平成14年度　九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)
数I・II・III・A・B・C (120分)
情報工学部　平成14年2月25日

問題 1 2 3 必答． 4 5 6 から1題選択

1 a，b，c，d を実数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & (x \leqq -1) \\ ax^3+bx^2+cx+d & (-1<x<1) \\ -\dfrac{1}{x}+1 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

ただし，$f(x)$ は $x=-1$ および $x=1$ で微分可能であるものとする，以下に答えよ．

(1) a，b，c，d を定めよ．

(2) $f(x)$ の増減および極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 実数 $p \geqq 0$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=px+\dfrac{1}{2}$ との共有点の個数を求めよ．

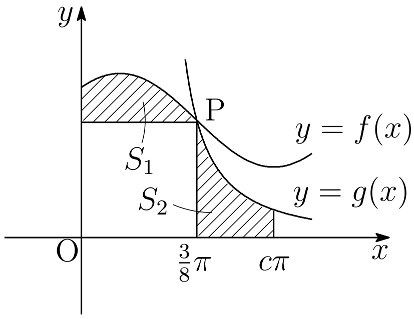
2 虚数単位 i とは異なる複素数 z に対し，$\alpha=z\overline{z}-\overline{z}i+zi+1$，$w=i+\dfrac{1}{\overline{z}+i}$ とおくとき，以下に答えよ．

(1) α が正の実数であることを示せ．

(2) $w\overline{w}-\overline{w}i+wi+1$ を α を用いて表せ．

(3) w が実数となるような z の集合を複素数平面上に図示せよ．

3 a，b を正の実数とする．$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x) = a(2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) + b$ および $x > \dfrac{\pi}{4}$ で定義された関数 $g(x) = \dfrac{4\pi}{16x^2 - \pi^2}$ に対し，曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が図のように直線 $x = \dfrac{3}{8}\pi$ 上の点 P を共有するものとする．曲線 $y = f(x)$ と y 軸および点 P を通り x 軸に平行な直線によって囲まれてできる図形の面積を S_1，曲線 $y = g(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = \dfrac{3}{8}\pi$，$x = c\pi$ $\left(c > \dfrac{3}{8}\right)$ によって囲まれてできる図形の面積を S_2 とする．以下に答えよ．



(1) b の値を求めよ．

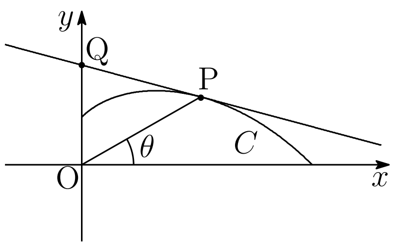
(2) b は (1) で得られた値とする．区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{8}\pi$ において $f(x) \geqq b$ が成り立つことを示せ．

(3) b は (1) で得られた値とする．$a = (\sqrt{2} - 1)\log 2$ であるとき，$S_1 = S_2$ となる c の値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

4 O を原点とする座標平面上の曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = e^{-\theta}\cos\theta \\ y = e^{-\theta}\sin\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されている．以下に答えよ．



(1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．点 $\mathrm{P}(e^{-\theta}\cos\theta,\ e^{-\theta}\sin\theta)$ における曲線 C の接線の傾きを θ を用いて表せ．

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．点 $\mathrm{P}(e^{-\theta}\cos\theta,\ e^{-\theta}\sin\theta)$ における曲線 C の接線が y 軸と交わる点を Q とおくとき，$\angle\mathrm{OPQ}$ は θ の値によらず $\dfrac{\pi}{4}$ であることを示せ．

(3) 曲線 C の長さを求めよ．

5 袋の中に白色と黄色の 2 枚のカードが入っている．袋から無作為に 1 枚取り出してその色を記録し，袋にもどす試行を n 回くり返し行う．最後の 2 回の試行，つまり，$n-1$ 回目と n 回目にはじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数を $f(n)$ とおく．ただし $n \geqq 2$ とする．以下に答えよ．

(1) $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ を求めよ．

(2) $f(n-2)$, $f(n-1)$, $f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間の関係式を求めたい．下の (ア),(イ),(ウ) に当てはまる式を求めよ．

1 枚目のカードが白色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の 2 回ではじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は $\boxed{\text{(ア)}}$ である．1 枚目のカードが黄色で，さらに $n-1$ 回の試行を行った結果最後の 2 回ではじめて 2 枚連続して黄色のカードが取り出される場合の数は $\boxed{\text{(イ)}}$ である．したがって，$f(n-2)$，$f(n-1)$，$f(n)$ $(n \geqq 4)$ の間に $\boxed{\text{(ウ)}}$ の関係式が成り立つ．

(3) 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とし，$a_n=f(n)-\alpha f(n-1)$，$b_n=f(n)-\beta f(n-1)$ とおく．このとき数列 $\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり，数列 $\{b_n\}$ は公比 α の等比数列であることを示せ．

(4) $f(n)$ を求めよ．

6 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ を相異なる n 個 $(n \geqq 2)$ の正整数の集合とし，k を正整数とする．$a_i+a_j=k$ となるような A の異なる要素 a_i，a_j を A と k の解といい，そのような要素が存在しないときは A と k は解をもたないという．以下に答えよ．

(1) A の中から異なる 2 つの要素を選ぶ組み合せは全部で何通りあるか．

(2) 下のアルゴリズム 1 は，A と k が与えられたとき，それが解をもつかどうかを調べ，もし解があればそのうちの 1 つを出力する．

(i) $n=10$ のとき，⑤ の実行回数が最も少なくなるのは，どのような A と k が与えられたときか，また，そのときの実行回数を求めよ．

(ii) $n=10$ のとき，⑤ の実行回数が最も多くなるのは，どのような A と k が与えられたときか，また，そのときの実行回数を求めよ．

アルゴリズム 1
① $i=1$ とする．
② $i>n-1$ のときは “A と k は解をもたない” と出力し，終了する．
③ $j=i+1$ とする．
④ $j>n$ のときは i を 1 増やして ② へもどる．
⑤ $a_i+a_j \neq k$ のときは j の値を 1 増やして ④ へもどる．
⑥ 解 a_i，a_j を出力し，終了する．

(3) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < k$ とする．アルゴリズム 2 は，A と k に解があればそのうちの 1 つを出力する．

(i) $A = \{2,\ 4,\ 11,\ 15,\ 17,\ 21\}$ と $k = 29$ が与えられたとき，アルゴリズム 2 の ② における i と j の値の変化を下の表の形で解答せよ．

i	1			$\cdots$
j	6			$\cdots$

(ii) アルゴリズム 2 は，A と k が解をもたないのに，そのように出力しない場合がある．これは，どのような A と k が与えらたときか．

(iii) A と k が解をもつかどうか正しく調べることができるように，アルゴリズム 2 の 1 つの行を修正せよ．

(iv) 修正後のアルゴリズム 2 において，③ の実行回数が最も多くなるのは，どのような A と k が与えられたときか．また，そのときの実行回数を n を用いて表せ．

アルゴリズム 2

① $i = 1$，$j = n$ とする．

② $i > n$ または $j < 1$ のときは “A と k は解をもたない” と出力し，終了する．

③ $a_i + a_j = k$ のときは解 a_i，a_j を出力し，終了する．

④ $a_i + a_j < k$ のときは i を 1 増やし ② へもどる．

⑤ $a_i + a_j > k$ のときは j を 1 減らし ② へもどる．

解答例

1 (1) $f(x)$ は $x=-1$，$x=1$ で微分可能であるから，$f(x)$ は $x=-1$，$x=1$ で連続である．したがって

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = f(-1), \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1)$$

すなわち　$-a+b-c+d=1, \quad a+b+c+d=0 \quad \cdots(*)$

また　$(ax^3+bx^2+cx+d)' = 3ax^2+2bx+c,$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}, \quad \left(-\frac{1}{x}+1\right)' = \frac{1}{x^2}$$

$f(x)$ が $x=-1$ および $x=1$ で微分可能であるから

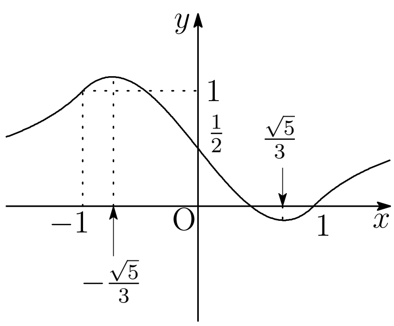
$$\lim_{x\to -1+0}(3ax^2+2bx+c) = \lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x^2},$$
$$\lim_{x\to 1-0}(3ax^2+2bx+c) = \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2}$$

すなわち　$3a-2b+c=1, \quad 3a+2b+c=1 \quad \cdots(**)$

$(*)$，$(**)$ を解いて　$\boldsymbol{a=\frac{3}{4},\ b=0,\ c=-\frac{5}{4},\ d=\frac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{4}x^2 - \dfrac{5}{4} & (|\,x\,| \leqq 1) \\ \dfrac{1}{x^2} & (|\,x\,| \geqq 1) \end{cases}$$



したがって，増減表およびグラフの概形は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{9+5\sqrt{5}}{18}$	$\searrow$	$\frac{9-5\sqrt{5}}{18}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

よって，極大値 $f\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{9+5\sqrt{5}}{18}}$，極小値 $f\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{9-5\sqrt{5}}{18}}$

(3) $y=f(x)$ および直線 $y=px+\dfrac{1}{2}$ $(p \geqq 0)$ は，それぞれ点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に関して対称である．$x>0$ における $y=f(x)$ と $y=px+\dfrac{1}{2}$ の共有点は

$$y=px+\frac{1}{2},\quad y=-\frac{1}{x}+1$$

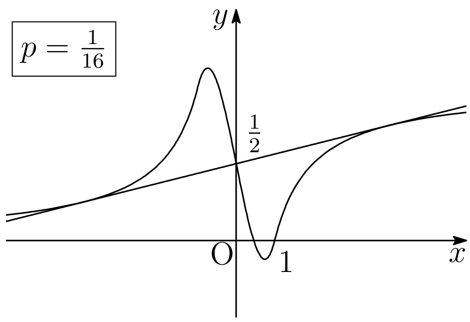
の解である．y を消去すると

$$px+\frac{1}{2}=-\frac{1}{x}+1 \quad \text{整理すると} \quad 2px^2-x+2=0$$

とくに，これらが接するとき，

$$(-1)^2-4\cdot 2p\cdot 2=0$$

すなわち　$p=\dfrac{1}{16}$



よって，グラフの概形に注意して

$p=0$ のとき　3 個
$0<p<\frac{1}{16}$ のとき　5 個
$p=\frac{1}{16}$ のとき　3 個
$\frac{1}{16}<p$ のとき　1 個

2 (1)
$$\begin{aligned}\alpha &= z\overline{z} - \overline{z}i + zi + 1\\ &= (z-i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z-i})\\ &= |z-i|^2\end{aligned}$$

$z \neq i$ であるから，$|z-i| > 0$ より　α は正の実数である．

(2) $w = i + \dfrac{1}{\overline{z}+i}$ より　$|w-i| = \left|\dfrac{1}{\overline{z}+i}\right| = \dfrac{|\,1\,|}{|\overline{z}+i|} = \dfrac{1}{|z-i|}$

よって，上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}w\overline{w} - \overline{w}i + wi + 1 &= (w-i)(\overline{w}+i) = (w-i)(\overline{w-i})\\ &= |w-i|^2 = \frac{1}{|z-i|^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\end{aligned}$$

(3) w が実数となる条件は，$w = \overline{w}$ であるから

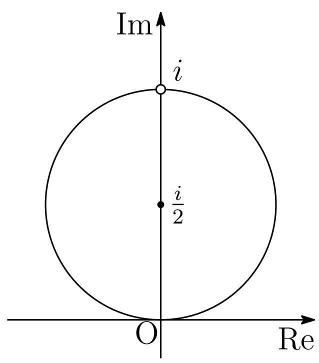
$$(*)\quad i + \frac{1}{\overline{z}+i} = -i + \frac{1}{z-i} \quad ゆえに \quad \frac{1}{z-i} - \frac{1}{\overline{z}+i} - 2i = 0$$

上の第 2 式を整理すると

$$\begin{aligned}-2i(z-i)(\overline{z}+i) - (z-i) + (\overline{z}+i) &= 0\\ (z-i)(\overline{z}+i) - \frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z} - 1 &= 0\\ z\overline{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\overline{z} &= 0\\ \left(z - \frac{i}{2}\right)\left(\overline{z} + \frac{i}{2}\right) &= \frac{1}{4}\\ \left|z - \frac{i}{2}\right|^2 &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

したがって　$\left|z - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

よって，上式および $(*)$ より，点 z は点 $\dfrac{i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から，点 i を除いた部分．



3 (1) $$f(x) = a(\sin 2x + \cos 2x) + b \quad (x \geqq 0),$$
$$g(x) = \frac{4\pi}{16x^2 - \pi^2} \qquad \left(x > \frac{\pi}{4}\right)$$

$f\left(\frac{3}{8}\pi\right) = g\left(\frac{3}{8}\pi\right)$ であるから

$$a\left(\sin\frac{3}{4}\pi + \cos\frac{3}{4}\pi\right) + b = \frac{4\pi}{16\left(\frac{3}{8}\pi\right)^2 - \pi^2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = \frac{16}{5\pi}}$$

(2) $$f(x) - b = a(\sin 2x + \cos 2x) = \sqrt{2}\,a\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \frac{3}{8}\pi$ のとき　　$\frac{\pi}{4} \leqq 2x + \frac{\pi}{4} \leqq \pi$

$a > 0$ であるから　$f(x) - b \geqq 0$　すなわち　$f(x) \geqq b$

(3) (1)，(2) の結果および $a = (\sqrt{2} - 1)\log 2$，$c > 0$ に注意して

$$S_1 = a\int_0^{\frac{3}{8}\pi}\{f(x) - b\}\,dx = \sqrt{2}\,a\int_0^{\frac{3}{8}\pi}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}a}{2}\left[-\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{8}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2} - 1)\log 2 = \frac{1}{2}\log 2$$
$$S_2 = \int_{\frac{3}{8}\pi}^{c\pi} g(x)\,dx = 2\int_{\frac{3}{8}\pi}^{c\pi}\left(\frac{1}{4x - \pi} - \frac{1}{4x + \pi}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{4x - \pi}{4x + \pi}\right|\right]_{\frac{3}{8}\pi}^{c\pi} = \frac{1}{2}\log\frac{5(4c - 1)}{4c + 1}$$

$S_1 = S_2$ であるから

$$\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log\frac{5(4c - 1)}{4c + 1} \qquad \text{ゆえに} \quad 2 = \frac{5(4c - 1)}{4c + 1}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{c = \frac{7}{12}}$　■

4 (1) $x=e^{-\theta}\cos\theta$，$y=e^{-\theta}\sin\theta$ を θ で微分すると

$$\frac{dx}{d\theta}=-e^{-\theta}\cos\theta-e^{-\theta}\sin\theta=-e^{-\theta}(\cos\theta+\sin\theta)$$
$$\frac{dy}{d\theta}=-e^{-\theta}\sin\theta+e^{-\theta}\cos\theta=-e^{-\theta}(\sin\theta-\cos\theta)$$

よって $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{-e^{-\theta}(\sin\theta-\cos\theta)}{-e^{-\theta}(\cos\theta+\sin\theta)}=\boldsymbol{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}$$

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から $\quad \dfrac{y}{x}=\dfrac{e^{-\theta}\sin\theta}{e^{-\theta}\cos\theta}=\tan\theta$

ゆえに，線分 OP の向きは x 軸の正の向きから θ だけ回転したもの．

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\qquad \cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

上の 2 式を (1) の結果に代入すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

ゆえに，P のおける C の接線の向きは x 軸の正の向きから $\theta-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転したもの．したがって，OP と P のおける C の接線のなす角は

$$\theta-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\quad よって\quad \angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{4}$$

(3) (1) の結果から

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=e^{-2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)^2+e^{-2\theta}(\sin\theta-\cos\theta)^2=2e^{-2\theta}$$

したがって，求める曲線 C の長さは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^{-\theta}\,d\theta$$
$$=\sqrt{2}\Big[-e^{-\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}(1-e^{-\frac{\pi}{2}})}$$

別解 $r=e^{-\theta}\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より[1]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(e^{-\theta})^2+(-e^{-\theta})^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^{-\theta}\,d\theta \quad \blacksquare$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf (p.12 を参照)

$\boxed{5}$ (1) 次の場合により　$\boldsymbol{f(2)=1,\ f(3)=1,\ f(4)=2,\ f(5)=3}$

黄黄	白黄黄	白白黄黄	白白白黄黄
		黄白黄黄	白黄白黄黄
			黄白白黄黄

(2) $n \geqq 4$ のとき，$f(n)$ の総数は，次の 2 つの場合に分けられる．

i) 1 枚目のカードが白色である場合，その総数は，2 回目以降，すなわちその後の $n-1$ 回の総数 $f(n-1)$ に等しい．

ii) 1 枚目のカードが黄色であるとき，2 枚目のカードは白色であり，その総数は，3 回目以降，すなわちその後の $n-2$ 回の総数 $f(n-2)$ に等しい．

したがって，$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$ が成り立つ．

(ア) $\boldsymbol{f(n-1)}$ (イ) $\boldsymbol{f(n-2)}$ (ウ) $\boldsymbol{f(n)=f(n-1)+f(n-2)}$

(3) $x^2-x-1=0$ の 2 つの解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-1$$

(2) の結果から　$f(n)=(\alpha+\beta)f(n-1)-\alpha\beta f(n-2)$

したがって　$f(n)-\alpha f(n-1)=\beta\{f(n-1)-\alpha f(n-2)\}$

$f(n)-\beta f(n-1)=\alpha\{f(n-1)-\beta f(n-2)\}$

すなわち　$a_n=\beta a_{n-1}$，$b_n=\alpha b_{n-1}$

よって，$\{a_n\}$ は公比 β の等比数列であり，$\{b_n\}$ は公比 α の等比数列である．

(4) (3) の結果から

$$f(n+1)-\alpha f(n)=\beta^{n-2}\{f(3)-\alpha f(2)\}=\beta^{n-2}(1-\alpha)=\beta^{n-1}$$
$$f(n+1)-\beta f(n)=\alpha^{n-2}\{f(3)-\beta f(2)\}=\alpha^{n-2}(1-\beta)=\alpha^{n-1}$$

したがって　$(\beta-\alpha)f(n)=\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}$

α，β は，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解であるから，

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすると

$$\boldsymbol{f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

■

$\boxed{6}$ (1) ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{\boldsymbol{n(n-1)}}{\boldsymbol{2}}$ (通り)

(2) (i) $\boldsymbol{a_1 + a_2 = k}$ **のとき 1 回だけ実行**

(ii) $\boldsymbol{a_i + a_j \neq k\ (i < j,\ 1 \leqq i \leqq 8,\ 2 \leqq j \leqq 10)}$ **のとき 45 回実行**

(3) (i) $A = \{2,\ 4,\ 11,\ 15,\ 17,\ 21\}$

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	a_i	a_j	$a_i + a_j$		k	
1	**6**	2	21	23	$<$	29	$\to i = 1 + 1 = 2$
2	**6**	4	21	25	$<$	29	$\to i = 2 + 1 = 3$
3	**6**	11	21	32	$>$	29	$\to j = 6 - 1 = 5$
3	**5**	11	17	28	$<$	29	$\to i = 3 + 1 = 4$
4	**5**	15	17	32	$>$	29	$\to j = 5 - 1 = 4$
4	**4**	15	15	30	$>$	29	$\to j = 4 - 1 = 3$
4	**3**	15	11	26	$<$	29	$\to i = 4 + 1 = 5$
5	**3**	17	11	28	$<$	29	$\to i = 5 + 1 = 6$
6	**3**	21	11	32	$>$	29	$\to j = 3 - 1 = 2$
6	**2**	21	4	25	$<$	29	$\to i = 6 + 1 = 7 > 6$

したがって，“A と k は解をもたない” と出力して終了

(ii) $\boldsymbol{1 \leqq i \leqq m \leqq j \leqq n}$ **について**

$\boldsymbol{(i,\ j) \neq (m,\ m)}$ **のとき** $\boldsymbol{a_i + a_j \neq k}$

$\boldsymbol{(i,\ j) = (m,\ m)}$ **のとき** $\boldsymbol{2a_m = k}$

をみたす $\boldsymbol{m}$ **が存在するとき** (A と k は解をもたないが，a_m，a_m と出力されてしまう．例えば，3(i) で仮に $k = 30$ であれば $i = j = 4$ のとき，15，15 が出力されてしまう．)

(iii) **②行の** $\boldsymbol{i > n}$ **または** $\boldsymbol{j < 1}$ **を** $\boldsymbol{i = j}$ **とすればよい** ($a_i + a_j = k$ をみたす $(i,\ j)$ が存在するとき，$i < j$ である．したがって，$i < j$ について調べてばよい．)

(iv) $\boldsymbol{a_i + a_j \neq k\ (j - i = 1, 2, \cdots, n - 1)}$ **のとき** $\boldsymbol{n - 1}$ **回実行**

(③ を実行する毎に，$j - i$ は $n - 1$ から 1 ずつ減少する．) ■