して袋 B に入れ，引き続き袋 B から無作為に玉を 1 個取り出して袋 A に戻す．この一連の操作を 1 回の試行とするとき，n 回 $(n \geqq 1)$ の試行の後，袋 A に赤玉が 1 個だけ入っている確率を p_n，2 個入っている確率を q_n，1 個も入っていない確率を r_n とする．以下に答えよ．

(1) p_1，q_1，r_1 の値を求めよ．

(2) p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いて表せ．

(3) $q_n = r_n$ であることを示せ．

(4) p_n，q_n，r_n を求めよ．

6 楕円 $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0,\ b > 0)$ を考える．楕円 E 上の点を $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とし，直線 $l : \dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y = k$ が異なる 2 点 Q，R において楕円 E と交わるものとする．以下に答えよ．

(1) 実数 k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 P と直線 l の距離を k と θ を用いて表せ．

(3) 点 Q，R の座標を k と θ を用いて表せ．

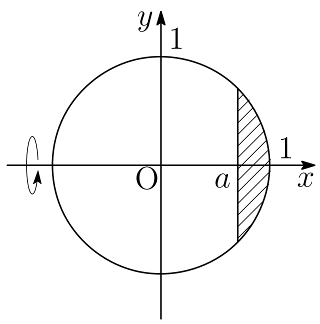
(4) 三角形 PQR の面積 $S(k)$ は θ によらないことを示せ．

(5) 三角形 PQR の面積 $S(k)$ の最大値を求めよ．

正解

$\boxed{1}$ (1) $\pi\cdot 2^2\cdot 2-\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\boldsymbol{\dfrac{20\pi}{3}}$ (m^3)

(2) 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに回転させた立体の体積を $V(a)$ とすると



$$V(a)=\pi\int_a^1(1-x^2)\,dx$$
$$=\pi\left[\,x-\frac{x^3}{3}\,\right]_a^1=\frac{\pi}{3}(1-a)^2(2+a)$$

よって，求める体積を V とすると

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot h-V(1-h)=4\pi h-\frac{\pi}{3}h^2(3-h)$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}(h^3-3h^2+12h)}\ \ (\mathrm{m}^3)$$

(3) 条件から $\dfrac{dV}{dt}=a$ (2) の結果から $\dfrac{dV}{dh}=\pi(h^2-2h+4)$

よって $v(h)=\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{dh}{dV}\cdot\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}}=\boldsymbol{\dfrac{a}{\pi(h^2-2h+4)}}$ (m/s)

(4) (3) の結果から $v(h)=\dfrac{a}{\pi\{(h-1)^2+3\}}$

$0<h<2$ より，$v(h)$ は $h=1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{a}{3\pi}}$ (m/s) をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 行列 H にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$H^2-(a+d)H+(ad-bc)E=O$$

これと $H^2=E$ により　$(a+d)H=(ad-bc+1)E$

$a+d\neq 0$ より，実数 k を用いて，$H=kE$ と表される．

これを $H^2=E$ に代入すると　$(k^2-1)E=O$

ゆえに　$k=\pm 1$　すなわち　$H=\pm E$

よって　$\boldsymbol{a=\pm 1,\ b=c=0,\ d=\pm 1}$ **(複号同順)**

(2) (1) と同様に，行列 J にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$J^2-(p+s)J+(ps-qr)E=O$$

これと $J^2=-E$ により　$(p+s)J=(ps-qr-1)E\cdots$①

$p+s\neq 0$ とすると，実数 t を用いて，$J=tE$ と表される．

これを $J^2=-E$ に代入すると　$(t^2+1)E=O$

上式をみたす実数 t は存在しないので，① から

$$p+s=0\quad\cdots②,\quad ps-qr-1=0\quad\cdots③$$

②，③ から　$qr=-(p^2+1)$

明らかに $q\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{r=-\dfrac{p^2+1}{q}}$

② から　$\boldsymbol{s=-p}$

(3) (1) の結果から，$H=kE$ $(k^2=1)$ を $X=uH+vJ$，$Y=xH+yJ$ に代入すると

$$X=kuE+vJ,\quad Y=kxE+yJ$$

ゆえに　$XY=YX=(ux-vy)E+k(vx+uy)J$

$XY=YX=E$ であるから　$k(vx+uy)J=-(ux-vy-1)E$

$vx+uy\neq 0$ とすると J は E の実数倍となり，(2) の結果の $r\neq 0$ に反する．

したがって　$vx+uy=0$，$ux-vy-1=0$

ゆえに　$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u\neq 0$ または $v\neq 0$ より，$u^2+v^2\neq 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{u^2+v^2}\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{Y=\dfrac{u}{u^2+v^2}H-\dfrac{v}{u^2+v^2}J}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{P}(z)$ が，点 $1+i$ を中心とする半径 r の円周上にあるから

$$|z-(1+i)|=r$$

$u=\dfrac{z+(1-i)}{2}$ より，$z=2u-1+i$ であるから

$$|(2u-1+i)-(1+i)|=r \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{|u-1|=\frac{r}{2}}$$

よって，$\mathrm{Q}(u)$ は，**点 $\boldsymbol{1}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\frac{r}{2}}$ の円周上を動く．**

(2) $w=\dfrac{4\{z-(1+i)\}}{z-(2+i)}=4+\dfrac{4}{z-(2+i)}$ より，$w-4=\dfrac{4}{z-(2+i)}$

したがって　$z-(2+i)=\dfrac{4}{w-4}$　　ゆえに　$z-(1+i)=\dfrac{w}{w-4}$

$|z-(1+i)|=r$ より，$\left|\dfrac{w}{w-4}\right|=r$ であるから，$r^2|w-4|^2=|w|^2$ より

$$r^2(w-4)(\overline{w}-4)=w\overline{w}$$
$$(r^2-1)w\overline{w}-4r^2(w+\overline{w})+16r^2=0$$

$r\neq1$ より　$w\overline{w}-\dfrac{4r^2}{r^2-1}(w+\overline{w})+\left(\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right)^2=\left(\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right)^2-\dfrac{16r^2}{r^2-1}$

ゆえに　$\left|w-\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right|^2=\left(\dfrac{4r}{r^2-1}\right)^2$　　すなわち　$\boldsymbol{\left|w-\dfrac{4r^2}{r^2-1}\right|=\dfrac{4r}{|r^2-1|}}$

よって，$\mathrm{R}(w)$ は，**点 $\boldsymbol{\dfrac{4r^2}{r^2-1}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{4r}{|r^2-1|}}$ の円周上を動く．**

解説 $\left|\dfrac{w}{w-4}\right|=r\neq1$ より，w は2点 0，4 を $r:1$ に内分する点 $\dfrac{4r}{r+1}$ と外分する点 $\dfrac{4r}{r-1}$ を直径の両端とする円周上を動く．

中心は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4r}{r+1}+\dfrac{4r}{r-1}\right)=\dfrac{4r^2}{r^2-1}$

半径は　$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{4r}{r-1}-\dfrac{4r}{r+1}\right|=\dfrac{4r}{|r^2-1|}$

$\boxed{4}$ (1)

アルゴリズム 1			
	1 周目	2 周目	3 周目
①	$x=3$		
②	$\to$ ③	$\to$ ③	$\to$ ③
③	$y=\frac{161}{3}$	$y=\frac{161}{5}$	$y=\frac{161}{7}=23$
④	$\to$ ⑤	$\to$ ⑤	$a=23$，$b=7$
⑤	$x=5$	$x=7$	
⑥	$\to$ ②	$\to$ ②	

アルゴリズム 1

x	**3**	**5**	**7**
y	$\mathbf{\frac{161}{3}}$	$\mathbf{\frac{161}{5}}$	**23**

アルゴリズム 2			
	1 周目	2 周目	3 周目
①	$x=12$		
②	$\to$ ③		
③	$x=13$	$x=14$	$x=15$
④	$\to$ ⑤	$\to$ ⑤	$\to$ ⑤
⑤	$y=2\sqrt{2}$	$y=\sqrt{35}$	$y=\sqrt{64}=8$
⑥	$\to$ ⑦	$\to$ ⑦	$a=23$，$b=7$
⑦	$\to$ ③	$\to$ ③	

アルゴリズム 2

x	**13**	**14**	**15**
y	$\mathbf{2\sqrt{2}}$	$\mathbf{\sqrt{35}}$	**8**

補足 アルゴリズム 2 で y が整数であるとき，$y=\sqrt{x^2-n}$ より

$$n=x^2-y^2=(x+y)(x-y)=ab$$

(2) (1) と同様にすると，次のようになる．

アルゴリズム 1 ($n = 115$)

x	3	5
y	$\frac{115}{3}$	23

アルゴリズム 2 ($n = 115$)

x	11	12	13	14
y	$\sqrt{6}$	$\sqrt{29}$	$3\sqrt{6}$	9

アルゴリズム 1 ($n = 117$)

x	3
y	39

アルゴリズム 2 ($n = 117$)

x	11
y	2

アルゴリズム 1 ($n = 119$)

x	3	5	7
y	$\frac{119}{3}$	$\frac{119}{5}$	17

アルゴリズム 2 ($n = 119$)

x	11	12
y	$\sqrt{2}$	5

アルゴリズム 1 ($n = 121$)

x	3	5	7	9	11
y	$\frac{121}{3}$	$\frac{121}{5}$	$\frac{121}{7}$	$\frac{121}{9}$	11

アルゴリズム 2 ($n = 121$)

$121 = 11^2$ より，② で停止するので，⑤ は実行されない．

アルゴリズム 1 ($n = 123$)

x	3
y	41

アルゴリズム 2 ($n = 123$)

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
y	$\sqrt{21}$	$\sqrt{46}$	$\sqrt{73}$	$\sqrt{102}$	$\sqrt{133}$	$\sqrt{166}$	$\sqrt{201}$	$\sqrt{238}$	$\sqrt{277}$	$\sqrt{318}$	19

よって

n	115	117	119	121	123
アルゴリズム 1 の ③ の実行回数	**2**	**1**	**3**	**5**	**1**
アルゴリズム 2 の ⑤ の実行回数	**4**	**1**	**2**	**0**	**11**

$\boxed{\textbf{5}}$ (1) p_1 は，A，B それぞれの袋から「白，白」または「赤，赤」の順に取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

q_1 は，A，B それぞれの袋から「白，赤」の順に取り出す確率であるから

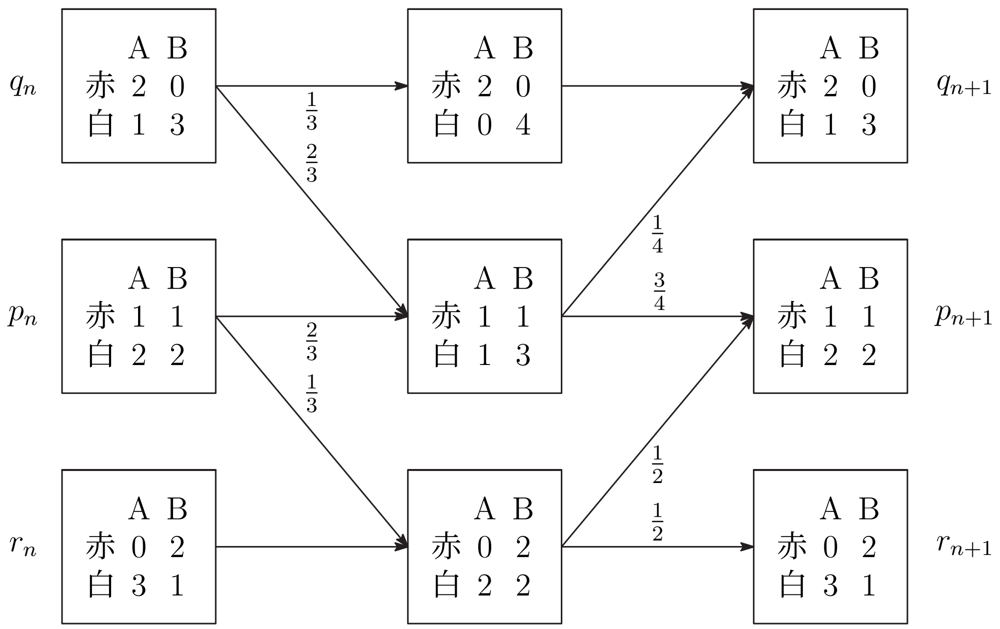
$$q_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

r_1 は，A，B それぞれの袋から「赤，白」の順に取り出す確率であるから

$$r_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 下の図の確率過程により

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{3}p_n + r_n\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n} && \cdots① \\ q_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n\right) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3}q_n = \boldsymbol{\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}q_n} && \cdots② \\ r_{n+1} &= \left(\frac{1}{3}p_n + r_n\right) \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}r_n} && \cdots③ \end{aligned}$$



(3) ② − ③ より　$q_{n+1} - r_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n - r_n)$

ゆえに　$q_n - r_n = (q_1 - r_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(1) の結果から，$q_1 - r_1 = 0$ であるから　$q_n = r_n$

(4) ① + ② + ③ より　$p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1}$

ゆえに　$p_n + q_n + r_n = p_1 + q_1 + r_1 = 1$

これに (2) の結果を代入すると　$p_n = 1 - 2q_n \quad \cdots ④$

上式と ② から　$q_{n+1} = \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{6}$　ゆえに　$q_{n+1} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{6}\left(q_n - \dfrac{1}{5}\right)$

したがって　$q_n - \dfrac{1}{5} = \left(q_1 - \dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

すなわち　$\boldsymbol{q_n = r_n = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

上式を ④ に代入すると　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 点 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と原点 O に関して対称な点を $\mathrm{P}'(-a\cos\theta, -b\sin\theta)$ とすると，2 点 P，P′ は E 上の点であり，E の P，P′ における接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると

$$l_1 : \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b} = 1, \quad l_2 : \frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b} = -1$$

よって，$l : \dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y = k$ が E と異なる 2 点で交わる k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-1 < k < 1}$$

(2) $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と $l : \dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y - k = 0$ の距離を d とすると

$$d = \frac{\left|\dfrac{\cos\theta}{a}\cdot a\cos\theta + \dfrac{\sin\theta}{b}\cdot b\sin\theta - k\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin\theta}{b}\right)^2}} = \boldsymbol{\frac{ab(1-k)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}}$$

(3)
$$\left(\frac{\cos\theta}{a}x + \frac{\sin\theta}{b}y\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{a}x - \frac{\cos\theta}{b}y\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

上式に $\dfrac{\cos\theta}{a}x + \dfrac{\sin\theta}{b}y = k \cdots ①$，$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を代入すると

$$k^2 + \left(\frac{\sin\theta}{a}x - \frac{\cos\theta}{b}y\right)^2 = 1$$

ゆえに　$\dfrac{\sin\theta}{a}x - \dfrac{\cos\theta}{b}y = \pm\sqrt{1-k^2} \quad \cdots ②$

①，② を解いて

$\boldsymbol{(a(k\cos\theta \pm \sqrt{1-k^2}\sin\theta),\ b(k\sin\theta \mp \sqrt{1-k^2}\cos\theta))}$ **(複号同順)**

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2 &= (2a\sqrt{1-k^2}\sin\theta)^2 + (2b\sqrt{1-k^2}\cos\theta)^2 \\ &= 4(1-k^2)(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\end{aligned}$$

ゆえに　$\mathrm{QR} = 2\sqrt{1-k^2}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$

したがって

$$\begin{aligned}S(k) &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot d \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-k^2}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\cdot\frac{ab(1-k)}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} \\ &= ab(1-k)\sqrt{1-k^2}\end{aligned}$$

よって，$S(k)$ は θ によらない．

(5) (4) の結果から　$S(k) = ab\sqrt{(1+k)(1-k)^3}$

$f(k) = (1+k)(1-k)^3$ $(-1 < k < 1)$ とおくと

$$f'(k) = -2(2k+1)(1-k)^2$$

したがって，$f(k)$ の増減表は

k	(-1)	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	(0)

よって，$S(k)$ は $k = -\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab}$