令和６年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和６年２月25日
数 I・II・III・A・B (120 分)

問題 [1] [2] [3] [4]

1 自然数 n は定数とする．関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^n},$$
$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \int_e^x \left(f(t) + xt^2\right) dt$$

について，次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $h(x) = 3x^3 - 2 - \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で増加することを示せ．また，$x > 0$ の範囲で方程式 $h(x) = 0$ を解け．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ．ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい．

(3) $e^{(\pi^n)}$ と $\pi^{(e^n)}$ の大小関係を調べよ．必要であれば，$e < \pi$ を用いてよい．

(4) $g(x)$ が最小になるときの x の値を求めよ．

(5) $g(x)$ の最小値を求めよ．

2 $a > 0,\ b > 0,\ 0 < t < 1$ とする．曲線

$$C : \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は 3 直線

$$l_1 : y = x, \quad l_2 : y = -x + 2, \quad l_3 : y = -t$$

に接しているとし，C と l_1 の接点を P とする．次に答えよ．

(1) $a,\ b$ を t を用いて表せ．

(2) 点 P の座標を t を用いて表せ．

(3) l_2 と l_3 の交点を Q とする．直線 PQ が点 $(1,\ 0)$ を通るとき，t の値を求めよ．

(4) 曲線 C の媒介変数表示を $x = 1 + a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$ とし，点 P の座標を $(1 + a\cos\beta,\ b\sin\beta)$ と表す．t が (3) で求めた値のとき，$\beta\ (0 \leqq \beta < 2\pi)$ を求めよ．

(5) t は (3) で求めた値とし，曲線 C の $y \geqq 0$ の部分を C_1 とする．2 直線 l_1，l_2 と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{3}$ 次に答えよ．

(1) $z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ とする．z^9 と $z^3 + \overline{z}^3$ を求めよ．ただし，i は虚数単位を表し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す．

(2) $k = 1, 2, 3, 4$ に対して，$8\cos^3\dfrac{2k\pi}{9} - 6\cos\dfrac{2k\pi}{9} + 1$ を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{9} + \cos\dfrac{4\pi}{9} + \cos\dfrac{8\pi}{9}$ と $\cos\dfrac{2\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{4\pi}{9}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{9}$ を求めよ．

(4) $k = 1, 2, 4$ に対して，$\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ は無理数であることを示せ．

(5) $\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a,\ b,\ c$ は有理数，$a \neq 0$) の解とはならないことを示せ．

$\boxed{4}$ n は自然数とする．A と B の 2 種類の文字のみを用いて，B が連続しないように n 個並べた文字列全体の集合を X_n とする．X_n の 2 つの部分集合

$$S_n = \{x \,|\, x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が A}\},$$
$$T_n = \{x \,|\, x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が B}\}$$

の要素の個数をそれぞれ a_n，b_n とおく．例えば，$n = 1$ のとき，$X_1 = \{\mathrm{A},\ \mathrm{B}\}$，$S_1 = \{\mathrm{A}\}$，$T_1 = \{\mathrm{B}\}$ より，$a_1 = 1$，$b_1 = 1$ である．また，$n = 2$ のとき，$X_2 = \{\mathrm{AA},\ \mathrm{AB},\ \mathrm{BA}\}$，$S_2 = \{\mathrm{AA},\ \mathrm{BA}\}$，$T_2 = \{\mathrm{AB}\}$ より，$a_2 = 2$，$b_2 = 1$ である．次に答えよ．

(1) a_3，b_3，a_4，b_4 を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ．

(3) $a_n \geqq 100$ と $b_n \geqq 100$ をともにみたす最小の n を求めよ．

(4) 自然数 a，b と $c = a + b$ に対して，

$$L = \{d \,|\, d \text{ は } a,\ b \text{ の公約数}\}, \quad R = \{d \,|\, d \text{ は } a,\ c \text{ の公約数}\}$$

とする．$L \subset R$ と $L \supset R$ がともに成り立つこと (つまり $L = R$) を示せ．また，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素であることを数学的帰納法により示せ．

(5) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ とする．ある関数 $f(x)$ により等式 $r_{m+1} = f(r_m)$ がすべての自然数 m について成立する．$f(x)$ をひとつ求めよ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} r_m$ を求めよ．

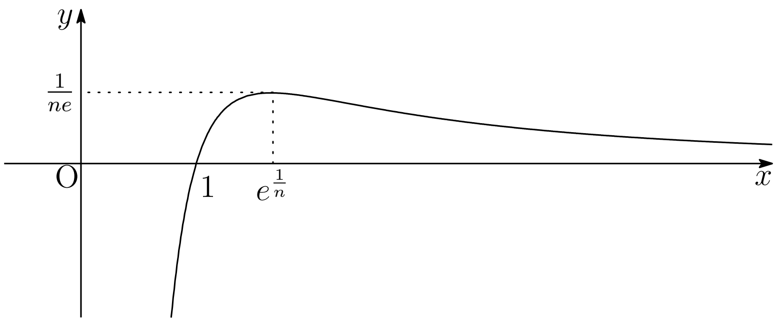
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $h(x) = 3x^3 - 2 - \dfrac{1}{x}$ より　$h'(x) = 9x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$

$h(x)$ は $x > 0$ で増加し，$h(1) = 0$ より，$x > 0$ における解は　$\boldsymbol{x = 1}$

(2) $f(x) = \dfrac{\log x}{x^n}$ より　$f'(x) = \dfrac{1 - n\log x}{x^{n+1}}$

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$



(3) (2) の結果から，$e^{\frac{1}{n}} < x$ の範囲で $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(e) > f(\pi) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{e^n} > \frac{\log \pi}{\pi^n}$$

したがって　$\pi^n \log e > e^n \log \pi$　よって　$\boldsymbol{e^{(\pi^n)} > \pi^{(e^n)}}$

(4) $\displaystyle\int_e^x (f(t)+xt^2)\,dt = \int_e^x f(t)\,dt + x\int_e^x t^2\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}\int_e^x (f(t)+xt^2)\,dt &= \int_e^x f(t)\,dt + x\left[\ \frac{t^3}{3}\ \right]_e^x \\ &= \int_e^x f(t)\,dt + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{3}e^3x\end{aligned}$$

$\displaystyle g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \int_e^x (f(t)+xt^2)\,dt$ より

$$g(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x - \log x + \int_e^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

これを x について微分すると　$g'(x) = h(x) + f(x)$

$0 < x < 1$　において　$h(x) < 0,\ f(x) < 0$ より　$g'(x) < 0$
$1 < x$　において　$h(x) > 0,\ f(x) > 0$ より　$g'(x) > 0$

$h(1) = f(1) = 0$ より　$g'(1) = h(1) + f(1) = 0$
よって　$g(x)$ は，$\boldsymbol{x = 1}$ で最小.

(5) $n = 1$ のとき

$$\int_e^1 f(t)\,dt = \int_e^1 \frac{\log t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ (\log t)^2\ \right]_e^1 = -\frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_e^1 f(t)\,dt = \int_e^1 t^{-n}\log t\,dt &= \frac{1}{-n+1}\int_e^1 (t^{-n+1})'\log t\,dt \\ &= \frac{1}{-n+1}\left[\ t^{-n+1}\log t\ \right]_e^1 - \frac{1}{-n+1}\int_e^1 t^{-n}\,dt \\ &= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{(-n+1)^2}\left[\ t^{-n+1}\ \right]_e^1 \\ &= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1-e^{-n+1}}{(-n+1)^2} = \frac{ne^{-n+1}-1}{(n-1)^2}\end{aligned}$$

$x = 1$ のとき $\dfrac{3}{4}x^4 - 2x - \log x = -\dfrac{5}{4}$，$(*)$ より

$n = 1$ のとき　　最小値 $g(1) = -\dfrac{5}{4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{7}{4}}$

$n > 1$ のとき　　最小値 $g(1) = \boldsymbol{-\dfrac{5}{4} + \dfrac{ne^{-n+1}-1}{(n-1)^2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C と l_1 から y を消去すると $\quad \dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

$$(a^2+b^2)x^2-2b^2x+b^2(1-a^2)=0 \qquad (*)$$

上式は，係数について $\quad (-b^2)^2-(a^2+b^2)\cdot b^2(1-a^2)=0$

$a>0,\ b>0$ に注意して整理すると $\quad a^2+b^2=1 \quad \cdots①$

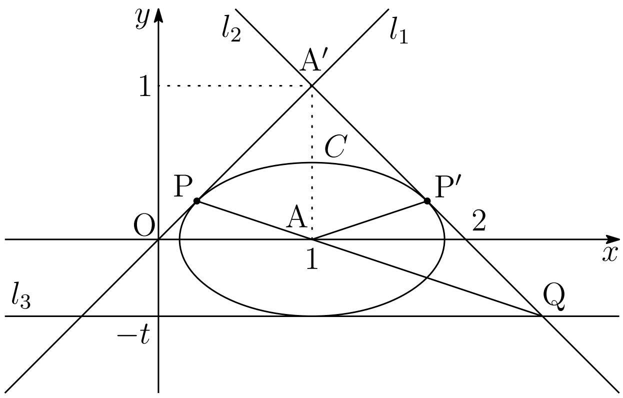
C と l_3 が接するから $\quad -b=-t \quad \cdots②$

$a>0,\ b>0$ であるから，①，② より $\quad \boldsymbol{a=\sqrt{1-t^2},\ b=t}$

(2) (1) の結果を $(*)$ に代入すると $\quad x^2-2t^2x+t^4=0$

$$(x-t^2)^2=0 \quad これを解いて \quad x=t^2$$

P は l_1 上の点であるから $\quad \mathbf{P}(\boldsymbol{t^2},\ \boldsymbol{t^2})$



(3) $l_2 : y=-x+2$ 上の点 Q の y 座標が $-t$ であるから

$$-t=-x+2 \quad ゆえに \quad x=t+2$$

$\mathrm{P}(t^2,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+2,-t)$ より，直線 PQ の傾きは $(0<t<1)$

$$\frac{-t-t^2}{(t+2)-t^2}=\frac{t(t+1)}{(t+1)(t-2)}=\frac{t}{t-2}$$

点 $\mathrm{Q}(t+2,-t)$ を通り，傾き $\dfrac{t}{t-2}$ の直線は

$$y+t=\frac{t}{t-2}(x-t-2)$$

点 $(1,\ 0)$ はこの直線上の点であるから

$$t=\frac{t}{t-2}(-t-1) \quad これを解いて \quad \boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$$

(4) (3) の結果を (1) の結果に代入すると　$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　　(∗∗)

(3) の結果を (2) の結果に代入すると　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$

条件から　　$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{4},\ \ \dfrac{1}{2}\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

すなわち　　$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ \sin\beta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\beta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{5}{6}\pi}$

(5) $C,\ l_1,\ l_2$ が直線 $x=1$ に関して対称であるから，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ すると，

C と l_2 の接点を P' とすると　$\mathrm{P}'\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\ \dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)$

4 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}'\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，$\mathrm{A}'(1,\ 1)$ を頂点とする四角形の面積を S_1 とすると (A' は $l_1,\ l_2$ の交点)

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AA}'\cdot\mathrm{PP}'=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

(∗∗) より (ガウス・グリーン定理[1])

$$\begin{aligned}x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y&=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\theta-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

AP'，AP，C_1 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(x\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}y\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)d\theta\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$S_1-S_2=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

$\boxed{3}$ (1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ より　$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\mathbf{1}$

$$z^3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\qquad \overline{z}^3=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$$

よって　$z^3+\overline{z}^3=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$

(2) $z^3=\cos\dfrac{2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$，$\overline{z}^3=\cos\dfrac{2k\pi}{3}-i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$ より

$$z^3+\overline{z}^3=2\cos\frac{2k\pi}{3}=\begin{cases}-1 & (k=1,2,4)\\ 2 & (k=3)\end{cases}$$

$z^3+\overline{z}^3=(z+\overline{z})^3-3z\overline{z}(z+\overline{z})$，$z+\overline{z}=2\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ より

$$\left(2\cos\frac{2k\pi}{9}\right)^3-3\left(2\cos\frac{2k\pi}{9}\right)=2\cos\frac{2k\pi}{3}$$

よって

$$8\cos^3\frac{2k\pi}{9}-6\cos\frac{2k\pi}{9}+1=1+2\cos\frac{2k\pi}{3}=\begin{cases}\mathbf{0} & \boldsymbol{(k=1,2,4)}\\ \mathbf{3} & \boldsymbol{(k=3)}\end{cases}$$

(3) (2) の結果から，$\cos\dfrac{2\pi}{9}$，$\cos\dfrac{4\pi}{9}$，$\cos\dfrac{8\pi}{9}$ は，3 次方程式

$$8x^3-6x+1=0 \qquad (*)$$

の解であるから，解と係数の関係により

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=\mathbf{0},\quad \cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}=\mathbf{-\frac{1}{8}}$$

(4) $\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ が有理数であると仮定し $(k=1,2,4)$，

$$\cos\frac{2k\pi}{9}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q\ \text{は互いに素である整数},\ q>0)$$

とおくと，これが方程式 $(*)$ の解であるから

$$8\left(\frac{p}{q}\right)^3-6\left(\frac{p}{q}\right)+1=0\quad\text{ゆえに}\quad \frac{8p^3}{q^2}=6p-q$$

上の第 2 式の右辺は整数であるから，q^2 は 8 の約数，すなわち，$q=1,\ 2$

(i) $q=1$ のとき　$8p^3=6p-1$　ゆえに　$2p(4p^2-3)=-1$
　これを満たす整数 p は存在しない．

(ii) $q=2$ のとき　$2p^3=6p-2$　ゆえに　$p(p^2-3)=-1$
　$p=\pm1$ となるが，ともにこれを満たさない．

よって，$k=1,2,4$ のとき，$\cos\dfrac{2k\pi}{9}$ は無理数である．

(5) $8x^3-6x+1$ を ax^2+bx+c で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $rx+s$ とすると，a，b，c が有理数であるとき，$Q(x)$ は有理数を係数とする 1 次式，r，s は有理数である．

$$8x^3-6x+1=(ax^2+bx+c)Q(x)+rx+s \tag{$**$}$$

(4) の結論から，$8x^3-6x+1=0$ の解を α とする (α は無理数)．
α が $ax^2+bx+c=0$ の解であると仮定すると，$(**)$ により

$$8\alpha^3-6\alpha+1=(a\alpha^2+b\alpha+c)Q(\alpha)+r\alpha+s$$

このとき

$$r\alpha+s=0 \tag{A}$$

を得る．

(i) $r\neq 0$ とき

$$\alpha=-\frac{s}{r}$$

このとき，α が無理数であることに矛盾する．

(ii) $r=0$ のとき，(A) より，$s=0$ となる．このとき，$(**)$ より

$$8x^3-6x+1=(ax^2+bx+c)Q(x)$$

となる．$Q(x)=lx+m$ とおくと (l, m は有理数)，3 次方程式

$$8x^3-6x+1=0$$

が有理数の解 $-\dfrac{m}{l}$ をもち，矛盾．

よって，$\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は，有理数を係数とする 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解とはならない． ■

$\boxed{4}$ (1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の漸化式が成立する．

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n \qquad (n = 1, 2, \cdots) \qquad (*)$$

$a_2 = 2$，$b_2 = 1$ であるから，順次，$n = 2,\ 3$ を代入すると

$$\boldsymbol{a_3 = 3,\ \ b_3 = 2,\ \ a_4 = 5,\ \ b_4 = 3}$$

(2) $(**)$ より　$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n}$

(3) $(**)$ より，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は自然数の数列で

$$a_{n+1} - a_n = b_n > 0, \quad b_{n+1} = a_n$$

であるから，これらは単増加列である．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

よって，条件をともにみたす最小の n は　$\boldsymbol{n = 12}$

(4) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記する．

(A) $d \in L$ について，$d\,|\,a$，$d\,|\,b$ であるから

$$a = pd, \quad b = qd$$

となる整数 $p,\ q$ が存在するから

$$c = a + b = pd + qd = (p+q)d \quad \text{ゆえに} \quad d\,|\,c$$

$d\,|\,a$，$d\,|\,c$ であるから，$d \in R$　したがって　$L \subset R$

(B) $d \in R$ について，$d\,|\,a$，$d\,|\,c$ であるから

$$a = rd, \quad c = sd$$

となる整数 $r,\ s$ が存在するから

$$b = c - a = sd - rd = (s-r)d \quad \text{ゆえに} \quad d\,|\,b$$

$d\,|\,a$，$d\,|\,b$ であるから，$d \in L$　したがって　$R \subset L$

(A)，(B) から　$L = R$

$L_n = \{d \,|\, d$ は $a_n,\ b_n$ の公約数$\}$ とすると，前の結論により

$$\begin{aligned} L_n &= \{d \,|\, d \text{ は } a_n,\ a_n + b_n \text{ の公約数}\} \\ &= \{d \,|\, d \text{ は } b_{n+1},\ a_{n+1} \text{ の公約数}\} = L_{n+1} \end{aligned}$$

$L_1 = \{1\}$ であるから，すべての自然数 n について　$L_n = \{1\}$
よって，すべての自然数 m に対して，a_m と b_m は互いに素である．

(5) $r_n = \dfrac{a_n}{a_n + b_n}$ より　$\dfrac{1}{r_n} = 1 + \dfrac{b_n}{a_n}$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{(a_n + b_n) + a_n} \\ &= \frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{1 + \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)} = \frac{\frac{1}{r_n}}{1 + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{r_n + 1} \end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x+1}}$

$f(x) = x$ とすると　$\dfrac{1}{x+1} = x$　$\cdots$①

$$x(x+1) = 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

この 2 次方程式の解を

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

とおくと，① に注意して

$$r_{n+1} - \alpha = \frac{1}{r_n + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} = -\frac{r_n - \alpha}{(\alpha+1)(r_n+1)} = -\frac{\alpha(r_n - \alpha)}{r_n + 1}$$

同様に　$r_{n+1} - \beta = -\dfrac{\beta(r_n - \beta)}{r_n + 1}$

$\{r_n\}$ について，明らかに $r_n > 0$ であるから，$r_n - \beta \neq 0$ より

$$\frac{r_{n+1} - \alpha}{r_{n+1} - \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \frac{r_1 - \alpha}{r_1 - \beta}$$

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| < 1$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$　■