令和５年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和５年３月12日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 $a,\ b\ (a>0,\ b>0)$ を定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-3ax^2+b$ とする．O を原点とする座標平面を考え，曲線 $y=f(x)$ を曲線 C とする．また，関数 $f(x)$ の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}_1(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{P}_2(\beta,\ f(\beta))$ をとる．さらに，2 点 P_1 と P_2 を通る直線を l とし，点 P_1，P_2 以外の，曲線 C と直線 l との共有点を Q とする．次に答えよ．

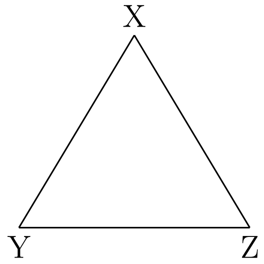
(1) 関数 $f(x)$ についての増減表を利用して，方程式 $x^3-3ax^2+b=0$ の異なる実数解の個数が 2 個以下となるための条件を a，b を用いて表せ.

(2) 点 Q の座標を求め，曲線 C と線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$ で囲まれる図形の面積 S_1 および曲線 C と線分 QP_2 で囲まれる図形の面積を S_2 を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 つである場合を考える．曲線 C と $x<0$ における x 軸との共有点を P_3 とし，線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1$ と線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ および曲線 C で囲まれる図形の面積を S_3 とする．このとき，b を a 用いて表し，さらに，$S_3=13$ が成り立つ場合の a の値を求めよ.

(4) 曲線 C と x 軸の共有点が 1 つである場合を考える．直線 l と x 軸との交点を P_4 とし，線分 OP_1 と線分 OP_2 および曲線 C で囲まれる図形の面積を S_4，三角形 $\mathrm{OP}_2\mathrm{P}_4$ の面積を S_5 とする．このとき，$S_4=S_5$ かつ $S_4=2$ が成り立つ場合の a と b の値を求めよ.

2 下の図のような三角形 XYZ があり，3 地点 X，Y，Z を移動する人がいる．はじめ，この人は地点 X にいるものとする．



この人は，自分のいる地点で，大きいサイコロと小さいサイコロを振り，2 つのサイコロの目の出方に従って次のように行動する．

- 2 つのサイコロの目が同じ場合は移動せず同じ地点にとどまる．
- 2 つのサイコロの目が異なる場合は大きいサイコロの出た目の数だけ反時計回りに地点を移動する．

この試行を n 回繰り返した後に，地点 X にいる確率を x_n，同様に，地点 Y，Z にいる確率をそれぞれ y_n，z_n とする．次に答えよ．

(1) x_1，y_1，z_1 をそれぞれ求めよ．

(2) x_{n+1} を x_n，y_n，z_n を用いて表せ．同様に，y_{n+1}，z_{n+1} を x_n，y_n，z_n を用いて表せ．

(3) x_n，y_n，z_n をそれぞれ求めよ．

(4) $n+1$ 回目の試行後に地点 X にいるという条件のもとで，n 回目の試行後に地点 Y にいた確率を求めよ．

3 $0 < x < 1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x) = x\log 2x + (1-x)\log(2-2x)$ とする．ただし，対数は自然対数とする．次に答えよ．

(1) $\lim_{x \to +0} f(x)$ と $\lim_{x \to 1-0} f(x)$ を求めよ．ただし，$\lim_{x \to +0} x\log x = 0$ であることを利用してもよい．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない．また，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(3) 直線 $x = \dfrac{3}{4}$ と直線 $y = 0$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

数列 $\{p_n\}$ は $0 < p_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす数列であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項を

$$a_n = (2p_n)^{-np_n}(2-2p_n)^{-n(1-p_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．

(4) $\log a_n$ を n と $f(p_n)$ を用いて表せ．

(5) 数列 $\{p_n\}$ は収束し，その極限値 p は $\dfrac{1}{2}$ ではないとする．このとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

4 O を原点とする xyz 空間を考える．点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を通りベクトル $\vec{v} = (2, -2,\ 1)$ に平行な直線を l とする．また，θ $(0 \leqq \theta < \pi)$ に対し，原点 O を通りベクトル $\vec{e} = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ に平行な直線を m とする．次に答えよ．

(1) 点 $\mathrm{B}(3,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{C}(-9,\ 6, -1)$ について，直線 l と直線 BC が交わるかどうかを調べ，交わる場合は交点の座標を求めよ．

(2) 直線 l 上に点 P をとり，その x 座標を $2t$ とする．点 P を通り，$\vec{e}$ に垂直な平面を α とする．また，直線 m と平面 α との交点を Q とする．このとき，点 P と点 Q の距離 L を t と θ を用いて表せ．

(3) 直線 l と直線 m の距離 d を θ を用いて表せ．ここで，2 直線間の距離とは，それぞれの直線上に点をとり，それら 2 点間の距離を考えるとき，そのような距離の中の最小値のことである．

(4) 直線 l と直線 m が交わるときの θ の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ より $(a > 0,\ b > 0)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ 2a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$b - 4a^3$	$\nearrow$

極大値 $f(0) = b > 0$，極小値 $f(2a) = b - 4a^3$ であるから

$$b - 4a^3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b \geqq 4b^3}$$

(2) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$，$\dfrac{1}{3}f'(x) = x^2 - 2ax$ より

$$f(x) = \frac{1}{3}(x - a)f'(x) - 2a^2x + b$$

2 点 P_1，P_2 を通る直線 l の方程式は　$y = -2a^2x + b$
C と l の方程式から，y を消去すると

$$x^3 - 3ax^2 + b = -2a^2x + b \quad \text{ゆえに} \quad x(x - a)(x - 2a) = 0$$

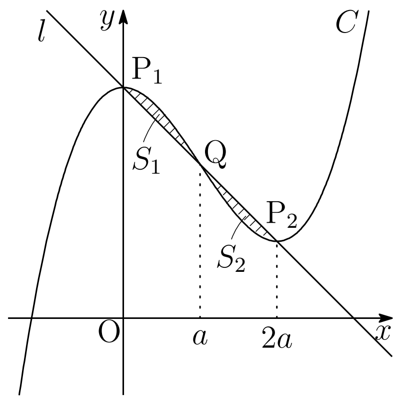
点 Q の x 座標は，$x \neq 0,\ x \neq 2a$ より　$x = a$

これを l の方程式に代入して　$y = -2a^2{\cdot}a + b = b - 2a^3$

よって　　$\mathbf{Q}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b - 2a^3})$

$f(x)-(-2a^2x+b)=x^3-3ax^2+2a^2x$ より

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^a \{f(x)-(-2a^2x+b)\}\,dx = \int_0^a (x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4}-ax^3+a^2x^2\ \right]_0^a = \boldsymbol{\frac{a^4}{4}}, \\
S_2 &= \int_a^{2a} \{(-2a^2x+b)-f(x)\}\,dx = \int_a^{2a} \{-x^3+3ax^2-2a^2x\}\,dx \\
&= \left[-\frac{x^4}{4}+ax^3-a^2x^2\ \right]_a^{2a} = \boldsymbol{\frac{a^4}{4}}
\end{aligned}
$$



補足　$f(x)$ を $x=a$ で極展開すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+(x-a)^3 \\
&= f(a)-3a^2(x-a)+(x-a)^3
\end{aligned}
$$

また，直線 l の方程式は　$y=f(a)-2a^2(x-a)$

したがって，C および l は点 $\mathrm{Q}(a,\ f(a))$ に関して対称である．

よって　$S_1=S_2$

(3) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 つであるのは，(1) の増減表から

$$f(2a) = b - 4a^3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = 4a^3}$$

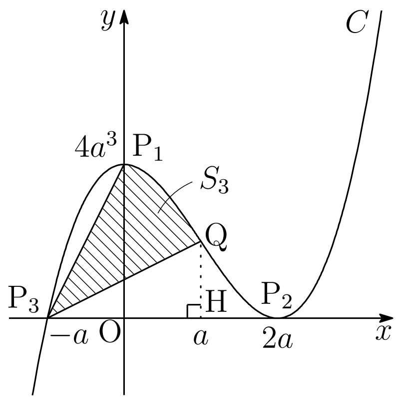
P_3 と x 軸との共有点の x 座標は

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a^3 = (x+a)(x-2a)^2 \quad \text{これから} \quad x = -a$$

点 Q から x 軸に垂線 QH を引く．$f(0) = 4a^3$, $f(a) = 2a^3$ より

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^a (x^3 - 3ax^2 + 4a^3)\,dx + \triangle P_3OP_1 - \triangle P_3HQ \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - ax^3 + 4a^3x \right]_0^a + \frac{1}{2}\cdot a\cdot 4a^3 - \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a^3 = \boldsymbol{\frac{13}{4}a^4} \end{aligned}$$

$S_3 = 13$ のとき $\dfrac{13}{4}a^4 = 13$ $a > 0$ に注意して $\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$



別解 C 上の点を $P(x,\ x^3 - 3ax^2 + 4a^3)$ とすると

$$\overrightarrow{P_3P} = (x - a,\ x^3 - 3ax^2 + 4a^3)$$

$g(x) = x - a$，$h(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$ とすると

$$g'(x) = 1, \quad h'(x) = 3x^2 - 6ax$$

P が Q から P_1 に移動するとき，線分 P_3P が通過する領域であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_a^0 \{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)\}\,dx \\ &= \int_a^0 (x^3 - 3a^2x - 2a^3)\,dx = \frac{13}{4}a^3 \end{aligned}$$

(4) $f(0)=b>0$ に注意すると，曲線 C と x 軸の共有点が 1 つであるのは，$f(2a)=b-4a^3>0$ の場合である．$S_4=S_5$ となるのは，下の図から分かるように，直線 $l: y=-2a^2x+b$ が点 $(4a,\ 0)$ を通るときであるから

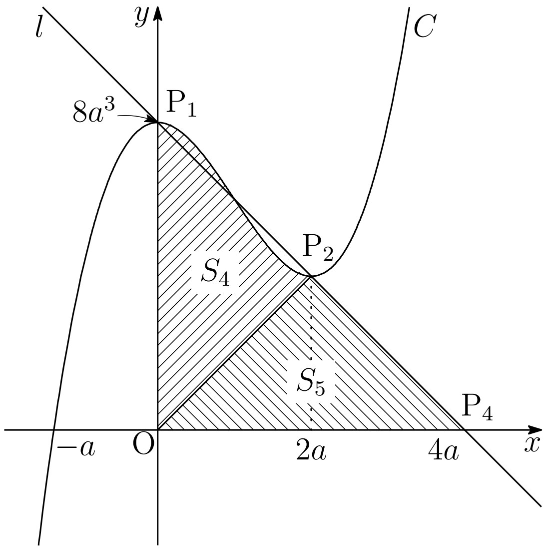
$$0=-2a^3\cdot4a+b \quad ゆえに \quad b=8a^3 \quad \cdots①$$

(2) の結果から　$S_4=\triangle \mathrm{OP_1P_2}$

したがって，$S_4=S_5$，$S_4=2$ のとき，$\triangle \mathrm{OP_4P_1}=4$

$$\frac{1}{2}\cdot4a\cdot8a^3=4 \quad a>0 \text{ に注意して} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{b=2\sqrt{2}}$



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 目の出方による人の移動 (反時計回りの回転) は，次のようになる．

小＼大	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	2	3	4	5	6
2	1	0	3	4	5	6
3	1	2	0	4	5	6
4	1	2	3	0	5	6
5	1	2	3	4	0	6
6	1	2	3	4	5	0

反時計回りに0，3，6だけ地点を移動する確率は $\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{4}{9}$

反時計回りに1，4だけ地点を移動する確率は $\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{5}{18}$

反時計回りに2，5だけ地点を移動する確率は $\frac{5}{36}+\frac{5}{36}=\frac{5}{18}$

したがって　$\boldsymbol{x_1=\frac{4}{9},\ y_1=\frac{5}{18},\ z_1=\frac{5}{18}}$

(2) (1)と同様にして

$$\boldsymbol{\begin{aligned} x_{n+1}&=\frac{4}{9}x_n+\frac{5}{18}y_n+\frac{5}{18}z_n\\ y_{n+1}&=\frac{5}{18}x_n+\frac{4}{9}y_n+\frac{5}{18}z_n\\ z_{n+1}&=\frac{5}{18}x_n+\frac{5}{18}y_n+\frac{4}{9}z_n \end{aligned}}$$

(3) $x_n+y_n+z_n=1$ に注意して，(2)の結果をそれぞれ変形すると

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\frac{1}{6}x_n+\frac{5}{18}(x_n+y_n+z_n)=\frac{1}{6}x_n+\frac{5}{18}\\ y_{n+1}&=\frac{1}{6}y_n+\frac{5}{18}(x_n+y_n+z_n)=\frac{1}{6}y_n+\frac{5}{18}\\ z_{n+1}&=\frac{1}{6}z_n+\frac{5}{18}(x_n+y_n+z_n)=\frac{1}{6}z_n+\frac{5}{18} \end{aligned}$$

上の3式から

$$x_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(x_n-\frac{1}{3}\right)\quad \text{ゆえに}\quad x_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6^{n-1}}\left(x_1-\frac{1}{3}\right)$$

同様に　$y_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6^{n-1}}\left(y_1-\frac{1}{3}\right),\quad z_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6^{n-1}}\left(z_1-\frac{1}{3}\right)$

(1)の結果をこれらに代入して

$$\boldsymbol{x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6^{n-1}},\quad y_n=z_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6^n}}$$

(4) (3)の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{y_n\cdot\frac{5}{18}}{x_{n+1}}=\frac{5}{18}\cdot\frac{6^n-1}{3\cdot6^n}\div\frac{3\cdot6^n+1}{9\cdot6^n}=\boldsymbol{\frac{5}{6}\cdot\frac{6^n-1}{3\cdot6^n+1}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ より

$$\lim_{x \to +0} x \log 2x = \lim_{x \to +0} \frac{1}{2} \cdot 2x \log 2x = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

この結果を用いて

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \log(2-2x) = \lim_{x \to +0} x \log 2x = 0$$

上の 2 式の結果から

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \{x \log 2x + (1-x) \log(2-2x)\} = 0 + \log 2 = \mathbf{log\,2}$$
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \{x \log 2x + (1-x) \log(2-2x)\} = \log 2 + 0 = \mathbf{log\,2}$$

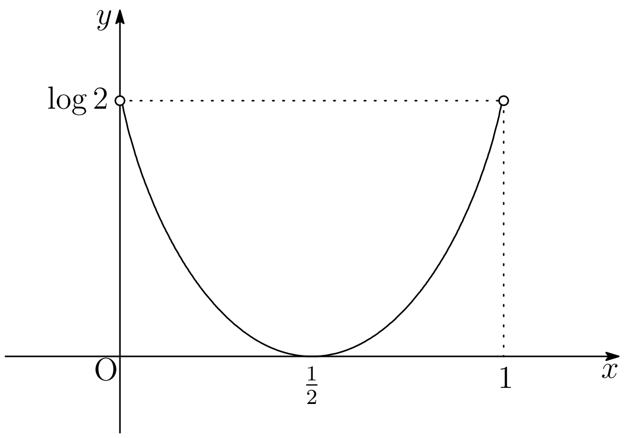
(2) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \log 2x - \log(2-2x) = \log \frac{x}{1-x}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$f(x) = f(1-x)$ であるから，$y = f(x)$ のグラフは，直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称である．増減表および (1) の結果から，$y = f(x)$ のグラフは次のようになる．



(3) 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \{x\log 2x + (1-x)\log(2-2x)\}\,dx \\
&= \left[\ \frac{1}{2}x^2\log 2x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\log(2-2x) + \frac{1}{4}(1-x)^2\ \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \\
&= \mathbf{\frac{9}{32}\log 3 - \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

別解 $t = 1-x$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = -1$

x	$\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{3}{4}$
t	$\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (1-x)\log(2-2x)\,dx &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} t\log 2t\,(-1)dt \\
&= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x\log 2x\,dx
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x\log 2x + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} x\log 2x\,dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x\log 2x\,dx \\
&= \left[\ \frac{1}{2}x^2\log 2x - \frac{1}{4}x^2\ \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{9}{32}\log 3 - \frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{8}}
\end{aligned}
$$

(4) $a_n = (2p_n)^{-np_n}(2-2p_n)^{-n(1-p_n)}$ より

$$
\begin{aligned}
\log a_n &= -np_n\log(2p_n) - n(1-p_n)\log(2-2p_n) \\
&= -n\{p_n\log(2p_n) + (1-p_n)\log(2-2p_n)\} = -nf(p_n)
\end{aligned}
$$

$0 < p_n < 1$，$p = \displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n \neq \frac{1}{2}$ であるから，(1)，(2) の結果より

$$
\begin{aligned}
&0 < p < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < p < 1 \text{ のとき} && \lim_{n\to\infty} f(p_n) > 0 \\
&p = 0,\ 1 \text{ のとき} && \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \log 2
\end{aligned}
$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n = \lim_{n\to\infty}\{-nf(p_n)\} = -\infty$ よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 直線 l の方程式は，媒介変数 s を用いて

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (0,\ 0,\ 1) + s(2, -2,\ 1) \\ &= (2s, -2s,\ 1+s) \qquad (*)\end{aligned}$$

B$(3,\ 0,\ 0)$，C$(-9,\ 6, -1)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-12,\ 6, -1)$
直線 BC の方程式は，媒介変数 k を用いて

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} + k\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3,\ 0,\ 0) + k(-12,\ 6, -1) \\ &= (3-12k,\ 6k, -k)\end{aligned}$$

直線 l と直線 BC の方程式を連立すると

$$2s = 3 - 12k, \quad -2s = 6k, \quad 1 + s = -k$$

上の第 2 式と第 3 式をから　$s = -\dfrac{3}{2}$,　$k = \dfrac{1}{2}$
これは，上の第 1 式を満たす.
よって，求める交点は，$s = -\dfrac{3}{2}$ を $(*)$ に代入すると　$\left(\mathbf{-3,\ 3, -\dfrac{1}{2}}\right)$

(2) l 上の点 P の x 座標が $2t$ であるから，$s = t$ を $(*)$ に代入して

$$\mathrm{P}(2t, -2t,\ 1+t)$$

平面 α 上の点を X$(x,\ y,\ z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PX}} \perp \vec{e}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PX}} \cdot \vec{e} = 0$ より，
平面 α の方程式は

$$(x - 2t)\cos\theta + (y + 2t)\sin\theta = 0$$

直線 m の方程式は，媒介変数 u を用いて

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= u\vec{e} = u(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0) \\ &= (u\cos\theta,\ u\sin\theta,\ 0) \qquad (**)\end{aligned}$$

平面 α と直線 m の方程式を連立すると

$$(u\cos\theta - 2t)\cos\theta + (u\sin + 2t)\sin\theta = 0$$

したがって　$u = 2t(\cos\theta - \sin\theta)$　$\cdots$①
直線 m と平面 α の交点 Q は，① を $(**)$ に代入して

$$\mathrm{Q}(2t(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta),\ 2t(\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta),\ 0)$$

2 点 P，Q の座標から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} \\ &= (2t(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta),\ 2t(\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta),\ 0) - (2t, -2t,\ 1+t) \\ &= (-2t\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta),\ 2t\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta), -1-t)\end{aligned}$$

$L^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ であるから

$$\begin{aligned}L^2 &= \{-2t\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)\}^2 + \{2t\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\}^2 + (-1-t)^2 \\ &= 4t^2(\sin\theta+\cos\theta)^2 + (1+t)^2 \qquad (\#)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{L = \sqrt{4t^2(\sin\theta+\cos\theta)^2+(1+t)^2}}$

(3) (#) より

$$\begin{aligned}L^2 &= 4t^2(1+\sin 2\theta) + 1 + 2t + t^2 \\ &= (5+4\sin 2\theta)t^2 + 2t + 1 \\ &= (5+4\sin 2\theta)\left(t + \frac{1}{5+4\sin 2\theta}\right)^2 + \frac{4+4\sin 2\theta}{5+4\sin 2\theta}\end{aligned}$$

L の最小値が d であるから

$$\boldsymbol{d = 2\sqrt{\frac{1+\sin 2\theta}{5+4\sin 2\theta}}}$$

(4) 直線 l と直線 m が交わるとき，$d=0$ であるから，(4) の結果より

$$1 + \sin 2\theta = 0$$

$0 \leqq \theta < \pi$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi}$