令和 7 年度　九州工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和 7 年 2 月 25 日
数 I・II・III・A・B・C (120 分)

問題 1 2 3 4

1 2 つのさいころを同時に投げることを 1 回の試行とする．1 回の試行につき，2 つのさいころの出た目の和が奇数の場合は 1 点，偶数の場合は 2 点得られる．さらに，2 つのさいころの出た目が同じ場合は，追加で 1 点得られるとする．次の問いに答えよ．

(1) 5 回の試行のあとの合計得点の最小値と最大値を求めよ．

(2) 5 回の試行のあとの合計得点が 8 である確率を求めよ．

さらに，最初の試行から数えて n 回の試行のあとの合計得点が奇数である確率を a_n とする $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．

(3) a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(4) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(5) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(6) 5 回の試行のあとの合計得点が奇数であった．このとき，4 回の試行のあとの合計得点が奇数である条件付き確率を求めよ．

2 座標平面上の原点 O を頂点とし，点 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$ を焦点とし，直線 $x = -\frac{1}{4}$ を準線 l とする放物線を C とする．つまり，C は F と l からの距離が等しい点 P の軌跡である．C 上の 2 点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$, $\mathrm{Q}'(v,\ w)$ は，$s > v$，$t > 0$，$w < 0$ を満たし，さらに直線 OQ と直線 OQ′ は垂直であるとする．また，直線 QQ′ を m とする．次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C の方程式を求めよ．

(2) 直線 m の傾きを t を用いて表せ．

(3) 直線 m は t の値によらず，定点 E を通る．この E の座標を求めよ．

(4) 点 Q から y 軸に下ろした垂線を QR とし，直線 m と y 軸の交点を S とする．t の値が変化するとき，△QRS の面積 T の最小値を求めよ．

3 n が自然数のとき，関数 $y = x^n e^{-x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $n = 1$ の場合の関数 $y = xe^{-x}$ の最大値を求めよ．

(2) $n = 2$ の場合の関数 $y = x^2 e^{-x}$ の極値を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ の場合の関数 $y = x^n e^{-x}$ のグラフの変曲点を求めよ．

(4) (3) で求めた変曲点のうち，y 座標の値が最大のものはどれか．理由とともに答えよ．ただし，任意の実数 $t > 1$ に対して，$\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)^t > e^2$ が成り立つことを用いてよい．

(5) $I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^{-x}\,dx$ とおくとき，I_{n+1} を I_n の式で表せ．

4 原点を O とする座標空間に 3 点 $\mathrm{P}(b,\ a-b,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ b,\ a-b)$，$\mathrm{R}(b,\ 0,\ a-b)$ がある．ただし，a と b は，$a > b > 0$ を満たす実数とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 G は 2 点 P，R を通る直線上にあるものとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ が垂直であるとき，点 G の座標を，a，b を用いて表せ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ のなす角が 90° 以上となるための条件を，a，b を用いて表せ．

(3) △PQR の面積を，a，b を用いて表せ．

(4) 次の条件を満たす a の最大値を求めよ．ただし，$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ を用いてよい．

条件：a，b は自然数であり，$a > b$ を満たすすべての b に対して △PQR の面積が 10 未満である．

解答例

1 (1) 5 回の試行のすべて得点が 3 点であるとき，**最大値 15(点)**

5 回の試行のすべて得点が 1 点であるとき，**最小値 5(点)**

(2) 1 回の試行で得点が 1 点，2 点，3 点となる確率は，$p=\dfrac{1}{6}$ とおくと，それぞれ

$$\frac{18}{36}=3p,\quad \frac{12}{36}=2p,\quad \frac{6}{36}=p$$

5 回の試行の後の合計得点が 8 になる得点の組合せは

$$\{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2\},\ \{1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{5!}{2!3!}(3p)^2(2p)^3+\frac{5!}{3!1!1!}(3p)^3\cdot 2p\cdot p=720p^5+1080p^5$$
$$=1800p^5=\frac{1800}{6^5}=\boldsymbol{\frac{25}{108}}$$

＼	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	3	1	2	1	2	1
2	1	3	1	2	1	2
3	2	1	3	1	2	1
4	1	2	1	3	1	2
5	2	1	2	1	3	1
6	1	2	1	2	1	3

(3) 1 回の試行で得点が奇数となる確率は　$3p+p=4p=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

1 回の試行で得点が偶数となる確率は　$2p=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

したがって　　$a_1=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$,　　$a_2=\dfrac{2!}{1!1!}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

(4) (3) で示した試行の確率により

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}(1-a_n)=-\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{a_{n+1}=-\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}}$

(5) (4) の結果から　　$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$

$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

(6) 5 回の試行のあとの合計得点が奇数である事象を A とし，4 回の試行のあとの合計得点が奇数である事象を B とすると

$$P(A) = a_5 = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\} = \frac{122}{243}$$

$$P(A \cap B) = a_4 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^4\right\} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{243}$$

したがって，求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{40}{243} \Big/ \frac{122}{243} = \mathbf{\frac{20}{61}}$$

■

2 (1) 焦点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$，準線 $l : x = -\dfrac{1}{4}$ の放物線 C の方程式は

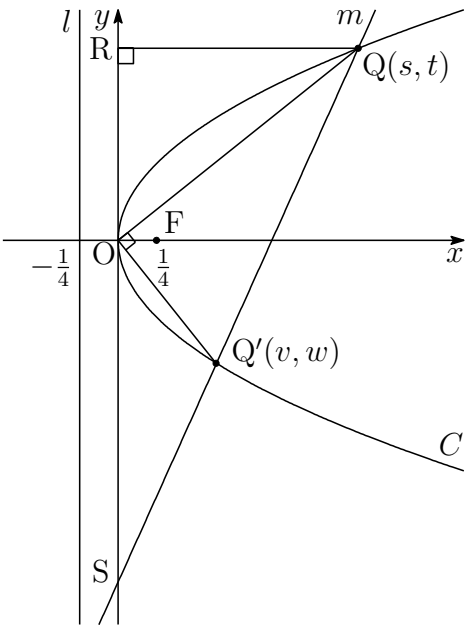
$$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} x \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y^2 = x}$$

(2) Q，Q' は C 上の点であるから　$\mathrm{Q}(t^2,\ t)$，$\mathrm{Q}'(w^2,\ w)$
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = 0$ より $(w < 0 < t)$

$$t^2 w^2 + tw = 0 \quad \text{ゆえに} \quad w = -\frac{1}{t} \quad \cdots ①$$

直線 m の傾きは

$$\frac{w - t}{w^2 - t^2} = \frac{1}{w + t} = \frac{1}{-\frac{1}{t} + t} = \frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t^2 - 1}}$$



(3) 直線 m は，点 $\mathrm{Q}(t^2,\ t)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{t^2 - 1}$ の直線であるから

$$y - t = \frac{t}{t^2 - 1}(x - t^2) \quad \text{ゆえに} \quad t(x - 1) + (1 - t^2)y = 0 \qquad (*)$$

上の第 2 式は，$x - 1 = 0,\ y = 0$，すなわち，$x = 1,\ y = 0$ のとき，すべての t について成立する．よって，求める点 E の座標は　$\boldsymbol{(1,\ 0)}$

(4) $s=t^2,\ v=w^2,\ s>v$ より　　$t^2>w^2$

① より $(t>0)$　$t^2>\dfrac{1}{t^2}$　ゆえに　$t^4>1$　すなわち　$t>1$

点 S の y 座標は，$(*)$ に $x=0$ を代入して

$$-t+(1-t^2)y=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{t}{1-t^2}$$

これと R の y 座標 t および Q の x 座標 t^2 より

$$T=\frac{1}{2}\left(t-\frac{t}{1-t^2}\right)t^2=\frac{t^5}{2(t^2-1)}$$

これを t で微分すると

$$T'=\frac{5t^4(t^2-1)-t^5\cdot 2t}{2(t^2-1)^2}=\frac{t^4(3t^2-5)}{2(t^2-1)^2}$$

$t>1$ における T の増減表は

t	(1)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\cdots$
T'		$-$	0	$+$
T		↘	極小	↗

よって　$t=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{25}{12}\sqrt{\dfrac{5}{3}}}$ ■

3 (1) $y = xe^{-x}$ より　$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大	↘

よって　$x = 1$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

(2) $y = x^2e^{-x}$ より　$y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

よって　$x = 0$ のとき **極小値 0**，$x = 2$ のとき **極大値** $\boldsymbol{\frac{4}{e^2}}$

(3) $y = x^ne^{-x}$ より $(n \geqq 3)$

$$\begin{aligned} y' &= nx^{n-1}e^{-x} - x^ne^{-x} \\ y'' &= n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - 2nx^{n-1}e^{-x} + x^ne^{-x} \\ &= (x^2 - 2nx + n^2 - n)x^{n-2}e^{-x} \\ &= (x - n + \sqrt{n}\,)(x - n - \sqrt{n}\,)x^{n-2}e^{-x} \end{aligned}$$

n が偶数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$n-\sqrt{n}$	$\cdots$	$n+\sqrt{n}$	$\cdots$
y''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

n が奇数のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$n-\sqrt{n}$	$\cdots$	$n+\sqrt{n}$	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

変曲点は　**n が偶数のとき $(n \pm \sqrt{n},\ (n \pm \sqrt{n}\,)^n e^{-n \mp \sqrt{n}})$ (複号同順)**
n が奇数のとき $(0,\ 0)$, $(n \pm \sqrt{n},\ (n \pm \sqrt{n}\,)^n e^{-n \mp \sqrt{n}})$ (複号同順)

(4) (3) で求めた 2 つの変曲点の y 座標を

$$y_1 = (n - \sqrt{n}\,)^n e^{-n+\sqrt{n}}, \quad y_2 = (n + \sqrt{n}\,)^n e^{-n-\sqrt{n}}$$

とおくと

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{(n+\sqrt{n}\,)^n e^{-n-\sqrt{n}}}{(n-\sqrt{n}\,)^n e^{-n+\sqrt{n}}} = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^n e^{-2\sqrt{n}} = \left\{\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^{\sqrt{n}} e^{-2}\right\}^{\sqrt{n}}$$

$\sqrt{n} > 1$ より　$\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^{\sqrt{n}} > e^2$　ゆえに　$\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^{\sqrt{n}} e^{-2} > 1$

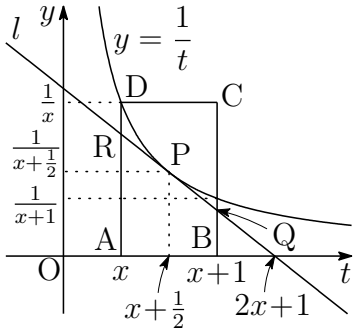
$y_2 > y_1$ であるから　　**$(n + \sqrt{n},\ (n + \sqrt{n}\,)^n e^{-n-\sqrt{n}})$**

(5) $I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^{-x}\,dx$ より

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^2 x^{n+1}e^{-x}\,dx = -\int_0^2 x^{n+1}(e^{-x})'\,dx \\ &= -\Big[\, x^{n+1}e^{-x} \,\Big]_0^2 + (n+1)\int_0^2 x^n e^{-x}\,dx \\ &= \boldsymbol{-2^{n+1}e^{-2} + (n+1)I_n} \end{aligned}$$

注意 $f'(\alpha) = 0$ であっても，$x = \alpha$ の前後で $f'(x)$ の符号が変わらないとき，$f(\alpha)$ は極値ではない．同様に，$f''(\beta) = 0$ であって，$x = \beta$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらないとき，点 $(\beta,\ f(\beta))$ は変曲点ではない[1] ．

補足 曲線 $y = \dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x + \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x > 0)$，l と直線 $t = x$，$t = x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y = \dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

したがって $\quad \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 1 < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

よって $\quad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

$s > 1$ とし，$x = \dfrac{s-1}{2}$ を上式に代入すると

$$\left(1+\frac{2}{s-1}\right)^{\frac{s-1}{2}} < e < \left(1+\frac{2}{s-1}\right)^{\frac{s}{2}}$$

上式の辺々を平方すると

$$\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{s-1} < e^2 < \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{s} \qquad (s > 1)$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2004.pdf 1

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(b,\ a-b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(b,\ 0,\ a-b)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=b^2+(a-b)^2,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=b^2$$

G は直線 PR 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ より

$$\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$$
$$(t-1)|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+t|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(2t-1)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=0$$
$$(2t-1)\{b^2+(a-b)^2\}-(2t-1)b^2=0$$
$$(2t-1)(a-b)^2=0$$

$a>b$ より，$a-b\neq 0$ であるから　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(b,\ \dfrac{a-b}{2},\ \dfrac{a-b}{2}\right)$

よって　　$\mathbf{G}\left(\boldsymbol{b},\ \dfrac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{a-b}}{\boldsymbol{2}}\right)$

(2) 3 点 $\mathrm{P}(b,\ a-b,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ b,\ a-b)$，$\mathrm{R}(b,\ 0,\ a-b)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(b,\ a-2b,\ b-a),\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=(b,-b,\ 0)$$

条件を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}\leqq 0$ であるから

$$b\cdot b+(a-2b)\cdot(-b)\leqq 0\quad \text{ゆえに}\quad b(3b-a)\leqq 0$$

$b>0$ であるから　$3b-a\leqq 0$　すなわち　$\boldsymbol{a\geqq 3b}$

(3) (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2=b^2+(a-2b)^2+(b-a)^2=2a^2-6ab+6b^2$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=b^2+(-b)^2=2b^2$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=b\cdot b+(a-2b)(-b)=b(3b-a)$$

したがって，△PQR の面積を S とすると $(a>b>0)$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2a^2-6ab+6b^2)\cdot 2b^2-b^2(3b-a)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3b^2(a-b)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}b(a-b)}$$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (b,\ a-2b,\ b-a)$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = (b, -b,\ 0)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QP}} \times \overrightarrow{\mathrm{QR}} &= (b(b-a),\ b(b-a),\ b(b-a)) \\ &= b(b-a)(1,\ 1,\ 1)\end{aligned}$$

したがって，△PQR の面積を S とすると $(a > b > 0)$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}} \times \overrightarrow{\mathrm{QR}}| = \frac{1}{2}|b(b-a)|\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}b(a-b)}$$

(4) (3) の結果から　$S < 10$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}b(a-b) < 10 \quad \text{ゆえに} \quad b(a-b) < \frac{20}{\sqrt{3}}$$

ここで　$121 < \left(\dfrac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 < 144$　ゆえに　$11 < \dfrac{20}{\sqrt{3}} < 12$

$a,\ b\ (a > b > 0)$ は自然数であるから　$b(a-b) \leqq 11$

$$a \leqq b + \frac{11}{b} \quad (b = 1, 2, \cdots, 11)$$

$f(b) = b + \dfrac{11}{b}$ とすると

$$\begin{aligned}f(b+1) - f(b) &= b + 1 + \frac{11}{b+1} - \left(b + \frac{11}{b}\right) \\ &= 1 - \frac{11}{b(b+1)} = \frac{b(b+1) - 11}{b(b+1)}\end{aligned}$$

したがって　$f(1) > f(2) > f(3) < f(4) < \cdots < f(11)$

$$f(3) = 3 + \frac{11}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

すべての b に対して $a \leqq f(b)$ を満たす最大の自然数 a は　**6**　■