

令和6年度 九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)

工学部・情報工学部 令和6年2月25日

数I・II・III・A・B(120分)

問題 1 2 3 4

1 自然数 n は定数とする. 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^n},$$

$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2\right)x - \log x + \int_e^x (f(t) + xt^2) dt$$

について, 次に答えよ. ただし, 対数は自然対数を表し, e は自然対数の底とする.

- (1) 関数 $h(x) = 3x^3 - 2 - \frac{1}{x}$ は $x > 0$ で増加することを示せ. また, $x > 0$ の範囲で方程式 $h(x) = 0$ を解け.
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の概形をかけ. ただし, 曲線の凹凸は調べなくてよい.
- (3) $e^{(\pi^n)}$ と $\pi^{(e^n)}$ の大小関係を調べよ. 必要であれば, $e < \pi$ を用いてよい.
- (4) $g(x)$ が最小になるときの x の値を求めよ.
- (5) $g(x)$ の最小値を求めよ.

2 $a > 0, b > 0, 0 < t < 1$ とする. 曲線

$$C: \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

は3直線

$$l_1: y = x, \quad l_2: y = -x + 2, \quad l_3: y = -t$$

に接しているとし, C と l_1 の接点を P とする. 次に答えよ.

- (1) a, b を t を用いて表せ.
- (2) 点 P の座標を t を用いて表せ.
- (3) l_2 と l_3 の交点を Q とする. 直線 PQ が点 $(1, 0)$ を通るとき, t の値を求めよ.
- (4) 曲線 C の媒介変数表示を $x = 1 + a \cos \theta, y = b \sin \theta$ とし, 点 P の座標を $(1 + a \cos \beta, b \sin \beta)$ と表す. t が(3)で求めた値のとき, β ($0 \leq \beta < 2\pi$) を求めよ.
- (5) t は(3)で求めた値とし, 曲線 C の $y \geq 0$ の部分を C_1 とする. 2直線 l_1, l_2 と曲線 C_1 で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

3 次に答えよ.

- (1) $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ とする. z^9 と $z^3 + \bar{z}^3$ を求めよ. ただし, i は虚数単位を表し, \bar{z} は z と共役な複素数を表す.
- (2) $k = 1, 2, 3, 4$ に対して, $8 \cos^3 \frac{2k\pi}{9} - 6 \cos \frac{2k\pi}{9} + 1$ を求めよ.
- (3) $\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}$ と $\cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{8\pi}{9}$ を求めよ.
- (4) $k = 1, 2, 4$ に対して, $\cos \frac{2k\pi}{9}$ は無理数であることを示せ.
- (5) $\cos \frac{2\pi}{9}$ は 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c は有理数, $a \neq 0$) の解とはならないことを示せ.

4 n は自然数とする. A と B の 2 種類の文字のみを用いて, B が連続しないように n 個並べた文字列全体の集合を X_n とする. X_n の 2 つの部分集合

$$S_n = \{x \mid x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が } A\},$$

$$T_n = \{x \mid x \in X_n \text{ かつ } x \text{ の最後の文字が } B\}$$

の要素の個数をそれぞれ a_n, b_n とおく. 例えば, $n = 1$ のとき, $X_1 = \{A, B\}$, $S_1 = \{A\}$, $T_1 = \{B\}$ より, $a_1 = 1, b_1 = 1$ である. また, $n = 2$ のとき, $X_2 = \{AA, AB, BA\}$, $S_2 = \{AA, BA\}$, $T_2 = \{AB\}$ より, $a_2 = 2, b_2 = 1$ である. 次に答えよ.

- (1) a_3, b_3, a_4, b_4 を求めよ.
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n と b_n を用いて表せ.
- (3) $a_n \geq 100$ と $b_n \geq 100$ をともにみたす最小の n を求めよ.
- (4) 自然数 a, b と $c = a + b$ に対して,

$$L = \{d \mid d \text{ は } a, b \text{ の公約数}\}, \quad R = \{d \mid d \text{ は } a, c \text{ の公約数}\}$$

とする. $L \subset R$ と $L \supset R$ がともに成り立つこと (つまり $L = R$) を示せ. また, すべての自然数 m に対して, a_m と b_m は互いに素であることを数学的帰納法により示せ.

- (5) $r_n = \frac{a_n}{a_n + b_n}$ とする. ある関数 $f(x)$ により等式 $r_{m+1} = f(r_m)$ がすべての自然数 m について成立する. $f(x)$ をひとつ求めよ. また, 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m$ を求めよ.

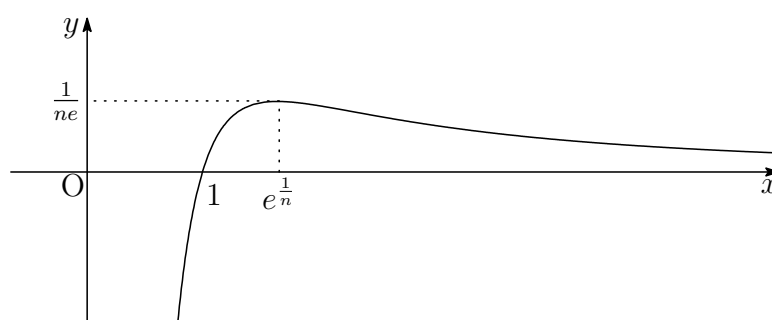
解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad h(x) = 3x^3 - 2 - \frac{1}{x} \text{ より } h'(x) = 9x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$$

$h(x)$ は $x > 0$ で増加し, $h(1) = 0$ より, $x > 0$ における解は $x = 1$

$$(2) \quad f(x) = \frac{\log x}{x^n} \text{ より } f'(x) = \frac{1 - n \log x}{x^{n+1}}$$

x	(0)	...	$e^{\frac{1}{n}}$...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{ne}$	↘



(3) (2) の結果から, $e^{\frac{1}{n}} < x$ の範囲で $f(x)$ は単調減少であるから

$$f(e) > f(\pi) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{e^n} > \frac{\log \pi}{\pi^n}$$

したがって $\pi^n \log e > e^n \log \pi$ よって $e^{(\pi^n)} > \pi^{(e^n)}$

$$(4) \int_e^x (f(t) + xt^2) dt = \int_e^x f(t) dt + x \int_e^x t^2 dt \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \int_e^x (f(t) + xt^2) dt &= \int_e^x f(t) dt + x \left[\frac{t^3}{3} \right]_e^x \\ &= \int_e^x f(t) dt + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{3}e^3x \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{5}{12}x^4 + \left(\frac{1}{3}e^3 - 2 \right) x - \log x + \int_e^x (f(t) + xt^2) dt \text{ より}$$

$$g(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x - \log x + \int_e^x f(t) dt \quad (*)$$

これを x について微分すると $g'(x) = h(x) + f(x)$

$0 < x < 1$ において $h(x) < 0, f(x) < 0$ より $g'(x) < 0$

$1 < x$ において $h(x) > 0, f(x) > 0$ より $g'(x) > 0$

$h(1) = f(1) = 0$ より $g'(1) = h(1) + f(1) = 0$

よって $g(x)$ は, $x = 1$ で最小.

(5) $n = 1$ のとき

$$\int_e^1 f(t) dt = \int_e^1 \frac{\log t}{t} dt = \frac{1}{2} \left[(\log t)^2 \right]_e^1 = -\frac{1}{2}$$

$n > 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_e^1 f(t) dt &= \int_e^1 t^{-n} \log t dt = \frac{1}{-n+1} \int_e^1 (t^{-n+1})' \log t dt \\ &= \frac{1}{-n+1} \left[t^{-n+1} \log t \right]_e^1 - \frac{1}{-n+1} \int_e^1 t^{-n} dt \\ &= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{(-n+1)^2} \left[t^{-n+1} \right]_e^1 \\ &= -\frac{e^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1 - e^{-n+1}}{(-n+1)^2} = \frac{ne^{-n+1} - 1}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

$x = 1$ のとき $\frac{3}{4}x^4 - 2x - \log x = -\frac{5}{4}$, (*) より

$n = 1$ のとき 最小値 $g(1) = -\frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{7}{4}$

$n > 1$ のとき 最小値 $g(1) = -\frac{5}{4} + \frac{ne^{-n+1} - 1}{(n-1)^2}$ ■

2 (1) C と l_1 から y を消去すると $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2b^2x + b^2(1 - a^2) = 0 \quad (*)$$

上式は、係数について $(-b^2)^2 - (a^2 + b^2) \cdot b^2(1 - a^2) = 0$

$$a > 0, b > 0 \text{ に注意して整理すると } a^2 + b^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

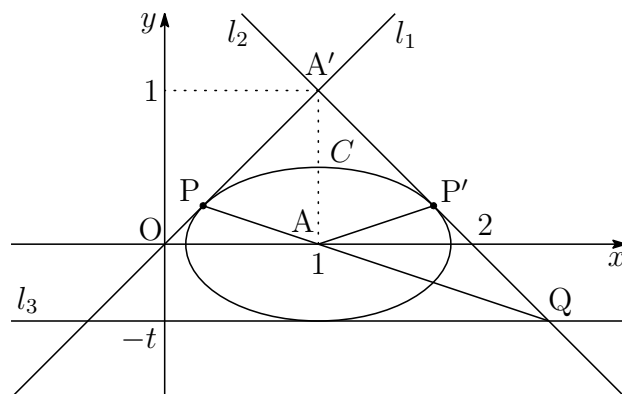
$$C \text{ と } l_3 \text{ が接するから } -b = -t \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ であるから, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a = \sqrt{1 - t^2}, b = t$$

(2) (1) の結果を (*) に代入すると $x^2 - 2t^2x + t^4 = 0$

$$(x - t^2)^2 = 0 \quad \text{これを解いて } x = t^2$$

P は l_1 上の点であるから $P(t^2, t^2)$



(3) $l_2 : y = -x + 2$ 上の点 Q の y 座標が $-t$ であるから

$$-t = -x + 2 \quad \text{ゆえに } x = t + 2$$

$P(t^2, t^2)$, $Q(t + 2, -t)$ より, 直線 PQ の傾きは $(0 < t < 1)$

$$\frac{-t - t^2}{(t + 2) - t^2} = \frac{t(t + 1)}{(t + 1)(t - 2)} = \frac{t}{t - 2}$$

点 $Q(t + 2, -t)$ を通り, 傾き $\frac{t}{t - 2}$ の直線は

$$y + t = \frac{t}{t - 2}(x - t - 2)$$

点 $(1, 0)$ はこの直線上の点であるから

$$t = \frac{t}{t - 2}(-t - 1) \quad \text{これを解いて } t = \frac{1}{2}$$

(4) (3)の結果を(1)の結果に代入すると $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

$$\text{したがって } x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, y = \frac{1}{2} \sin \theta \quad (**)$$

(3)の結果を(2)の結果に代入すると $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$$\text{条件から } 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \sin \beta = \frac{1}{4}$$

$$\text{すなわち } \cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \beta < 2\pi \text{ より } \beta = \frac{5}{6}\pi$$

(5) C , l_1 , l_2 が直線 $x = 1$ に関して対称であるから, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ すると,

$$C \text{ と } l_2 \text{ の接点を } P' \text{ とすると } P' \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha, \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

4点 $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $A(1, 0)$, $P'\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $A'(1, 1)$ を頂点とする四角形の面積を S_1 とすると (A' は l_1 , l_2 の交点)

$$S_1 = \frac{1}{2} AA' \cdot PP' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

(**)より(ガウス・グリーン定理¹)

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \cos \theta - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \cdot \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

AP' , AP , C_1 で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi \end{aligned}$$

よって, 求める面積は $S_1 - S_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi$ ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf [5]

3 (1) $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ より $z^9 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \mathbf{1}$

$$z^3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \bar{z}^3 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$$

よって $z^3 + \bar{z}^3 = 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-1}$

(2) $z^3 = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, $\bar{z}^3 = \cos \frac{2k\pi}{3} - i \sin \frac{2k\pi}{3}$ より

$$z^3 + \bar{z}^3 = 2 \cos \frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} -1 & (k = 1, 2, 4) \\ 2 & (k = 3) \end{cases}$$

$z^3 + \bar{z}^3 = (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z})$, $z + \bar{z} = 2 \cos \frac{2k\pi}{9}$ より

$$\left(2 \cos \frac{2k\pi}{9}\right)^3 - 3 \left(2 \cos \frac{2k\pi}{9}\right) = 2 \cos \frac{2k\pi}{3}$$

よって

$$8 \cos^3 \frac{2k\pi}{9} - 6 \cos \frac{2k\pi}{9} + 1 = 1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{3} = \begin{cases} \mathbf{0} & (k = 1, 2, 4) \\ \mathbf{3} & (k = 3) \end{cases}$$

(3) (2) の結果から, $\cos \frac{2\pi}{9}$, $\cos \frac{4\pi}{9}$, $\cos \frac{8\pi}{9}$ は, 3 次方程式

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \tag{*}$$

の解であるから, 解と係数の関係により

$$\cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} = \mathbf{0}, \quad \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{8\pi}{9} = \mathbf{-\frac{1}{8}}$$

(4) $\cos \frac{2k\pi}{9}$ が有理数であると仮定し ($k = 1, 2, 4$)

$$\cos \frac{2k\pi}{9} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素である整数})$$

とおくと, これが方程式 (*) の解であるから

$$8 \left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6 \left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad q^3 = p(6q^2 - 8p^2)$$

上の第 2 式から, q が p を因数にもち, 仮定に反するので矛盾.

よって, $k = 1, 2, 4$ のとき, $\cos \frac{2k\pi}{9}$ は無理数である.

- (5) $8x^3 - 6x + 1$ を $ax^2 + bx + c$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $rx + s$ とすると, a, b, c が有理数であるとき, $Q(x)$ は有理数を係数とする 1 次式, r, s は有理数である.

$$8x^3 - 6x + 1 = (ax^2 + bx + c)Q(x) + rx + s \quad (**)$$

- (4) の結論から, $8x^3 - 6x + 1 = 0$ の解を α とする (α は無理数). α が $ax^2 + bx + c = 0$ の解であると仮定すると, (**) により

$$8\alpha^3 - 6\alpha + 1 = (a\alpha^2 + b\alpha + c)Q(\alpha) + r\alpha + s$$

このとき

$$r\alpha + s = 0 \quad (\text{A})$$

を得る.

- (i) $r \neq 0$ のとき

$$\alpha = -\frac{s}{r}$$

このとき, α が無理数であることに矛盾する.

- (ii) $r = 0$ のとき, (A) より, $s = 0$ となる. このとき, (**) より

$$8x^3 - 6x + 1 = (ax^2 + bx + c)Q(x)$$

となる. $Q(x) = lx + m$ とおくと (l, m は有理数), 3 次方程式

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

が有理数の解 $-\frac{m}{l}$ をもち, 矛盾.

よって, $\cos \frac{2\pi}{9}$ は, 有理数を係数とする 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解とはならない. ■

- 4 (1) $\{a_n\}, \{b_n\}$ について, 次の漸化式が成立する.

$$a_1 = b_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*)$$

$a_2 = 2, b_2 = 1$ であるから, 順次, $n = 2, 3$ を代入すると

$$\mathbf{a_3 = 3, \quad b_3 = 2, \quad a_4 = 5, \quad b_4 = 3}$$

(2) $(**)$ より $\mathbf{a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = a_n}$

(3) $(**)$ より, $\{a_n\}, \{b_n\}$ は自然数の数列で

$$a_{n+1} - a_n = b_n > 0, \quad b_{n+1} = a_n$$

であるから, これらは単増加列である.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
b_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

よって, 条件をともにみたす最小の n は $\mathbf{n = 12}$

(4) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m | n$ と表記する.

(A) $d \in L$ について, $d | a, d | b$ であるから

$$a = pd, \quad b = qd$$

となる整数 p, q が存在するから

$$c = a + b = pd + qd = (p + q)d \quad \text{ゆえに} \quad d | c$$

$d | a, d | c$ であるから, $d \in R$ したがって $L \subset R$

(B) $d \in R$ について, $d | a, d | c$ であるから

$$a = rd, \quad c = sd$$

となる整数 r, s が存在するから

$$b = c - a = sd - rd = (s - r)d \quad \text{ゆえに} \quad d | b$$

$d | a, d | b$ であるから, $d \in L$ したがって $R \subset L$

(A), (B) から $L = R$

$L_n = \{d \mid d \text{ は } a_n, b_n \text{ の公約数}\}$ とすると、前の結論により

$$\begin{aligned} L_n &= \{d \mid d \text{ は } a_n, a_n + b_n \text{ の公約数}\} \\ &= \{d \mid d \text{ は } b_{n+1}, a_{n+1} \text{ の公約数}\} = L_{n+1} \end{aligned}$$

$L_1 = \{1\}$ であるから、すべての自然数 n について $L_n = \{1\}$ によって、すべての自然数 m に対して、 a_m と b_m は互いに素である。

$$(5) \quad r_n = \frac{a_n}{a_n + b_n} \text{ より } \frac{1}{r_n} = 1 + \frac{b_n}{a_n}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n + b_n}{(a_n + b_n) + a_n} \\ &= \frac{1 + \frac{b_n}{a_n}}{1 + \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)} = \frac{\frac{1}{r_n}}{1 + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{r_n + 1} \end{aligned}$$

したがって $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$f(x) = x$ とすると $\frac{1}{x+1} = x \quad \dots \textcircled{1}$

$$x(x+1) = 1 \quad \text{整理すると} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

この2次方程式の解を

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

とおくと、 $\textcircled{1}$ に注意して

$$r_{n+1} - \alpha = \frac{1}{r_n + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} = -\frac{r_n - \alpha}{(\alpha + 1)(r_n + 1)} = -\frac{\alpha(r_n - \alpha)}{r_n + 1}$$

同様に $r_{n+1} - \beta = -\frac{\beta(r_n - \beta)}{r_n + 1}$

$\{r_n\}$ について、明らかに $r_n > 0$ であるから、 $r_n - \beta \neq 0$ より

$$\frac{r_{n+1} - \alpha}{r_{n+1} - \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \cdot \frac{r_1 - \alpha}{r_1 - \beta}$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - \alpha}{r_n - \beta} = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \blacksquare$$