平成 13 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
情報工学部　平成 13 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B・C. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答. $\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 題を選択. (120 分)

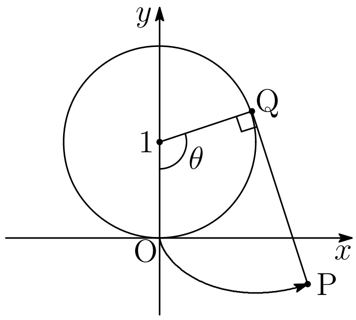
$\boxed{\mathbf{1}}$ 図のように，固定された半径 1 の円 $x^2+(y-1)^2=1$ のまわりに糸がまきつけられており，この糸をぴんと張りながらほどくものとする．糸の端 P は最初原点 O の位置にあるものとし，ほどいた部分は図の線分 PQ とする．ただし，糸の太さおよび伸縮は無視できるものとする．さらに，角 θ は図のように与えられるものとし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ．

(2) 点 P の座標を θ を用いて表せ．

(3) (2) で求めた点 P の y 座標を θ の関数とみて $y=f(\theta)$ とおく．$y=f(\theta)$ の増減を調べ，その最大値，最小値を求めよ．

(4) (3) の関数 $y=f(\theta)$ について，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を計算せよ．



$\boxed{\mathbf{2}}$ O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ をとる．ただし，O，A，B は一直線上にないものとする．$0<t<1$ として，線分 AO を $t:(1-t)$ に内分する点を P_t，線分 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q_t，さらに，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点を R_t とし，$\mathrm{R}_0=\mathrm{A}$，$\mathrm{R}_1=\mathrm{B}$ とする．また，t が 0 から 1 まで動くときに点 R_t の軌跡として得られる曲線を S とし，点 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおく．以下に答えよ．

(1) 3 点 P_t，Q_t，R_t の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_t$，$\vec{q}_t$，$\vec{r}_t$ とおく．$\vec{p}_t$，$\vec{q}_t$，$\vec{r}_t$ を t と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) R_t の座標を t，a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ．

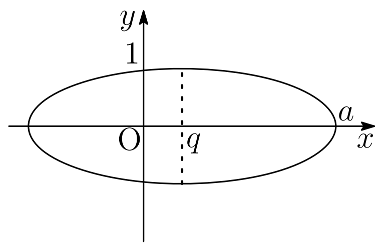
(3) $0<t<1$ のとき，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ は R_t で曲線 S と接することを示せ．

(4) 2 点 A，B の座標がそれぞれ $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,-1)$ で与えられるとき，線分 AO，OB，および曲線 S で囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 図の楕円

$$\frac{(x-q)^2}{s^2}+\frac{y^2}{t^2}=1 \quad (q>0,\ s>0,\ t>0)$$

は，2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通るとする．ただし，$a>0$ である．以下に答えよ．



(1) s^2，t^2 を q，a を用いて表せ．

(2) $s^2>0$，$t^2>0$ の条件から，q の取り得る値の範囲を a を用いて表せ．

(3) q が (2) で求めた範囲を動くとき，楕円の面積 $S=\pi st$ が最小となる q の値と，そのときの楕円の面積を a を用いて表せ．

(4) (3) で求めた面積最小の楕円が円となるときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n 人中から 1 名の代表者をジャンケンの勝者により選ぶとする．勝者が 1 人になるまでジャンケンを続け，最終的な勝者 1 名を代表者とする．以下に答えよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{k\to\infty} kp^k=0\ (0<p<1)$ を用いてもよい．

(1) $n=2$ のとき，1 回目のジャンケンで代表者が選ばれる確率を求めよ．

(2) $n=2$ のとき，m 回目のジャンケンではじめて代表者が選ばれる確率 p_m を求めよ．

(3) p_m を (2) で求めた確率とし，k を正の整数とする．このとき，和 $E_k=\displaystyle\sum_{m=1}^{k} mp_m$ を求めよ．

(4) $n=2$ のとき，代表者が選ばれるまでのジャンケンの回数の期待値 E を求めよ．

(5) $n=3$ のとき，1 回目のジャンケンで代表者が選ばれる確率 q_1，2 人勝ち残る確率 q_2，3 人とも残ってしまう確率 q_3 を求めよ．

5 長さ n $(n \geqq 1)$ の 0 または 1 の数の列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が与えられたとき，2 進法で $a_1 a_2 \cdots a_n$ と表される数を 3 で割った余り R を求めたい．a_1 はつねに 1 であるものとして，以下に答えよ．解答で用いる数はすべて 10 進法を用いて表すこと．

(1) たとえば，$n = 5$，$a_1 = 1$，$a_2 = 0$，$a_3 = 1$，$a_4 = 1$，$a_5 = 0$ が与えられた場合，2 進法で 10110 と表される数は $\boxed{\text{（ア）}}$ であり，それを 3 で割った余り R は $\boxed{\text{（イ）}}$ である．空欄 (ア)，(イ) に当てはまる数は何か．

(2) この問題を解く方法として，2 進法で表される数 S を計算し，それを 3 で割った余りを求めるアルゴリズム 1 が考えられる．ここで，つぎの性質を用いる．

「2 進法で $a_1 a_2 a \cdots a_i$ と表される数を S_i $(1 \leqq i \leqq n)$ とし，$S_0 = 0$ とする．このとき，$S_i = \boxed{\text{（ウ）}}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ が成り立つ」

空欄 (ウ) に当てはまる数は何か．S_{i-1} と a_i を用いた式で答えよ．また，アルゴリズム 1 の空欄 (エ) に当てはまる式を求めよ．ただし，アルゴリズム中における記述「$X \leftarrow Y$」は，Y の値あるいは Y を実行して得られた値を変数 X に格納することを意味する．

アルゴリズム 1	
①	$S \leftarrow 0$
②	$i \leftarrow 1$
③	$A \leftarrow a_1$
④	$S \leftarrow \boxed{\text{（エ）}}$
⑤	$i \leftarrow i + 1$
⑥	$i \leqq n$ のとき ③ に戻る
⑦	$R \leftarrow S$ を 3 で割った余り
⑧	R を出力する

(3) アルゴリズム 1 を実際のコンピュータで動作させる場合には，計算機が扱うことができる整数の範囲が限られているため，n が大きいときには S を求めることができなくなるという問題が生じる．この問題を避けるためには，次の性質を用いることが考えられる．

「S_i を 3 で割った余りを R_i とし，$R_0 = 0$ とする．このとき，$1 \leqq i \leqq n$ に対して，R_i は R_{i-1} と a_i の値だけから定まる」

アルゴリズム 2 は，$R_{i-1} = x$，$a_i = y$ のときの R_i の値を $T(x,\ y)$ とする下のような表を用いて R を求めるものである．$T(0,\ 0)$ から $T(2,\ 1)$ までのすべての値を求めよ．

アルゴリズム 2

① $R \leftarrow 0$
② $i \leftarrow 1$
③ $A \leftarrow a_1$
④ $R \leftarrow T(R,\ A)$
⑤ $i \leftarrow i + 1$
⑥ $i \leqq n$ のとき ③ に戻る
⑦ R を出力する

$T(x,\ y)$

$x \backslash y$	0	1
0	$T(0,\ 0)$	$T(0,\ 1)$
1	$T(1,\ 0)$	$T(1,\ 1)$
2	$T(2,\ 0)$	$T(2,\ 1)$

(4) $n = 5$，$a_1 = 1$，$a_2 = 0$，$a_3 = 1$，$a_4 = 1$，$a_5 = 0$ が与えられたとき，アルゴリズム 2 における ④ が実行された直後の R の値の変化を右の表の形で解答せよ．

i	1	2	3	$\cdots$
R				

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 円 $x^2+(y-1)^2=1$ の中心 $(1,\ 0)$ を C とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=(\sin\theta,-\cos\theta)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(0,\ 1)+(\sin\theta,-\cos\theta)=(\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$

よって　　$\mathbf{Q}(\sin\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{1}-\cos\boldsymbol{\theta})$

(2) $\mathrm{QP}=\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}=\theta$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ の向きは，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\mathrm{QP}\left(\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ -\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\theta(-\cos\theta,-\sin\theta)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$$=(\sin\theta,\ 1-\cos\theta)+\theta(-\cos\theta,-\sin\theta)$$
$$=(\sin\theta-\theta\cos\theta,\ 1-\cos\theta-\theta\sin\theta)$$

よって　　$\mathbf{P}(\sin\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}\cos\boldsymbol{\theta},\ \mathbf{1}-\cos\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}\sin\boldsymbol{\theta})$

(3) (2) の結果から，$f(\theta)=1-\cos\theta-\theta\sin\theta$ であるから

$$f'(\theta)=\sin\theta-\sin\theta-\theta\cos\theta=-\theta\cos\theta$$

したがって，$f(\theta)$ の増減表は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	0	$\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2

よって，$\theta=\pi$ のとき**最大値 2**，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき **最小値** $\mathbf{1}-\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

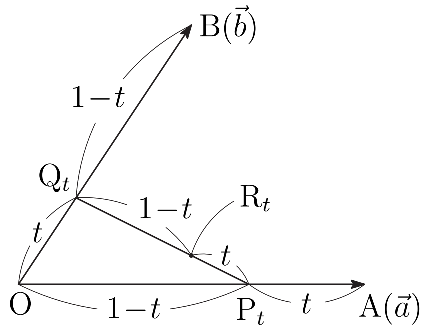
(4) (2) の結果により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta-\theta\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\Big[\ \theta-\sin\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\cos\theta)'\,d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}-1+\Big[\ \theta\cos\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}-1-\Big[\ \sin\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}-\mathbf{2}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\quad \boldsymbol{\vec{p_t} = (1-t)\vec{a},\ \vec{q_t} = t\vec{b}}$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{r}_t &= (1-t)\vec{p}_t + t\vec{q}_t \\ &= (1-t)\cdot(1-t)\vec{a} + t\cdot t\vec{b} \\ &= \boldsymbol{(1-t)^2\vec{a} + t^2\vec{b}}\end{aligned}$$



(2) (1) の結果から

$$\vec{r}_t = (1-t)^2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)^2a_1 + t^2b_1 \\ (1-t)^2a_2 + t^2b_2 \end{pmatrix}$$

よって $\quad \boldsymbol{\mathrm{R}_t((1-t)^2a_1 + t^2b_1,\ (1-t)^2a_2 + t^2b_2)}$

(3) (1) の結果から

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_t = -2(1-t)\vec{a} + 2t\vec{b} = -2\vec{p}_t + 2\vec{q}_t = 2(\vec{q}_t - \vec{p}_t) = 2\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t}$$

よって，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ は点 R_t で曲線 S と接する．

(4) A(2, 1)，B(2, −1) のとき，(2) の結果から

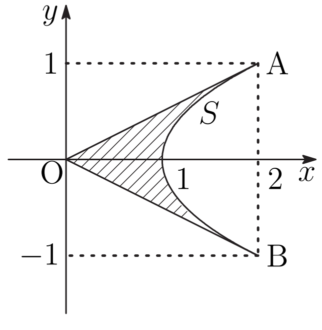
$$\vec{r}_t = (1-t)^2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4t+4t^2 \\ 1-2t \end{pmatrix}$$

R_t の座標を $(x,\ y)$ とすると $\quad x = 2-4t+4t^2,\ y = 1-2t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

したがって，S の方程式は $\quad x = y^2+1 \quad (-1 \leqq y \leqq 1)$

求める面積は，右の図の斜線部分で

$$\begin{aligned}&2\int_0^1 \{(y^2+1) - 2y\}\,dy \\ =&2\int_0^1 (y-1)^2\,dy \\ =&2\left[\frac{1}{3}(y-1)^3\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$



解説 OA，OB は S のそれぞれ A，B における接線であるから，求める面積は，S と直線 AB で囲まれた部分の面積の $\dfrac{1}{2}$ である[1]．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf の $\boxed{\mathbf{1}}$ を参照

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 楕円 $\dfrac{(x-q)^2}{s^2}+\dfrac{y^2}{t^2}=1$ は 2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通るから

$$\frac{(a-q)^2}{s^2}=1, \quad \frac{q^2}{s^2}+\frac{1}{t^2}=1$$

上の第 1 式から　$\boldsymbol{s^2=(a-q)^2}$　これを上の第 2 式に代入すると

$$\frac{q^2}{(a-q)^2}+\frac{1}{t^2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{t^2=\frac{(a-q)^2}{a(a-2q)}}$$

(2) $s^2>0$ より　$q\neq a$，　$t^2>0$ より　$a(a-2q)>0$

$a>0$ であるから　$a-2q>0$　よって　$\boldsymbol{0<q<\dfrac{a}{2}}$

(3) (1) の結果から　$s^2t^2=\dfrac{(a-q)^4}{a(a-2q)}$

ゆえに　$\dfrac{1}{s^2t^2}=\dfrac{a(a-2q)}{(a-q)^4}=\dfrac{2a(a-q)-a^2}{(a-q)^4}=\dfrac{2a}{(a-q)^3}-\dfrac{a^2}{(a-q)^4}$

したがって　$\dfrac{a^2}{s^2t^2}=\dfrac{2a^3}{(a-q)^3}-\dfrac{a^4}{(a-q)^4}$

$u=\dfrac{a}{a-q}$ とおくと　$\dfrac{a^2}{s^2t^2}=2u^3-u^4 \quad (1<u<2)$

$f(u)=2u^3-u^4$ とすると　$f'(u)=6u^2-4u^3=2u^2(3-2u)$

u	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	(1)	$\nearrow$	$\frac{27}{16}$	$\searrow$	(0)

したがって　$0<\dfrac{a^2}{s^2t^t}\leqq\dfrac{27}{16}$　すなわち　$st\geqq\dfrac{4}{3\sqrt{3}}a$

上の第 2 式において，等号が成立するとき

$$\frac{a}{a-q}=\frac{3}{2} \quad \text{すなわち} \quad q=\frac{a}{3}$$

よって，$S=\pi st$ は，$\boldsymbol{q=\dfrac{a}{3}}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi a}$ をとる．

(4) このとき，$s^2=t^2$ であるから，(1) の結果から　$a(a-2q)=1$

これに $q=\dfrac{a}{3}$ を代入すると　$\dfrac{1}{3}a^2=1$　よって　$\boldsymbol{a=\sqrt{3}}$

$\boxed{4}$ (1) 1回目のジャンケンで代表者が選ばれない確率は $\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1-\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) p_m は，$m-1$ 回目まで代表者が選ばれず，m 回目で代表者が選ばれる確率であるから

$$p_m=\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\times\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}}$$

(3) $E_k=\displaystyle\sum_{m=1}^{k}mp_m$ および $p_{m-1}=3p_m$ より

$$\begin{aligned}E_k&=\sum_{m=0}^{k-1}mp_m+kp_k=\sum_{m=1}^{k}(m-1)p_{m-1}+kp_k\\&=3\sum_{m=1}^{k}(m-1)p_m+kp_k\\&=3\sum_{m=1}^{k}mp_m-3\sum_{m=1}^{k}p_m+kp_k\\&=3E_k-3\sum_{m=1}^{k}p_m+kp_k\end{aligned}$$

したがって $E_k=\dfrac{3}{2}\displaystyle\sum_{m=1}^{k}p_m-\dfrac{1}{2}kp_k=\dfrac{3}{2}\sum_{m=1}^{k}\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{m-1}-\dfrac{1}{2}k\cdot\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}-k\left(\frac{1}{3}\right)^k=\boldsymbol{\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}+k\right)\left(\frac{1}{3}\right)^k}$$

(4) (3) の結果および $\displaystyle\lim_{k\to\infty}kp^k=0\ (0<p<1)$ より

$$E=\lim_{k\to\infty}E_k=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k-k\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(5) $q_1=q_2=\dfrac{3}{3^3}\times3=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$q_3=1-(q_1+q_2)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $10110_{(2)} = 2^4 + 2^2 + 2^1 = 22,\ \ 22 \div 3 = 7 \cdots 1$

(ア) **22** (イ) **1**

(2) $S_i = a_1{\cdot}2^{i-1} + a_2{\cdot}2^{i-2} + \cdots + a_{i-1}{\cdot}2 + a_i$

$= 2(a_1{\cdot}2^{i-1} + a_2{\cdot}2^{i-2} + \cdots + a_{i-1}) + a_i$

$= S_{i-1} + a_i$

(ウ) $\boldsymbol{2S_{i-1} + a_i}$ (エ) $\boldsymbol{2S + A}$

(3) (2) の結果から，$T(x,\ y)$ は $2x + y$ を 3 で割った余りであるから

$$T(0,\ 0) = \mathbf{0},\ \ T(0,\ 1) = \mathbf{1},\ \ T(1,\ 0) = \mathbf{2},$$
$$T(1,\ 1) = \mathbf{0},\ \ T(2,\ 0) = \mathbf{1},\ \ T(2,\ 1) = \mathbf{2}$$

(4) (3) の結果から

$$R_1 = T(R_0,\ a_1) = T(0,\ 1) = 1$$
$$R_2 = T(R_1,\ a_2) = T(1,\ 0) = 2$$
$$R_3 = T(R_2,\ a_3) = T(2,\ 1) = 2$$
$$R_4 = T(R_3,\ a_4) = T(2,\ 1) = 2$$
$$R_5 = T(R_4,\ a_5) = T(2,\ 0) = 1$$

よって

i	1	2	3	4	5
R	**1**	**2**	**2**	**2**	**1**