令和６年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和 6 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 $x>-1$ の範囲で定義された関数 $g(x)$ を $g(x)=x-\log(x+1)$ とする．ただし，対数は $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を底とする自然対数とする．また，$a\ (0<a<1)$ を定数とし，2 つの曲線 $y=ag(x)$，$y=g(ax)$，および $x=t\ (t>0)$ によって囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．次に答えよ．

(1) 曲線 $y=g(x)$ は x 軸に接することを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{g(x)}{x}$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$，および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x)$ を調べよ．

(3) $x>-1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x)=ag(x)-g(ax)$ とする．このとき，$x>-1$ において，$f(x)\geqq 0$ であることを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} tS''(t)=\frac{3}{4}$ となる a の値を求めよ．

(5) a を (4) で求めた値とする．0 でない実数 b に対して，
$2\log(ab+1)=\log(b+1)$ が成り立つとする．このとき，b の値を求めよ．

(6) (4) と (5) で求めた a と b に対して，$S(b)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とする．関数 $f(x)$ に対して，$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ を n 回微分することによって得られる第 n 次導関数とする．また，$f^{(0)}(x) = f(x)$ とし，e は自然対数の底とする．次に答えよ．

(1) $g(x)$ と $h(x)$ を何回でも微分可能な関数とし，$f(x) = g(x)h(x)$ とする．このとき，$n = 1, 2, \cdots$ に対して，

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i g^{(i)}(x) h^{(n-i)}(x)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示せ．ただし，$i \geqq 1$ に対して，${}_n\mathrm{C}_i$ は n 個のものから i 個とった組合せの総数を表し，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ とする．

(2) b を定数とし，$F(x) = e^{\frac{1}{2}bx^2}$ とする．このとき，$F^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $F(x)$ を (2) で与えられた関数とする．このとき，$k = 0, 1, \cdots$ に対して，$F^{(2k+1)}(0)$ と $F^{(2k)}(0)$ を求めよ．

(4) a，b を定数とし，$f(x) = e^{ax+\frac{1}{2}bx^2}$ とする．このとき，$f^{(7)}(0)$ を求めよ．

3 箱Aには数字の1が記入されたカードと数字の2が記入されたカードがそれぞれ1枚ずつ，合計2枚入っている．箱Bには数字が記入されたカードが合計4枚入っている．これらの箱の1つに対して次の試行を行う．

> 箱からカード1枚を無作為に取り出し，カードの数字を調べてから箱に戻す．これを3回繰り返し，調べた3つの数の和を X とする．

次に答えよ．

(1) 箱Aに対する試行で，$X = 5$ となる確率を求めよ．

(2) 箱Bには数字の1が記入されたカードが1枚と数字の2が記入されたカードが3枚入っているとする．このとき，箱Bに対する試行で，$X = 5$ となる確率を求めよ．

(3) 箱Bには数字の1が記入されたカードが1枚と数字の2が記入されたカードが3枚入っているとする．このとき，箱Aと箱Bのいずれか1つを無作為に選択して試行を行ったところ，$X = 5$ であった．試行が行われた箱が箱Bである条件付き確率を求めよ．

(4) 箱Bを空にし，以下の手順を4回繰り返すことにより，箱Bに合計4枚のカードを入れる．この箱Bに対して試行を行ったところ，$X = 5$ であった．このとき，箱Bの中身が数字の1が記入されたカードが1枚と数字の2が記入されたカードが3枚である条件付き確率を求めよ．

(手順)

箱Aからカード1枚を無作為に取り出し，カードの数字を調べてから，箱Aに戻し，調べた数字を白紙のカードに記入し，その記入したカードを箱Bに入れる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．次に答えよ．

(1) $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，$y = [x]$ のグラフをかけ．

(2) a，b を実数とする．このとき，すべての実数 x に対して，$x + a < [x]$ が成り立つような a の最大値を求めよ．また，すべての実数 x に対して，$[x] \leqq x + b$ が成り立つような b の最小値を求めよ．

(3) $[x] - 3x + 3 = 0$ の解を求めよ．ただし，(2) を利用してもよい．

(4) $x^2 - 6[x] + 5 = 0$ の解を求めよ．

(5) $[x^2] - 6x + 5 = 0$ の解を求めよ．ただし，必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\cdots$ を利用してもよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(x) = x - \log(x+1)$ より　$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$　$\cdots$①

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \qquad (*)$$

よって，曲線 $y = g(x)$ は原点で x 軸と接する．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0} g(x) = \infty$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0} \frac{g(x)}{x} = \boldsymbol{-\infty}$

$\dfrac{g(x)}{x} = 1 - \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ より

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to0} \left\{1 - \log(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = 1 - \log e = \mathbf{0}$$

① より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \mathbf{1}$

別解 $(*)$ を利用すると

$$\lim_{x\to0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = \mathbf{0}$$

(3) ① より

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(x) - ag'(ax) = a\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - a\left(1 - \frac{1}{ax+1}\right) \\ &= a\left(\frac{1}{ax+1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{a(1-a)x}{(x+1)(ax+1)} \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ であるから，$x > -1$ における $f(x)$ の増減表は

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$f(0) = ag(0) - g(0) = 0$ であるから，$x > -1$ において　$f(x) \geqq 0$

(4) 2 曲線 $y=ag(x)$，$y=g(ax)$，および $x=t$ $(t>0)$ によって囲まれた図形の面積 $S(t)$ は，(3) の結果から

$$S(t)=\int_0^t \{ag(x)-g(ax)\}\,dx=\int_0^t f(x)\,dx$$

上式より，$S'(t)=f(t)$ であるから

$$S''(t)=f'(t)=\frac{a(1-a)t}{(t+1)(at+1)}$$

これから

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} tS''(t)&=\lim_{t\to\infty}\frac{a(1-a)t^2}{(t+1)(at+1)}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{a(1-a)}{\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(a+\frac{1}{t}\right)}=1-a\end{aligned}$$

$\lim_{t\to\infty} tS''(t)=\dfrac{3}{4}$ のとき　$1-a=\dfrac{3}{4}$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{4}}$

(5) $a=\dfrac{1}{4}$ を $2\log(ab+1)=\log b$ に代入すると

$$2\log\left(\frac{1}{4}b+1\right)=\log(b+1)\quad ゆえに\quad \left(\frac{1}{4}b+1\right)^2=b+1$$

整理すると　$b^2-8b=0$　これを解いて　$\boldsymbol{b=8}$

(6) $f(x)=ag(x)-g(ax)$，$g(x)=x-\log(x+1)$ より

$$\begin{aligned}f(x)&=a\{x-\log(x+1)\}-\{ax-\log(ax+1)\}\\&=-a\log(x+1)+\log(ax+1)\end{aligned}$$

$a=\dfrac{1}{4}$，$b=8$ であるから

$$\begin{aligned}S(b)&=\int_0^b f(x)\,dx=\int_0^b\{-a\log(x+1)+\log(ax+1)\}\,dx\\&=\Big[-a(x+1)\{\log(x+1)-1\}+\frac{1}{a}(ax+1)\{\log(ax+1)-1\}\Big]_0^b\\&=-a(b+1)\{\log(b+1)-1\}-a+\frac{1}{a}(ab+1)\{\log(ab+1)-1\}+\frac{1}{a}\\&=-\frac{9}{4}(\log 9-1)-\frac{1}{4}+12(\log 3-1)+4=\boldsymbol{\frac{15}{2}\log 3-6}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=g(x)h(x)$ とするとき，$n=1,2,\cdots$ に対して，次式を示す.

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(n-i)}(x) \tag{A}$$

［1］$n=1$ のとき，$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$ より，(A) は成立する.

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$f^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k-i)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x)&=\sum_{i=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_i\{g^{(i+1)}(x)h^{(k-i)}(x)+g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\}\\
&=g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i+1)}(x)h^{(k-i)}(x)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)+g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&=g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_{i-1} g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\\
&\qquad+\sum_{i=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)+g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&=g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=1}^{k}({}_k\mathrm{C}_{i-1}+{}_k\mathrm{C}_i)g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\\
&\qquad+g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&={}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}g^{(k+1)}(x)h(x)+\sum_{i=1}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)\\
&\qquad+{}_{k+1}\mathrm{C}_0 g(x)h^{(k+1)}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_i g^{(i)}(x)h^{(k+1-i)}(x)
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成立する.

［1］,［2］より，すべての自然数 n に対して，(A) が成立する.

(2) $F(x)=e^{\frac{1}{2}bx^2}$ より　$F^{(1)}(x)=e^{\frac{1}{2}bx^2}\left(\frac{1}{2}bx^2\right)'=\boldsymbol{bxe^{\frac{1}{2}bx^2}}$

(3) $F^{(1)}(x)=bxF(x)$ であるから，(1) の結論を適用して計算すると

$$\begin{aligned}F^{(n+1)}(x)&=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i(bx)^{(i)}F^{(n-i)}(x)\\&=bxF^{(n)}(x)+bnF^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

これに $x=0$ を代入すると

$$F^{(n+1)}(0)=bnF^{(n-1)}(0) \qquad (*)$$

(2) の結果より $F^{(1)}(0)=0$ を得る．$(*)$ に $n=2k$ を適用すると

$$F^{(2k+1)}(0)=\mathbf{0} \qquad (k=0,1,\cdots)$$

$(*)$ に $n=2j-1$ を代入すると　$F^{(2j)}(0)=b(2j-1)F^{(2j-2)}(0)$
$F^{(0)}(0)=1$ より，$F^{(2j)}(0)\neq 0$ に注意して $(j=1,2,\cdots)$

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{F^{(2j)}(0)}{F^{(2j-2)}(0)}=\prod_{j=1}^{k}\frac{b}{2}\cdot\frac{2j(2j-1)}{j}$$

$$F^{(2k)}(0)=\boldsymbol{\left(\frac{b}{2}\right)^k\frac{(2k)!}{k!}}$$

別解　$F(x)$ は偶関数であるから　$F(x)=\dfrac{F(x)+F(-x)}{2}$

$$F^{(n)}(x)=\frac{F^{(n)}(x)+(-1)^nF^{(n)}(-x)}{2}$$

$n=2k+1$，$x=0$ を代入すると　　$\boldsymbol{F^{(2k+1)}(0)=0}$

(4) $f(x)=e^{ax}F(x)$ であるから，(1)，(3) の結論を利用すると

$$\begin{aligned}f^{(7)}(x)&=\sum_{i=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_i(e^{ax})^{(i)}F^{(7-i)}(x)\\&=\sum_{i=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_ia^ie^{ax}F^{(7-i)}(x),\\f^{(7)}(0)&=\sum_{i=0}^{7}{}_7\mathrm{C}_ia^iF^{(7-i)}(0)\\&={}_7\mathrm{C}_1aF^{(6)}(0)+{}_7\mathrm{C}_3a^3F^{(4)}(0)\\&\qquad+{}_7\mathrm{C}_5a^5F^{(2)}(0)+{}_7\mathrm{C}_7a^7F^{(0)}(0)\\&=\boldsymbol{105ab^3+105a^3b^2+21a^5b+a^7}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 箱 A に対する試行で，$X=5$ となるのは，数字の 1 が 1 回，数字の 2 が 2 回である確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(2) 箱 B に対する試行で，$X=5$ となるのは，数字の 1 が 1 回，数字の 2 が 2 回である確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{27}{64}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{27}{64}}{\dfrac{3}{8}+\dfrac{27}{64}}=\boldsymbol{\frac{9}{17}}$$

(4) (i) 箱 B に数字の 1 が 3 枚，数字の 2 が 1 枚のとき，$X=5$ となる確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{64}$$

(ii) 箱 B に数字の 1 が 2 枚，数字の 2 が 2 枚のとき，$X=5$ となる確率は

$$\frac{3!}{1!2!}\left(\frac{2}{4}\right)^1\left(\frac{2}{4}\right)^2=\frac{24}{64}$$

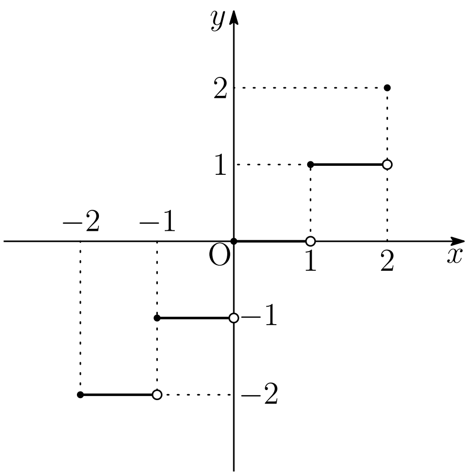
箱 B に数字の 1 が 3 枚，2 枚，1 枚となる場合の確率は，それぞれ

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{2^4}=\frac{1}{4},\quad \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2^4}=\frac{3}{8},\quad \frac{{}_4\mathrm{C}_1}{2^4}=\frac{1}{4}$$

よって，(i)，(ii) および (2) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{27}{64}}{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{9}{64}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{24}{64}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{27}{64}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $-2 \leqq x \leqq 2$ における $y = [x]$ のグラフは次のとおり．ただし，($\cdot$) は含み，($\circ$) は含まない．



(2) $x - 1 < [x] \leqq x$ であるから，a の最大値は $\mathbf{-1}$，b の最小値は $\mathbf{0}$

(3) $[x] = 3x - 3$ であるから

$$x - 1 < 3x - 3 \leqq x \quad \text{これを解くと} \quad \frac{2}{3} < x \leqq \frac{3}{2}$$

$x = \dfrac{1}{3}[x] + 1$ に注意して　$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{3}}$

(4) $[x] = \dfrac{x^2 + 5}{6}$ であるから　$x - 1 < \dfrac{x^2 + 5}{6} \leqq x$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 11 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 \leqq 0 \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad 1 \leqq x \leqq 5$$

$x = \sqrt{6[x] - 5}$ に注意して　$\boldsymbol{x = 1,\ \sqrt{7},\ \sqrt{13},\ \sqrt{19},\ 5}$

(5) $(*)$ $[x^2] = 6x - 5$ であるから　$x^2 - 1 < 6x - 5 \leqq x^2$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 4 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geqq 0 \end{cases}$$

これを解くと　$3 - \sqrt{5} < x \leqq 1,\ \ 5 \leqq x < 3 + \sqrt{5}$

(i) $3 - \sqrt{5} < x < 1$ のとき，$[x^2] = 0$ であるから，$(*)$ より

$$0 = 6x - 5 \quad \text{これを解くと} \quad x = \frac{5}{6}$$

(ii) $x = 1$ は $(*)$ を満たす.

(iii) $5 \leqq x < 3 + \sqrt{5}$ のとき，$25 \leqq x^2 < 14 + \sqrt{180}$ より，$[x^2] = 25,\ 26,\ 27$

$[x^2] = 25$ のとき　$25 = 6x - 5$　ゆえに　$x = 5$ (適する)

$[x^2] = 26$ のとき　$26 = 6x - 5$　ゆえに　$x = \dfrac{31}{6} = 5 + \dfrac{1}{6}$ (適する)

$$\left(5 + \frac{1}{6}\right)^2 = 25 + \frac{5}{3} + \frac{1}{36} = 26 + \frac{2}{3} + \frac{1}{36} = 26 + \frac{25}{36}$$

$[x^2] = 27$ のとき　$27 = 6x - 5$　ゆえに　$x = \dfrac{16}{3} = 5 + \dfrac{1}{3}$ (不適)

$$\left(5 + \frac{1}{3}\right)^2 = 25 + \frac{10}{3} + \frac{1}{9} = 28 + \frac{4}{9}$$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{x = \frac{5}{6},\ 1,\ 5,\ \frac{31}{6}}$