

令和 7 年度 九州工業大学 2 次試験後期日程 (数学問題)

工学部・情報工学部 令和 7 年 3 月 12 日

数 I・II・III・A・B・C (120 分)

問題 1 2 3 4

1 座標平面において, t を媒介変数として

$$\begin{cases} x = 2 \sin t + \sin 2t \\ y = 2 \cos t - \cos 2t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

で表される曲線を C とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ および $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表せ.
- (2) $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$ のとき, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ を示せ.
- (3) 曲線 C の長さ L を求めよ.
- (4) 曲線 C と x 軸および 2 直線 $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

2 座標平面上に曲線

$$C: y = \sqrt{2x^2 + 4x} \quad (x \geq 0)$$

がある. 曲線 C 上の点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ および x 軸上の点 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を以下のように定める.

- 点 P_1 の座標を $(1, \sqrt{6})$ とする.
- $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 曲線 C の点 P_n における法線と x 軸の交点を Q_n とし, 点 Q_n を通り y 軸に平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする.

次の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C の点 P_1 における法線の方程式を求めよ. また, 点 Q_1 の x 座標を求めよ.
- (2) 自然数 n に対して, 点 P_n の x 座標を x_n とする. x_{n+1} を x_n を用いて表せ.
- (3) (2) で定めた数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) 自然数 n に対して, $\triangle P_n Q_n Q_{n+1}$ の面積を S_n とし, $\triangle P_n P_{n+1} Q_{n+1}$ の面積を T_n とする. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ.

- 3 a を正の定数とする．座標空間において，点 $A(0, 0, a)$ を中心とする半径 a の球面を S とし，球面 S 上の 2 点 $N(0, 0, 2a)$ ， $B\left(b, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ($b > 0$) をとる．また，点 N と異なる球面 S 上の点 $P(p, q, r)$ について，直線 NP と xy 平面の交点を $Q(X, Y, 0)$ とする．次の問いに答えよ．

- (1) b を a を用いて表せ．
- (2) X と Y を p, q, r, a を用いて表せ．
- (3) 点 P が点 B と一致し， $\triangle APQ$ の面積が $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ となる時， a の値を求めよ．
- (4) a を (3) で求めた値とする．点 B を通り， yz 平面に平行な平面を α とし， S と α が交わってできる図形を C とする．点 P が図形 C 上を動くとき， xy 平面における点 Q の軌跡を求めよ．

- 4 整数 312 について

$$312 = 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 4$$

が成り立つので，7 進法で表すと $312 = 624_{(7)}$ である．次の問いに答えよ．

- (1) 2025 を 7 進法で表せ．
- (2) 自然数 k に対して，2025 以下の自然数のうち 7^k の倍数の個数を N_k とする． N_1, N_2, N_3, N_4 を求め，これらを 7 進法で表せ．
- (3) 2025! の素因数分解を $2025! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdots$ と表したとき，整数 d を求めよ．
- (4) ${}_{2025}C_{312}$ の素因数分解を ${}_{2025}C_{312} = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w \cdots$ と表したとき，整数 w を求めよ．
- (5) 2025! を 2310 進法で表したとき，末尾に連続して並ぶ 0 の個数 Z を求めよ．

解答例

- 1** (1) $x = 2 \sin t + \sin 2t$, $y = 2 \cos t - \cos 2t$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2 \cos t + 2 \cos 2t \\ \frac{dy}{dt} &= -2 \sin t + 2 \sin 2t \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{-2 \sin t + 2 \sin 2t}{2 \cos t + 2 \cos 2t} = \frac{-\sin t + \sin 2t}{\cos t + \cos 2t}\end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から, $f(t) = -\sin t + \sin 2t$, $g(t) = \cos t + \cos 2t$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2g(t), \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \right\} \bigg/ \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2} \cdot \frac{1}{2g(t)} = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{2g(t)^3}, \\ f'(t)g(t) - f(t)g'(t) &= (-\sin t + \sin 2t)'(\cos t + \cos 2t) \\ &\quad - (-\sin t + \sin 2t)(\cos t + \cos 2t)' \\ &= (-\cos t + 2 \cos 2t)(\cos t + \cos 2t) \\ &\quad - (-\sin t + \sin 2t)(-\sin t - 2 \sin 2t) \\ &= 1 + \cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t = 1 + \cos 3t\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$ において

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 + \cos 3t}{2(\cos t + \cos 2t)^3} = \frac{1 + \cos 3t}{2(\cos t + 1)^3(2 \cos t - 1)^3} > 0$$

- (3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (2 \cos t + 2 \cos 2t)^2 + (-2 \sin t + 2 \sin 2t)^2 \\ &= 8 + 8(\cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t) \\ &= 8(1 + \cos 3t) = 16 \cos^2 \frac{3t}{2}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}L &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos \frac{3t}{2} dt \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{3t}{2} dt = \frac{16}{3} \left[\sin \frac{3t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

(4) x, y の値の範囲は

x	$-\frac{3\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}$
t	$-\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos t - \cos 2t = 2 \cos t - 2 \cos^2 t + 1 \\ &= 2 \cos t(1 - \cos t) + 1 > 0 \end{aligned}$$

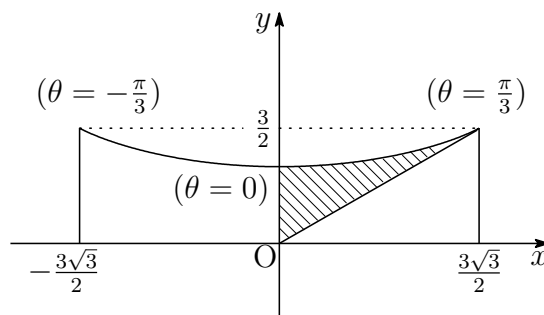
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} y \, dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} y \frac{dx}{dt} \, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos t - \cos 2t)(2 \cos t + 2 \cos 2t) \, dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 t - 2 \cos^2 2t + 2 \cos 2t \cos t) \, dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + 2 \cos 2t - \cos 4t + \cos 3t + \cos t) \, dt \\ &= 2 \left[t + \sin 2t - \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{3} \sin 3t + \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \pi + \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{別解 } xy' - x'y &= (2 \sin t + \sin 2t)(-2 \sin t + 2 \sin 2t) \\ &\quad - (2 \cos t + 2 \cos 2t)(2 \cos t - \cos 2t) \\ &= -2 - 2 \cos 3t \end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理の定理により (積分区間は偏角の正の向きにとる)¹

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (-2 - 2 \cos 3t) \, dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \left[1 + \frac{1}{3} \sin 3t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{3} + \frac{9\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf [5]

2 (1) $C: y = \sqrt{2x^2 + 4x}$ より $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x}}$

$$x=1 \text{ のとき } y' = \frac{4}{\sqrt{6}} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{y'} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

C 上の点 $P_1(1, \sqrt{6})$ における法線の方程式は

$$y - \sqrt{6} = -\frac{\sqrt{6}}{4}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{\sqrt{6}}{4}(x-5)$$

この法線と x 軸との交点 Q_1 の x 座標は 5

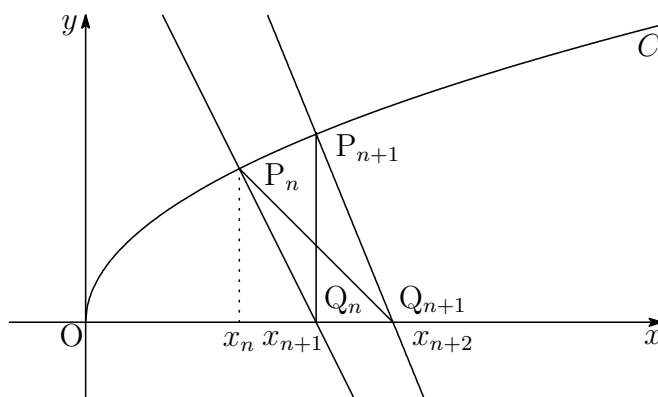
(2) $x = x_n$ のとき $y' = \frac{2x_n+2}{\sqrt{2x_n^2+4x_n}}$ ゆえに $-\frac{1}{y'} = -\frac{\sqrt{2x_n^2+4x_n}}{2x_n+2}$

C 上の点 $P_n(x_n, \sqrt{2x_n^2+4x_n})$ における法線の方程式は

$$y - \sqrt{2x_n^2+4x_n} = -\frac{\sqrt{2x_n^2+4x_n}}{2x_n+2}(x-x_n)$$

$$y = -\frac{\sqrt{2x_n^2+4x_n}}{2x_n+2}(x-3x_n-2)$$

この法線と x 軸との交点の x 座標 x_{n+1} は $x_{n+1} = 3x_n + 2$



(3) $x_1 = 1$, $x_{n+1} + 1 = 3(x_n + 1)$ より, $\{x_n + 1\}$ は, 初項 $x_1 + 1 = 2$, 公比 3 の等比数列であるから

$$x_n + 1 = (x_1 + 1) \cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad x_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

(4) 点 P_n の y 座標を y_n とすると, (3) の結果から

$$y_n = \sqrt{2x_n^2 + 4x_n} = \sqrt{2(x_n + 1)^2 - 2} = \sqrt{8 \cdot 3^{2n-2} - 2}$$

$\triangle P_n Q_n Q_{n+1}$ の面積 S_n は, (2) の結果を利用して

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(x_{n+2} - x_{n+1})y_n \\ &= \frac{1}{2}\{(3x_{n+1} + 2) - (3x_n + 2)\}y_n \\ &= \frac{3}{2}(x_{n+1} - x_n)y_n \end{aligned}$$

$S_n + T_n$, すなわち, 四角形 $P_n Q_n Q_{n+1} P_{n+1}$ の面積は

$$\begin{aligned} S_n + T_n &= \frac{1}{2}(x_{n+2} - x_n)y_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\{(x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)\}y_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\{3(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+1} - x_n)\}y_{n+1} \\ &= 2(x_{n+1} - x_n)y_{n+1} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{S_n + T_n}{S_n} &= \frac{2(x_{n+1} - x_n)y_{n+1}}{\frac{3}{2}(x_{n+1} - x_n)y_n} \\ \frac{T_n}{S_n} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8 \cdot 3^{2n} - 2}{8 \cdot 3^{2n-2} - 2}} - 1 \\ &= 4 \sqrt{\frac{8 \cdot 3^{2n} - 2}{8 \cdot 2^{2n} - 18}} - 1 \end{aligned}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 \sqrt{\frac{8 - 2 \cdot 3^{-2n}}{8 - 18 \cdot 3^{-2n}}} - 1 \right) = 4 \sqrt{\frac{8}{8}} - 1 = \mathbf{3}$ ■

- 3** (1) 球面 S の方程式は $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$

点 $B\left(b, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ は S 上の点であるから ($a > 0, b > 0$)

$$b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2 = a^2 \quad \text{よって} \quad b = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

- (2) S 上の z 座標が $2a$ となる点は、点 N に限るから、点 N と異なる点 $P(p, q, r)$ の z 座標について

$$r \neq 2a \quad \text{ゆえに} \quad 2a - r \neq 0$$

直線 NP の方程式を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \overrightarrow{ON} + t\overrightarrow{NP} \\ &= (0, 0, 2a) + t(p, q, r - 2a) \end{aligned}$$

この直線は点 $Q(X, Y, 0)$ を通るから

$$(X, Y, 0) = (0, 0, 2a) + t(p, q, r - 2a)$$

上式の z 座標について ($r - 2a \neq 0$)

$$0 = 2a + t(r - 2a) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{2a}{2a - r}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad (X, Y, 0) &= (0, 0, 2a) + \frac{2a}{2a - r}(p, q, r - 2a) \\ &= \left(\frac{2ap}{2a - r}, \frac{2aq}{2a - r}, 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad X = \frac{2ap}{2a - r}, \quad Y = \frac{2aq}{2a - r}$$

(3) (1) の結果から $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

点 $P(p, q, r)$ が点 B と一致するから

$$p = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad q = \frac{a}{2}, \quad r = \frac{a}{2}$$

これらを (2) の結果に代入すると $X = \frac{4a}{3\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{2a}{3}$

$A(0, 0, a), P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), Q\left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}, \frac{2a}{3}, 0\right)$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}, \frac{2a}{3}, -a\right), \\ |\overrightarrow{AP}|^2 &= a^2, \quad |\overrightarrow{AQ}|^2 = \frac{7}{3}a^2, \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

したがって, $\triangle APQ$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle APQ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{AQ}|^2 - (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 \cdot \frac{7}{3}a^2 - \left(\frac{3}{2}a^2\right)^2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

この三角形の面積が $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ であるから ($a > 0$)

$$\frac{a^2}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{これを解くと} \quad a = \sqrt{2}$$

別解 $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{AQ} = \left(\frac{4a}{3\sqrt{2}}, \frac{2a}{3}, -a\right)$ より

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ} = \left(-\frac{a^2}{6}, \frac{a^2}{3\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}| = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}$$

したがって $\triangle APQ = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AQ}| = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$

(4) (3) の結果から, S の方程式は $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 2$

点 $B\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通り, yz 平面に平行な平面 α の方程式は

$$x = 1$$

したがって, S と α が交わってできる図形 C の方程式は

$$x = 1, \quad y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 1$$

点 $P(p, q, r)$ は C 上の点であるから

$$p = 1, \quad q^2 + (r - \sqrt{2})^2 = 1 \quad (*)$$

(2) の結果に $a = \sqrt{2}$ を代入すると

$$X = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - r}, \quad Y = \frac{2\sqrt{2}q}{2\sqrt{2} - r}$$

上の 2 式から, $X \neq 0$ に注意して

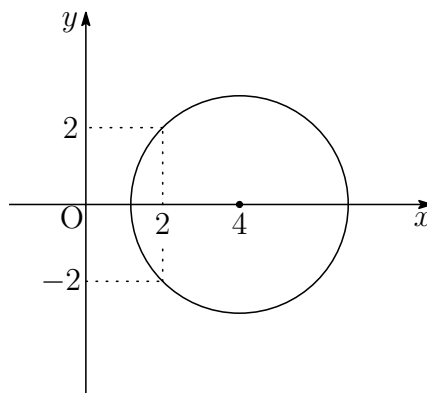
$$q = \frac{Y}{X}, \quad r - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{X} \quad (**)$$

(**) を (*) の第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{X}\right)^2 &= 1 \\ Y^2 + (\sqrt{2}X - 2\sqrt{2})^2 &= X^2 \\ X^2 - 8X + Y^2 + 8 &= 0 \\ (X - 4)^2 + Y^2 &= 8 \end{aligned}$$

よって, 点 Q の軌跡の方程式は $(x - 4)^2 + y^2 = 8$

点 Q の軌跡は, 中心 $(4, 0)$, 半径 $2\sqrt{2}$ の円



2025 年 東北大理系 5 番

S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする．また，点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする．点 P と点 N を通る直線 ℓ と xy 平面との交点を Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ．
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする．直線 m と球面 S の交点のうち，点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ．
- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り，ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える．点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき，点 Q は xy 平面上の円周を動くことを示せ．

解答 (1) S 上の z 座標が 1 となる点は、点 N に限るから、点 N と異なる点 $P(a, b, c)$ の z 座標について

$$c \neq 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 - c \neq 0$$

直線 NP の方程式を媒介変数 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \overrightarrow{ON} + t\overrightarrow{NP} \\ &= (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1) \end{aligned}$$

この直線は点 Q を通るから

$$\overrightarrow{OQ} = (0, 0, 1) + t(a, b, c - 1)$$

上式の z 座標について ($1 - c \neq 0$)

$$0 = 1 + t(c - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{1 - c}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OQ} = (0, 0, 1) + \frac{1}{1 - c}(a, b, c - 1) = \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c}, 0 \right)$$

$$\text{よって} \quad Q \left(\frac{a}{1 - c}, \frac{b}{1 - c}, 0 \right)$$

(2) (1) の結果を利用して

$$p = \frac{a}{1 - c}, \quad q = \frac{b}{1 - c} \quad (*)$$

とおくと、 $P(a, b, c)$ は S 上の点であるから $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

これから $a^2 + b^2 = 1 - c^2$ を利用すると

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= \left(\frac{a}{1 - c} \right)^2 + \left(\frac{b}{1 - c} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{(1 - c)^2} \\ &= \frac{1 - c^2}{(1 - c)^2} = \frac{1 + c}{1 - c} = -1 + \frac{2}{1 - c} \end{aligned}$$

$$\text{上式から} \quad 1 - c = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1} \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1}$$

$$(*) \text{ より } a = p(1 - c) = \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \quad b = 2q(1 - c) = \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}$$

$$\text{よって} \quad \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

別解 $N(0, 0, 1)$, $P(a, b, c)$, $Q(p, q, 0)$ とする.

P は直線 NQ 上の点であるから, 実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{ON} + k\overrightarrow{NQ} \quad (P \neq N \text{ より, } k \neq 0) \\ &= (0, 0, 1) + k(p, q, -1) \\ &= (kp, kq, 1 - k)\end{aligned}$$

P は S 上の点であるから

$$(kp)^2 + (kq)^2 + (1 - k)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k\{(p^2 + q^2 + 1)k - 2\} = 0$$

$$k \neq 0 \text{ より} \quad k = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

$$(3) \text{ 平面 } \alpha \text{ の方程式は} \quad 3(x - 0) + 4(y - 0) + 5\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 3x + 4y + 5z - \frac{5}{2} = 0$$

S 上の点 $P(a, b, c)$ が平面 α 上にあるとき

$$3a + 4b + 5c - \frac{5}{2} = 0 \quad (**)$$

直線 NP と xy 平面との交点を $Q(p, q, 0)$ とすると, (2) の結果から

$$(a, b, c) = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

これを (**) に代入すると

$$\frac{6p + 8q + 5(p^2 + q^2 - 1)}{p^2 + q^2 + 1} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{整理すると} \quad p^2 + q^2 + \frac{12}{5}p + \frac{16}{5}q - 3 = 0$$

$$\text{したがって, 点 } Q \text{ の軌跡の方程式は} \quad x^2 + y^2 + \frac{12}{5}x + \frac{16}{5}y - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = 7$$

よって, 点 Q の軌跡は中心 $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$, 半径 $\sqrt{7}$ の円である.

補足 S と共有点をもつ平面 α を

$$\alpha : \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \alpha_4$$

とし, S 上の点 $P(a, b, c)$, xy 平面上の点 $Q(p, q, 0)$ とすると

$$(a, b, c) = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

であり, $P(a, b, c)$ は α 上の点であるから

$$\frac{2\alpha_1 p + 2\alpha_2 q + \alpha_3(p^2 + q^2 - 1)}{p^2 + q^2 + 1} = \alpha_4$$

整理すると

$$2\alpha_1 p + 2\alpha_2 q - 2\alpha_3 = (\alpha_4 - \alpha_3)(p^2 + q^2 + 1)$$

(i) $\alpha_3 \neq \alpha_4$ のとき (α は N を通らない), 点 Q の軌跡の方程式は

$$\frac{2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y - 2\alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3} = x^2 + y^2 + 1$$

$$\text{すなわち} \quad \text{円} : x^2 + y^2 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3}x - \frac{2\alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_3}y + \frac{2\alpha_3}{\alpha_4 - \alpha_3} + 1 = 0$$

本題では $\alpha : 3x + 4y + 5z = \frac{5}{2}$ であるから

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 5, \alpha_4 = \frac{5}{2}$$

を上式に代入すればよい.

(ii) $\alpha_3 = \alpha_4$ のとき (α は N を通る), 点 Q の軌跡は

$$\text{直線} : \alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha_3$$

である.

4 (1)

7	2025	
7	289	... 2
7	41	... 2
	5	... 6

よって $2025 = \mathbf{5622}_{(7)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
 2025 &= 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 2 \\
 &= (5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2) \cdot 7 + 2 \\
 &= (5 \cdot 7 + 6) \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 2
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 2 = \mathbf{562}_{(7)}, \\
 N_2 &= 5 \cdot 7 + 6 = \mathbf{56}_{(7)}, \\
 N_3 &= \mathbf{5}_{(7)}, \\
 N_4 &= \mathbf{0}_{(7)}
 \end{aligned}$$

(3) (1) の結果から $N_1 = 289, N_2 = 41, N_3 = 5$

$$d = N_1 + N_2 + N_3 = 289 + 41 + 5 = \mathbf{335}$$

(4) ${}_{2025}C_{312} = \frac{2025!}{312! 1713!}$

7	312		7	1713	
7	44	... 4	7	244	... 5
	6	... 2	7	34	... 6
				4	... 6

よって

$$\begin{aligned}
 w &= d - (44 + 6) - (244 + 34 + 4) \\
 &= 335 - 50 - 282 = \mathbf{3}
 \end{aligned}$$

別解 ガウス記号を用いると

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{2025}{7} \right] + \left[\frac{2025}{7^2} \right] + \left[\frac{2025}{7^3} \right] &= 289 + 41 + 5 = 335 \\
 \left[\frac{312}{7} \right] + \left[\frac{312}{7^2} \right] &= 44 + 6 = 50 \\
 \left[\frac{1713}{7} \right] + \left[\frac{1713}{7^2} \right] + \left[\frac{1713}{7^3} \right] &= 244 + 34 + 4 = 282
 \end{aligned}$$

よって $w = 335 - 50 - 282 = \mathbf{3}$

(5) $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ より, 因数 11 に注目すればよい.

$$\begin{array}{r|rr}
 11 & 2025 & \\
 \hline
 11 & 184 & \cdots 1 \\
 \hline
 11 & 16 & \cdots 8 \\
 \hline
 & 1 & \cdots 5
 \end{array}$$

よって $Z = 184 + 16 + 1 = \mathbf{201}$

別解

$$\begin{aligned}
 Z &= \left[\frac{2025}{11} \right] + \left[\frac{2025}{11^2} \right] + \left[\frac{2025}{11^3} \right] \\
 &= 184 + 16 + 1 = \mathbf{201}
 \end{aligned}$$

■