令和５年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和５年２月２５日
数 I・II・III・A・B (120 分)

問題 [1] [2] [3] [4]

1 $a \neq 0$ を実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = -x + 2a\sqrt{x-3}$ とする．曲線 $C: y = f(x)$ の点 $(7,\ f(7))$ における接線 l が，点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ と直線 $y = x - 2$ 上にある点 P とを結ぶ線分 AP の垂直二等分線となるとき，次に答えよ．

(1) 接線 l の方程式を a を用いて表せ．

(2) a をすべて求めよ．

(3) 原点を通り接線 l に平行な直線を m とする．曲線 C と直線 m で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

2 関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ を以下で定める．

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}, \quad f_3(x) = \cos(\pi x),$$
$$f_4(x) = xe^x, \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f_6(x) = \sin(\pi x)$$

次に答えよ．

(1) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について，$f_n'(0)$ および $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．以下では，(1) で得られた値が 1 つずつ書かれた 12 枚のカードから 1 枚を抜き出し，値を調べてからもとに戻すことを 3 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目に調べた値をそれぞれ $a,\ b,\ c$ とする．

(2) $ab = 0$ となる確率を求めよ．

(3) $ab = c$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 四面体OABCはOA $=$ OC $= 1$，OB $= \sqrt{2}$，$\angle$AOB $= \angle$BOC $= \dfrac{\pi}{4}$ をみたしている．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\angle$COA $= \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ として，次に答えよ．

(1) 線分ABの長さおよび内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および三角形ABCの面積 S を θ を用いて表せ．

(3) 3点A，B，Cの定める平面を α とし，α 上の点Hを直線OHと α が垂直になるように選ぶ．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ および θ を用いて表せ．

(4) (3)の点Hに対して，線分OHの長さを θ を用いて表せ．

(5) 四面体OABCの体積を V とする．V を θ を用いて表せ．また，θ が変化するとき，V の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 複素数 α について，実部を $\mathrm{Re}(\alpha)$，虚部を $\mathrm{Im}(\alpha)$ とおく．次に答えよ．

(1) 複素数 z について，方程式 $\dfrac{z-1}{z} = z$ を解け．

(2) 整数 $a,\ b,\ c,\ d$ は $ad - bc = 1$ をみたしている．等式

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad (cz+d \neq 0)$$

が成り立つことを示せ．

以下では，複素数 z について，

$$\text{条件 P} : |z| = 1,\ \ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) \leqq \frac{1}{2}$$

を考える．

(3) ある整数 $m,\ n$ について，$|mz+n| = 1$ と条件Pをみたす複素数 z が存在する．このとき，$m,\ n$ の組をすべて求めよ．

(4) $ad - bc = 1,\ b < 0$ をみたすある整数 $a,\ b,\ c,\ d$ について，$\dfrac{az+b}{cz+d} = z$ と条件Pをみたす複素数 z が存在する．このとき，$a,\ b,\ c,\ d$ の組をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=-x+2a\sqrt{x-3}$ より $f'(x)=-1+\dfrac{a}{\sqrt{x-3}}$

ゆえに $f(7)=-7+4a,\ f'(7)=-1+\dfrac{a}{2}$

したがって，C 上の点 $(7,\ f(7))$ における接線の方程式は

$$y-(-7+4a)=\left(-1+\frac{a}{2}\right)(x-7)$$

よって $\boldsymbol{l:\left(\dfrac{a}{2}-1\right)x-y+\dfrac{a}{2}=0}$

(2) 点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ を通り，l に垂直な直線は

$$1(x-4)+\left(\frac{a}{2}-1\right)y=0 \quad ゆえに \quad x+\left(\frac{a}{2}-1\right)y-4=0 \quad \cdots①$$

直線 ① と直線 $y=x-2\cdots$ ② の交点が P である．

①，② から y を消去すると

$$x+\left(\frac{a}{2}-1\right)(x-2)-4=0 \quad ゆえに \quad x=2+\frac{4}{a}$$

これを ② に代入して $y=\dfrac{4}{a}$ ゆえに $\mathrm{P}\left(2+\dfrac{4}{a},\ \dfrac{4}{a}\right)$

A，P の中点 $\left(3+\dfrac{2}{a},\ \dfrac{2}{a}\right)$ は l 上の点であるから

$$3+\frac{2}{a}+\left(\frac{a}{2}-1\right)\cdot\frac{2}{a}-4=0 \quad 整理すると \quad a^2-a-2=0$$

したがって $(a+1)(a-2)=0$ これを解いて $\boldsymbol{a=-1,\ 2}$

(3) l に平行で原点を通る直線 m の方程式は　　$y=\left(\dfrac{a}{2}-1\right)x$

$g(x)=f(x)-\left(\dfrac{a}{2}-1\right)x$ とすると

$$g(x)=-x+2a\sqrt{x-3}-\left(\frac{a}{2}-1\right)x=\frac{a}{2}\left(4\sqrt{x-3}-x\right)$$

$g(x)=0$ とすると　$4\sqrt{x-3}=x$

$$16(x-3)=x^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-4)(x-12)=0$$

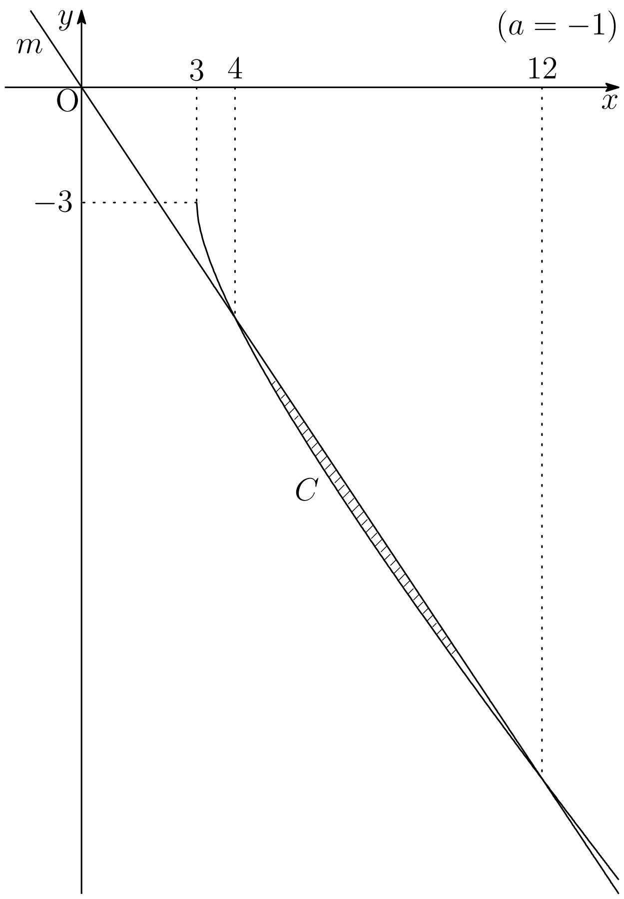
したがって，C と m の交点の x 座標は　$x=4,\ 12$

$4\leqq x\leqq 12$ において　$4\sqrt{x-3}-x\geqq 0$

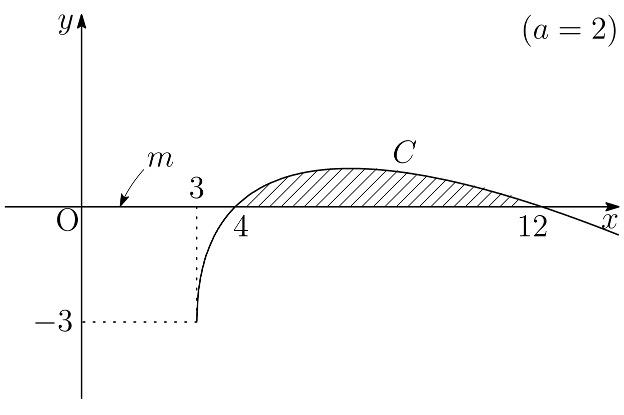
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_4^{12}|g(x)|\,dx=\frac{|a|}{2}\int_4^{12}(4\sqrt{x-3}-x)\,dx \\ &=\frac{|a|}{2}\left[\,\frac{8}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\,\right]_4^{12}=\frac{8}{3}|a| \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a=-1}$ **のとき** $\boldsymbol{S=\dfrac{8}{3}}$**,**　$\boldsymbol{a=2}$ **のとき** $\boldsymbol{S=\dfrac{16}{3}}$



$(a=-1)$
y
m
3
4
12
O
x
-3
C



$(a=2)$
y
m
C
3
O
4
12
x
-3

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f_1(x)=x$ より　$f_1'(x)=1$

$$f_1'(0)=\mathbf{1},\quad \int_0^1 f_1(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\Big[\ \frac{x^2}{2}\ \Big]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right) \text{ より}$$

$$f_2'(x)=\frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\}\quad \text{ゆえに}\quad f_2'(0)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}+1\right)=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_2(x)\,dx&=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=\frac{1}{3}\Big[\ \log\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\ \Big]_0^1=\mathbf{-\frac{2}{3}\log 2}\end{aligned}$$

$f_3(x)=\cos(\pi x)$ より　$f_3'(x)=-\pi\sin(\pi x)$

$$f_3'(0)=\mathbf{0},\quad \int_0^1 f_3(x)\,dx=\int_0^1\cos(\pi x)\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\ \sin(\pi x)\ \Big]_0^1=\mathbf{0}$$

$f_4(x)=xe^x$ より　$f_4'(x)=(x+1)e^x$

$$f_4'(0)=\mathbf{1},\quad \int_0^1 f_4(x)\,dx=\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[\ (x-1)e^x\ \Big]_0^1=\mathbf{1}$$

$$f_5(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \text{ より}\quad f_5'(x)=\frac{x}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\quad \text{ゆえに}\quad f_5'(0)=\mathbf{0}$$

$x=2\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^1 f_5(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot(2\cos\theta)\,d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

$f_6(x)=\sin(\pi x)$ より　$f_6'(x)=\pi\cos(\pi x)$

$$f_6'(0)=\boldsymbol{\pi},\quad \int_0^1 f_6(x)\,dx=\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\ -\cos(\pi x)\ \Big]_0^1=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$$

(2) (1) の結果から，0 でないカードが 9 枚あるから，$ab \neq 0$ となる確率は

$$\left(\frac{9}{12}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$ab = 0$ となる確率は，この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{9}{16} = \mathbf{\frac{7}{16}}$$

(3) $ab = c = 0$ となる確率は，(1) の結果から

$$\frac{7}{16}\cdot\frac{3}{12} = \frac{7}{64}$$

$ab = c \neq 0$ となる確率は，次の (i)〜(iv) である．

(i) $a = b = 1$ のとき，$a = b = c = 1$ となる確率であるから

$$\left(\frac{3}{12}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

(ii) $a = 1$，$b \neq 1$ のとき，$1\cdot b = b \neq 0$ となる確率であるから

$$\frac{3}{12}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{96}$$

(iii) $a \neq 1$，$b = 1$ のとき，$a\cdot 1 = a \neq 0$ となる確率であるから

$$\frac{3}{12}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{96}$$

(iv) $a \neq 1$，$b \neq 1$ のとき，$ab = c \neq 0$，すなわち，$a = b = \dfrac{1}{2}$，$c = \dfrac{1}{4}$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$$

以上の結果から，求める確率は

$$\frac{7}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{96} + \frac{1}{96} + \frac{1}{1728} = \mathbf{\frac{253}{1728}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB} = 1\cdot\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4} = \mathbf{1}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\cdot1 + 1^2 = 1$$

よって　$\mathrm{AB} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \mathbf{1}$

補足 $\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=\sqrt{2},\ \angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$ より　$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ は，(1) と同様に

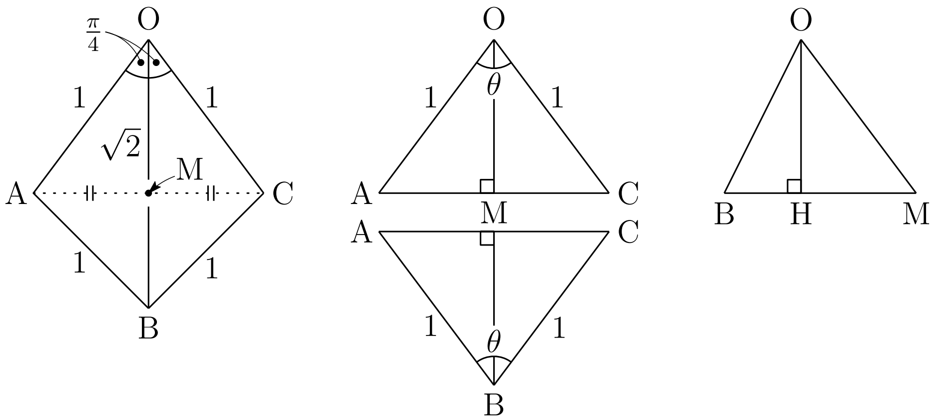
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\ &= 1^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC} + (\sqrt{2})^2\\ &= 3 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cos\frac{\pi}{4} = 1\end{aligned}$$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}=1$ より　$\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{BAC}$

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC} = 1\cdot1\cos\theta = \boldsymbol{\cos\theta}$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin\theta = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sin\theta}$$



(3) M を AC の中点とする．平面 OBM⊥AC であるから，H は平面 OBM 上の点で，OH は BM に引いた垂線である．

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \frac{(\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}})}{|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{BM}} \qquad (*)$$

このとき

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}),\\
|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})\\
&= \frac{1}{4}(1^2+1^2+2\cos\theta) = \frac{1+\cos\theta}{2},\\
\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}) = -\vec{b}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b})\\
&= \frac{1}{2}(-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+2|\vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(-1-1+2\cdot 2) = 1
\end{aligned}$$

これらを $(*)$ に代入すると　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に注意して

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{1+\cos\theta}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(\vec{b}+\frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{1+\cos\theta}\right)\cdot\vec{b}\\
&= |\vec{b}|^2+\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}-2|\vec{b}|^2}{1+\cos\theta} = 2+\frac{1+1-2\cdot 2}{1+\cos\theta} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}
\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{OH} = |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}}$

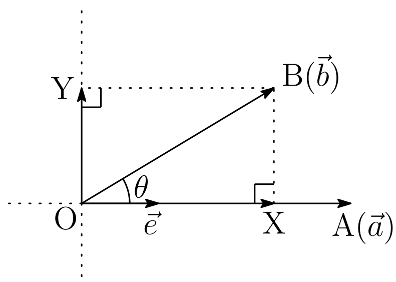
(5) (2),(4) の結果から

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\sqrt{\frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}}\\
&= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{1+\cos\theta}} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\sqrt{2\cos\theta(1-\cos\theta)}}
\end{aligned}$$

ゆえに　　$V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{-\cos^2\theta+\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{-\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$

よって　　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}$

補足 3点O，A，Bについて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．Bから直線OAに垂線BXを下ろし，Bから直線OAに垂直な直線に垂線BYを下ろす．このとき，次の2式が成立する．



$$\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\overrightarrow{\mathbf{OX}}+\overrightarrow{\mathbf{OY}},\quad \overrightarrow{\mathbf{OX}}=\frac{(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}})}{|\vec{\boldsymbol{a}}|^2}\vec{\boldsymbol{a}}$$

証明 第1式は自明．

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると　$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{b}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると $(|\vec{e}|=1)$

$$\vec{b}\cdot\vec{e}=|\vec{b}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}=\left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

証終

発展 四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，行列 M を $M=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると，四面体OABCの体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{c}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{b}=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\theta$ であるから

$$^tMM=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cos\theta\\ 1 & 2 & 1\\ \cos\theta & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\det M=\det{}^tM$ より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$ に注意して

$$(\det M)^2=2\cos\theta(1-\cos\theta)\quad ゆえに\quad |\det M|=\sqrt{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$$

よって　$V=\dfrac{1}{6}|\det M|=\dfrac{1}{6}\sqrt{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\dfrac{z-1}{z}=z$ より　　$z^2-z+1=0$

$z\neq 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) $\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2}=\dfrac{ac|z|^2+adz+bc\overline{z}+bd}{|cz+d|^2}$ より

$$\frac{az+b}{cz+d}-\overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}=\frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}=\frac{z-\overline{z}}{|cz+d|^2}$$

したがって　$\mathrm{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)=\dfrac{1}{2i}\left\{\dfrac{az+b}{cz+d}-\overline{\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right)}\right\}$

$$=\frac{1}{|cz+d|^2}\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

(3) 条件 P を満たすとき，$|\mathrm{Im}(z)|=\sqrt{|z|^2-\mathrm{Re}(z)^2}$ より

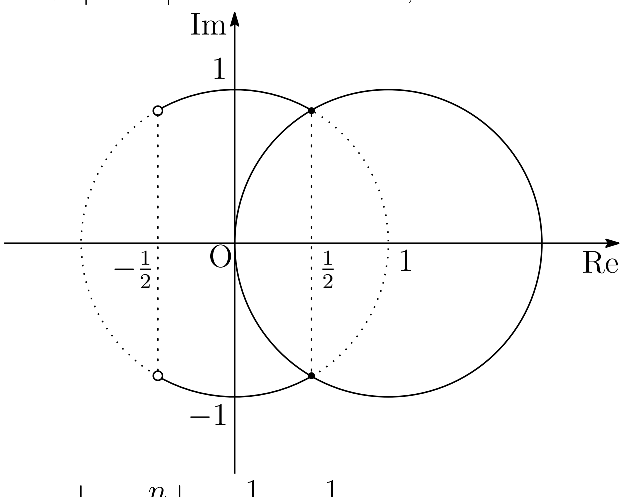
$|z|=1,\ -\dfrac{1}{2}<\mathrm{Re}(z)\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq|\mathrm{Im}(z)|\leqq 1$

$|mz+n|=1$ について ($m,\ n$ は整数)

(i) $m=0$ のとき，$|n|=1$　ゆえに　$n=\pm 1$

(ii) $m=1$ のとき，$|z-(-n)|=1$ より　$-n=0,\ 1$　ゆえに　$n=0,-1$

(iii) $m=-1$ のとき，$|z-n|=1$ より　$n=0,\ 1$



(iv) $|m|\geqq 2$ のとき　$\left|z+\dfrac{n}{m}\right|=\dfrac{1}{|m|}\leqq\dfrac{1}{2}$

$$\left|z+\frac{n}{m}\right|\geqq\left|\mathrm{Im}\left(z+\frac{n}{m}\right)\right|=|\mathrm{Im}(z)|\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

このとき，条件を満たす z は存在しない．

(i)〜(iv) から　$\boldsymbol{(m,\ n)=(0,\pm 1),\ (\pm 1,\ 0),\ (\pm 1,\mp 1)}$，**(複号同順)**

(4) $\dfrac{az+b}{cz+d}=z$ に (2) を適用すると　$\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}=\mathrm{Im}(z)$

$\mathrm{Im}(z)\neq 0$ であるから　　$|cz+d|^2=1$　$\cdots$①

さらに，$\dfrac{|az+b|^2}{|cz+d|^2}=|z|^2$ より　$|az+b|^2=1$　$\cdots$②

$b<0$ および (3) の結果から　$(a,\ b)=(0,-1),\ (1,-1)$

このとき，$\dfrac{az+b}{cz+d}$ は実数でないことに注意して，① および (3) の結果から，次の (i)〜(iv) の場合について確認する．

(i) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,\ 1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{-1}{z}=z$
ゆえに　$z^2=-1$　すなわち　$z=\pm i$　これは条件 P を満たす．

(ii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,-1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{-1}{-z}=z$
ゆえに　$z^2=1$　すなわち　$z=\pm 1$　これは条件 P を満たさない．

(iii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,\ 1,-1)$ のとき　$\dfrac{-1}{z-1}=z$
ゆえに　$z^2-z+1=0$　これは，(1) の結果から，条件 P を満たす．

(iv) $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,-1,\ 1)$ のとき　$\dfrac{-1}{-z+1}=z$
ゆえに　$z^2-z-1=0$　すなわち　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
これは条件 P を満たさない．

(v) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,\ 1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{z-1}{z}=z$
ゆえに　$z^2-z+1=0$　これは，(1) の結果から，条件 P を満たす．

(vi) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,-1,\ 0)$ のとき　$\dfrac{z-1}{-z}=z$
ゆえに　$z^2+z-1=0$　すなわち　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
これは条件 P を満たさない．

(vii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,\ 0,\ 1)$ のとき　$\dfrac{z-1}{1}=z$
解なしとなり，条件 P を満たさない．

(viii) $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,-1,\ 0,-1)$ のとき　$\dfrac{z-1}{-1}=z$
$z=\dfrac{1}{2}$ となり，条件 P を満たさない．

(i)〜(viii) より，求める $a,\ b,\ c,\ d$ は，次の 3 組である．

$\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d)=(0,-1,\ 1,\ 0),\ (0,-1,\ 1,-1),\ (1,-1,\ 1,\ 0)}$　■