

平成 14 年度 九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

情報工学部 平成 14 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C . [1], [2], [3] 必答 . [4] ~ [6] から 1 題を選択 . (120 分)

[1] a, b, c, d を実数とし, 関数 $f(x)$ を次のように定める .

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & (x \leq -1) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & (-1 < x < 1) \\ -\frac{1}{x} + 1 & (1 \leq x) \end{cases}$$

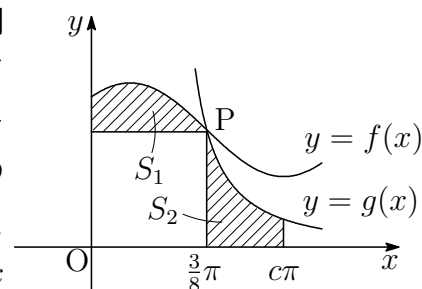
ただし, $f(x)$ は $x = -1$ および $x = 1$ で微分可能であるものとする, 以下に答えよ .

- (1) a, b, c, d を定めよ .
- (2) $f(x)$ の増減および極値を調べて, $y = f(x)$ のグラフの概形を描け .
- (3) 実数 $p \geq 0$ に対し, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = px + \frac{1}{2}$ との共有点の個数を求めよ .

[2] 虚数単位 i とは異なる複素数 z に対し, $\alpha = z\bar{z} - \bar{z}i + zi + 1$, $w = i + \frac{1}{\bar{z} + i}$ とおくとき, 以下に答えよ .

- (1) α が正の実数であることを示せ .
- (2) $w\bar{w} - \bar{w}i + wi + 1$ を α を用いて表せ .
- (3) w が実数となるような z の集合を複素数平面上に図示せよ .

- 3 a, b を正の実数とする. $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = a(2 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) + b$ および $x > \frac{\pi}{4}$ で定義された関数 $g(x) = \frac{4\pi}{16x^2 - \pi^2}$ に対し, 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が図のように直線 $x = \frac{3}{8}\pi$ 上の点 P を共有するものとする. 曲線 $y = f(x)$ と y 軸および点 P を通り x 軸に平行な直線によって囲まれてできる図形の

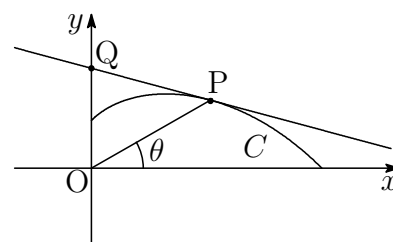


面積を S_1 , 曲線 $y = g(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = \frac{3}{8}\pi, x = c\pi$ ($c > \frac{3}{8}$) によって囲まれてできる図形の面積を S_2 とする. 以下に答えよ.

- (1) b の値を求めよ.
- (2) b は (1) で得られた値とする. 区間 $0 \leq x \leq \frac{3}{8}\pi$ において $f(x) \geq b$ が成り立つことを示せ.
- (3) b は (1) で得られた値とする. $a = (\sqrt{2} - 1) \log 2$ であるとき, $S_1 = S_2$ となる c の値を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

- 4 O を原点とする座標平面上の曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = e^{-\theta} \cos \theta \\ y = e^{-\theta} \sin \theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$



と表されている. 以下に答えよ.

- (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 点 $P(e^{-\theta} \cos \theta, e^{-\theta} \sin \theta)$ における曲線 C の接線の傾きを θ を用いて表せ.
- (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 点 $P(e^{-\theta} \cos \theta, e^{-\theta} \sin \theta)$ における曲線 C の接線が y 軸と交わる点を Q とおくと, $\angle OPQ$ は θ の値によらず $\frac{\pi}{4}$ であることを示せ.
- (3) 曲線 C の長さを求めよ.

5 袋の中に白色と黄色の2枚のカードが入っている．袋から無作為に1枚取り出してその色を記録し，袋にもどす試行を n 回くり返し行う．最後の2回の試行，つまり， $n-1$ 回目と n 回目にはじめて2枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数を $f(n)$ とおく．ただし $n \geq 2$ とする．以下に答えよ．

- (1) $f(2), f(3), f(4), f(5)$ を求めよ．
 (2) $f(n-2), f(n-1), f(n)$ ($n \geq 4$) の間の関係式を求めたい．下の(ア),(イ),(ウ)に当てはまる式を求めよ．

1枚目のカードが白色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の2回ではじめて2枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は (ア) である．1枚目のカードが黄色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の2回ではじめて2枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は (イ) である．したがって， $f(n-2), f(n-1), f(n)$ ($n \geq 4$) の間に (ウ) の関係式が成り立つ．

- (3) 2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の2つの解を α, β とし， $a_n = f(n) - \alpha f(n-1)$ ， $b_n = f(n) - \beta f(n-1)$ とおく．このとき数列 $\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり，数列 $\{b_n\}$ は公比 α の等比数列であることを示せ．
 (4) $f(n)$ を求めよ．

6 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を相異なる n 個 ($n \geq 2$) の正整数の集合とし， k を正整数とする． $a_i + a_j = k$ となるような A の異なる要素 a_i, a_j を A と k の解といい，そのような要素が存在しないときは A と k は解をもたないという．以下に答えよ．

- (1) A の中から異なる2つの要素を選ぶ組み合わせは全部で何通りあるか．
 (2) 下のアルゴリズム1は， A と k が与えられたとき，それが解をもつかどうかを調べ，もし解があればそのうちの1つを出力する．
 (i) $n = 10$ のとき，⑤の実行回数が最も少なくなるのは，どのような A と k が与えられたときか，また，そのときの実行回数を求めよ．
 (ii) $n = 10$ のとき，⑤の実行回数が最も多くなるのは，どのような A と k が与えられたときか，また，そのときの実行回数を求めよ．

アルゴリズム1

- ① $i = 1$ とする．
 ② $i > n - 1$ のときは“ A と k は解をもたない”と出力し，終了する．
 ③ $j = i + 1$ とする．
 ④ $j > n$ のときは i を1増やして②へもどる．
 ⑤ $a_i + a_j \neq k$ のときは j の値を1増やして④へもどる．
 ⑥ 解 a_i, a_j を出力し，終了する．

(3) $a_1 < a_2 < \dots < a_n < k$ とする．アルゴリズム 2 は， A と k に解があればそのうちの 1 つを出力する．

(i) $A = \{2, 4, 11, 15, 17, 21\}$ と $k = 29$ が与えられたとき，アルゴリズム 2 の ② における i と j の値の変化を下の表の形で解答せよ．

i	1			...
j	6			...

- (ii) アルゴリズム 2 は， A と k が解をもたないのに，そのよう出力しない場合がある．これは，どのような A と k が与えられたときか．
- (iii) A と k が解をもつかどうか正しく調べることができるように，アルゴリズム 2 の 1 つの行を修正せよ．
- (iv) 修正後のアルゴリズム 2 において，③ の実行回数が最も多くなるのは，どのような A と k が与えられたときか．また，そのときの実行回数を n を用いて表せ．

アルゴリズム 2

- ① $i = 1, j = n$ とする．
- ② $i > n$ または $j < 1$ のときは“ A と k は解をもたない”と出力し，終了する．
- ③ $a_i + a_j = k$ のときは解 a_i, a_j を出力し，終了する．
- ④ $a_i + a_j < k$ のときは i を 1 増やし ② へもどる．
- ⑤ $a_i + a_j > k$ のときは j を 1 減らし ② へもどる．

正解

- 1 (1) $f(x)$ は $x = -1, x = 1$ で微分可能であるから, $f(x)$ は $x = -1, x = 1$ で連続である. したがって

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = f(-1), \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1)$$

すなわち $-a + b - c + d = 1, \quad a + b + c + d = 0 \quad \dots (*)$

また $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c,$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, \quad \left(-\frac{1}{x} + 1\right)' = \frac{1}{x^2}$$

$f(x)$ が $x = -1$ および $x = 1$ で微分可能であるから

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} (3ax^2 + 2bx + c) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x^2},$$

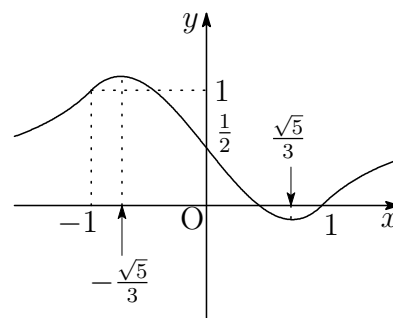
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (3ax^2 + 2bx + c) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^2}$$

すなわち $3a - 2b + c = 1, \quad 3a + 2b + c = 1 \quad \dots (**)$

(*) , (**) を解いて $a = \frac{3}{4}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{5}{4}, \quad d = \frac{1}{2}$

- (2) (1) の結果から

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4} & (|x| \leq 1) \\ \frac{1}{x^2} & (|x| \geq 1) \end{cases}$$



したがって, 増減表およびグラフの概形は次のようになる.

x	...	-1	...	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$...	$\frac{\sqrt{5}}{3}$...	1	...
$f'(x)$	+		+	0	-	0	+		+
$f(x)$	↗	1	↗	$\frac{9+5\sqrt{5}}{18}$	↘	$\frac{9-5\sqrt{5}}{18}$	↗	0	↗

よって, 極大値 $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{9+5\sqrt{5}}{18}$, 極小値 $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{9-5\sqrt{5}}{18}$

(3) $y = f(x)$ および直線 $y = px + \frac{1}{2}$ ($p \geq 0$) は、それぞれ点 $(0, \frac{1}{2})$ に関して対称である。 $x > 0$ における $y = f(x)$ と $y = px + \frac{1}{2}$ の共有点は

$$y = px + \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{x} + 1$$

の解である。 y を消去すると

$$px + \frac{1}{2} = -\frac{1}{x} + 1 \quad \text{整理すると} \quad 2px^2 - x + 2 = 0$$

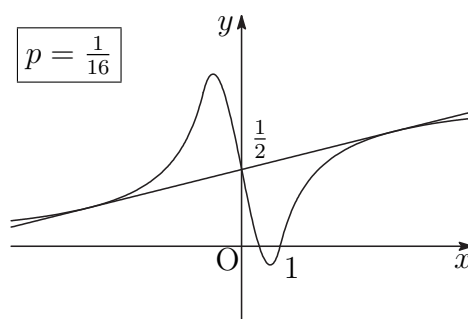
とくに、これらが接するとき、

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2p \cdot 2 = 0$$

すなわち $p = \frac{1}{16}$

よって、グラフの概形に注意して

- $p = 0$ のとき 3 個
- $0 < p < \frac{1}{16}$ のとき 5 個
- $p = \frac{1}{16}$ のとき 3 個
- $\frac{1}{16} < p$ のとき 1 個



$$\begin{aligned}
 \boxed{2} \quad (1) \quad \alpha &= z\bar{z} - \bar{z}i + zi + 1 \\
 &= |z|^2 + (-i)\bar{z} + \overline{(-i)}z + |-i|^2 \\
 &= |z-i|^2
 \end{aligned}$$

$z \neq i$ であるから, $|z-i| > 0$ より α は正の実数である.

$$(2) \quad w = i + \frac{1}{\bar{z}+i} \text{ より } |w-i| = \left| \frac{1}{\bar{z}+i} \right| = \frac{|1|}{|\bar{z}+i|} = \frac{1}{|z-i|}$$

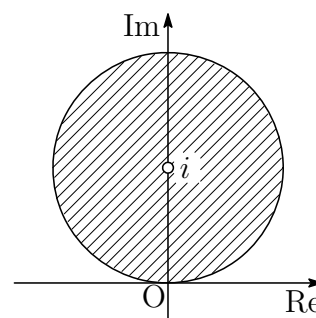
よって, 上式および(1)の結果から

$$\begin{aligned}
 w\bar{w} - \bar{w}i + wi + 1 &= |w|^2 + (-i)\bar{w} + \overline{(-i)}w + |-i|^2 \\
 &= |w-i|^2 = \frac{1}{|z-i|^2} = \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned}$$

(3) $|z-i| = \frac{1}{|w-i|}$ であるから, w が実数 x である
とすると

$$|z-i| = \frac{1}{|x-i|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1$$

したがって, 上式および $z \neq i$ から, 点 z は点 i を中心とする半径1の円の周, および内部から, 点 i を除いた領域.



$$\boxed{3} \quad (1) \quad f(x) = a(\sin 2x + \cos 2x) + b \quad (x \geq 0),$$

$$g(x) = \frac{4\pi}{16x^2 - \pi^2} \quad \left(x > \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = g\left(\frac{3}{8}\pi\right) \text{ であるから}$$

$$a\left(\sin \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{3}{4}\pi\right) + b = \frac{4\pi}{16\left(\frac{3}{8}\pi\right)^2 - \pi^2} \quad \text{よって } b = \frac{16}{5\pi}$$

$$(2) \quad f(x) - b = a(\sin 2x + \cos 2x) = \sqrt{2}a \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{8}\pi \text{ のとき} \quad \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \pi$$

$$a > 0 \text{ であるから } f(x) - b \geq 0 \quad \text{すなわち } f(x) \geq b$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ の結果および } a = (\sqrt{2} - 1) \log 2, c > 0 \text{ に注意して}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= a \int_0^{\frac{3}{8}\pi} \{f(x) - b\} dx = \sqrt{2}a \int_0^{\frac{3}{8}\pi} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}a}{2} \left[-\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{3}{8}\pi} \pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\sqrt{2} - 1) \log 2 = \frac{1}{2} \log 2 \\ S_2 &= \int_{\frac{3}{8}\pi}^{c\pi} g(x) dx = 2 \int_{\frac{3}{8}\pi}^{c\pi} \left(\frac{1}{4x - \pi} - \frac{1}{4x + \pi}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{4x - \pi}{4x + \pi} \right| \right]_{\frac{3}{8}\pi}^{c\pi} = \frac{1}{2} \log \frac{5(4c - 1)}{4c + 1} \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2} \log \frac{5(4c - 1)}{4c + 1} \quad \text{ゆえに } 2 = \frac{5(4c - 1)}{4c + 1}$$

$$\text{これを解いて } c = \frac{7}{12}$$

4 (1) $x = e^{-\theta} \cos \theta$, $y = e^{-\theta} \sin \theta$ を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta} = -e^{-\theta} \cos \theta - e^{-\theta} \sin \theta = -e^{-\theta}(\cos \theta + \sin \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -e^{-\theta} \sin \theta + e^{-\theta} \cos \theta = -e^{-\theta}(\sin \theta - \cos \theta)$$

よって
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-e^{-\theta}(\sin \theta - \cos \theta)}{-e^{-\theta}(\cos \theta + \sin \theta)} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

(2) 点 $P(x, y)$ から
$$\frac{y}{x} = \frac{e^{-\theta} \sin \theta}{e^{-\theta} \cos \theta} = \tan \theta$$

ゆえに、線分 OP の向きは x 軸の正の向きから θ だけ回転したもの。

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right), \quad \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

上の 2 式を (1) の結果に代入すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)} = \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

ゆえに、 P のおける C の接線の向きは x 軸の正の向きから $\theta - \frac{\pi}{4}$ だけ回転したもの。したがって、 OP と P のおける C の接線のなす角は

$$\theta - \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{よって} \quad \angle OPQ = \frac{\pi}{4}$$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 &= e^{-2\theta}(\cos \theta + \sin \theta)^2 + e^{-2\theta}(\sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= 2e^{-2\theta} \end{aligned}$$

したがって、求める曲線 C の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{-\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \left[-e^{-\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2}(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) \end{aligned}$$

- 5 (1) 次の場合により $f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 3$

黄黄	白黄黄	白白黄黄 黄白黄黄	白白白黄黄 白黄白黄黄 黄白白黄黄
----	-----	--------------	-------------------------

- (2) $n \geq 4$ のとき, $f(n)$ の総数は, 次の 2 つの場合に分けられる.
- i) 1 枚目のカードが白色である場合, その総数は, 2 回目以降, すなわちその後の $n - 1$ 回の総数 $f(n - 1)$ に等しい.
 - ii) 1 枚目のカードが黄色であるとき, 2 枚目のカードは白色であり, その総数は, 3 回目以降, すなわちその後の $n - 2$ 回の総数 $f(n - 2)$ に等しい.

したがって, $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$ が成り立つ.

(ア) $f(n - 1)$ (イ) $f(n - 2)$ (ウ) $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$

- (3) $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

(2) の結果から $f(n) = (\alpha + \beta)f(n - 1) - \alpha\beta f(n - 2)$

したがって $f(n) - \alpha f(n - 1) = \beta\{f(n - 1) - \alpha f(n - 2)\}$

$$f(n) - \beta f(n - 1) = \alpha\{f(n - 1) - \beta f(n - 2)\}$$

すなわち $a_n = \beta a_{n-1}, b_n = \alpha b_{n-1}$

よって, $\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり, $\{b_n\}$ は公比 α の等比数列である.

- (4) (3) の結果から

$$f(n + 1) - \alpha f(n) = \beta^{n-2}\{f(3) - \alpha f(2)\} = \beta^{n-2}(1 - \alpha) = \beta^{n-1}$$

$$f(n + 1) - \beta f(n) = \alpha^{n-2}\{f(3) - \beta f(2)\} = \alpha^{n-2}(1 - \beta) = \alpha^{n-1}$$

したがって $(\beta - \alpha)f(n) = \beta^{n-1} - \alpha^{n-1}$

α, β は, 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから,

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ とすると}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right\}$$

6 (1) ${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ (通り)

(2) (i) $a_1 + a_2 = k$ のとき 1 回だけ実行

(ii) $a_i + a_j \neq k$ ($i < j$, $1 \leq i \leq 8$, $2 \leq j \leq 10$) のとき 45 回実行

(3) (i) $A = \{2, 4, 11, 15, 17, 21\}$

i	j	a_i	a_j	$a_i + a_j$	k	
1	6	2	21	23	< 29	$\rightarrow i = 1 + 1 = 2$
2	6	4	21	25	< 29	$\rightarrow i = 2 + 1 = 3$
3	6	11	21	32	> 29	$\rightarrow j = 6 - 1 = 5$
3	5	11	17	28	< 29	$\rightarrow i = 3 + 1 = 4$
4	5	15	17	32	> 29	$\rightarrow j = 5 - 1 = 4$
4	4	15	15	30	> 29	$\rightarrow j = 4 - 1 = 3$
4	3	15	11	26	< 29	$\rightarrow i = 4 + 1 = 5$
5	3	17	11	28	< 29	$\rightarrow i = 5 + 1 = 6$
6	3	21	11	32	> 29	$\rightarrow j = 3 - 1 = 2$
6	2	21	4	25	< 29	$\rightarrow i = 6 + 1 = 7 > 6$

したがって, “ A と k は解をもたない” と出力して終了

(ii) $1 \leq i \leq m \leq j \leq n$ について

$(i, j) \neq (m, m)$ のとき $a_i + a_j \neq k$

$(i, j) = (m, m)$ のとき $2a_m = k$

をみたく m が存在するとき (A と k は解をもたないが, a_m, a_m と出力されてしまう. 例えば, 3(i) で仮に $k = 30$ であれば $i = j = 4$ のとき, 15, 15 が出力されてしまう.)

(iii) ②行の $i > n$ または $j < 1$ を $i = j$ とすればよい ($a_i + a_j = k$ をみたく (i, j) が存在するとき, $i < j$ である. したがって, $i < j$ について調べてばよい.)

(iv) $a_i + a_j \neq k$ ($j - i = 1, 2, \dots, n - 1$) のとき $n - 1$ 回実行
(③ を実行する毎に, $j - i$ は $n - 1$ から 1 ずつ減少する.)