令和４年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和 4 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次のルールに従って 1 つのさいころを 1 回以上投げ，出た目を記録していく．

- 1 投目に出た目を記録する．
- 2 投目以降は，最後に記録された目よりも大きな目が出た場合に，出た目を記録する．最後に記録された目より小さいか等しい目が出た場合は，出た目を記録しない．
- 出た目が 5 以下の場合は再びさいころを投げ，出た目が 6 の場合は 6 を記録して終了する．

終了するまでにさいころを投げた回数を n とする．たとえば，1 投目に 3 が，2 投目に 2 が，3 投目に 5 が，4 投目に 6 が出た場合，$n=4$ となり，目の記録は 3，5，6 となる．次に答えよ．

(1) $n=2$，かつ，目の記録が 1，6 となる確率を求めよ．

(2) $n=3$，かつ，目の記録が 1，6 となる確率を求めよ．

(3) $n=3$ の条件の下で，目の記録が 1，6 となる条件付き確率を求めよ．

(4) $n=m$ $(m \geqq 2)$，かつ，目の記録が 3，6 となる確率を，m を用いて表せ．

(5) 1 投目で 1 を記録し，k 投目で 3 を記録し，m 投目で 6 を記録して $(1<k<m)$，目の記録が 1，3，6 となる確率を，m と k を用いて表せ．

(6) $n=m$ $(m \geqq 3)$，かつ，目の記録が 1，3，6 となる確率を，m を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 原点を O とする座標平面上の曲線 $y=x^3$ $(x \geqq 0)$ を C とし，直線 $y=ax$ $(a>0)$ を l とする．さらに，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り l と垂直に交わる直線を m とし，l と m の交点を Q とする．次に答えよ．

(1) 直線 m の式を a と t を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の長さを a と t を用いて表せ．

(3) 線分 OQ の長さ s を a と t を用いて表せ．

(4) 直線 l と曲線 C で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) a が変化するとき，$\dfrac{V}{a^3}$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 自然数 n に対して整式 $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$f_1(x)=x, \quad f_2(x)=2x^2-1,$$
$$f_n(x)=2xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x) \quad (n=3,4,\cdots)$$

によって定める．ただし，$-1 \leqq x \leqq 1$ とする．次に答えよ．

(1) $f_3(x)$ を x の整式で表せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，すべての自然数 n に対して $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) (2) を用いて，$n \geqq 2$ のとき，$|f_n'(x)|=\dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ をみたす x $(-1<x<1)$ をすべて求めよ．

(4) $\theta=\dfrac{\pi}{9}$ のとき，$\cos\theta=\dfrac{q}{p}$ をみたす互いに素な自然数 $p,\ q$ は存在しないことを背理法で示せ．ただし，$f_3(\cos\theta)=\cos 3\theta$ が成り立つことを用いてよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 原点を O とする座標平面上に O とは異なる点 A と点 B があり，点 O，A，B は一直線上にないとする．また，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とする．次に答えよ．

(1) 点 A の座標が $(2,\ 1)$，点 B の座標が $(1,\ 3)$ のとき，$m\vec{a}+n\vec{b}=(1,-7)$ となるように $m,\ n$ を定めよ．

(2) $|\vec{b}-t\vec{a}|$ を最小にする実数 t とその最小値 s を $a,\ b,\ p$ を用いて表せ．

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，(2) の最小値 s を $b,\ \theta$ を用いて表せ．

(4) 点 A，B が $a \leqq b$，$\dfrac{|p|}{a^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ をみたすとき，$\vec{a}$ は，

$$m\vec{a}+n\vec{b} \quad (m,\ n \text{ は整数},\ (m,\ n) \neq (0,\ 0))$$

と表せるベクトルの中で，大きさが最小のベクトルであることを示せ．

(5) 点 A の座標を $(1,\ 0)$ とし，点 B を第 1 象限内にある点とする．また，原点 O を基準とする位置ベクトルが

$$m\vec{a}+n\vec{b} \quad (m \in \{-1,\ 0,\ 1\},\ n \in \{-1,\ 0,\ 1\},\ (m,\ n) \neq (0,\ 0))$$

である 8 個の点を考え，その中で $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\vec{a}+\vec{b}$ をみたす点を C とする．原点 O からこれら 8 個の点までの距離の中で距離 OC が最小となるとき，点 B が存在する領域を座標平面に図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 1 投目に 1，2 投目に 6 が出る確率であるから

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

(2) 1 投目と 2 投目に 1，3 投目に 6 が出る確率であるから

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{216}}$$

(3) $n=3$，すなわち，1 投目と 2 投目に 5 以下，3 投目に 6 が出る確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$$

これと (2) の結果から，求める条件付き確率は

$$\frac{1}{216}\Big/\frac{25}{216}=\boldsymbol{\frac{1}{25}}$$

(4) 1 投目に 3，2 投目から $m-1$ 投目まで 3 以下，m 投目に 6 が出る確率であるから

$$\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{6}\right)^{m-2}\times\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{9\cdot 2^m}}$$

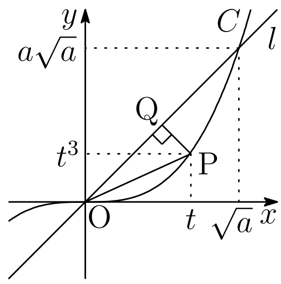
(5) 1 投目から $k-1$ 投目まで 1，k 投目に 3，$k+1$ 投目から $m-1$ 投目まで 3 以下，m 投目に 6 が出る確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{6}\right)^{m-k-1}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{m}\times 2^{k+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2^m3^{k+1}}}$$

(6) (5) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{2^m3^{k+1}}&=\frac{1}{2^m}\sum_{k=2}^{m-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\\&=\frac{1}{2^m}\times\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}}{1-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3^m}\right)}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) m は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{a}$ の直線であるから



$$y - t^3 = -\frac{1}{a}(x - t)$$

よって　$\boldsymbol{y = -\dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{a} + t^3}$

(2) PQ は点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ と直線 $l : ax - y = 0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ} = \boldsymbol{\frac{|at - t^3|}{\sqrt{a^2 + 1}}}$$

(3) $\mathrm{OQ}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$\mathrm{OQ}^2 = (t^2 + t^6) - \frac{(at - t^3)^2}{a^2 + 1} = t^2\left\{1 + t^4 - \frac{(a - t^2)^2}{a^2 + 1}\right\} = \frac{t^2(at^2 + 1)^2}{a^2 + 1}$$

$a > 0$ より　　$s = \mathrm{OQ} = \boldsymbol{\dfrac{t(at^2 + 1)}{\sqrt{a^2 + 1}}}$

(4) (3) の結果を微分すると　$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3at^2 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}}$

C と l の交点を $\mathrm{R}(\sqrt{a},\ a\sqrt{a})$ とし，$s_0 = \mathrm{OR}$ とおくと

s	$0 \longrightarrow s_0$
t	$0 \longrightarrow \sqrt{a}$

したがって

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{s_0} \mathrm{PQ}^2\,ds = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(at - t^3)^2}{a^2 + 1}\cdot\frac{ds}{dt}\,dt = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(at - t^3)^2}{a^2 + 1}\cdot\frac{3at^2 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}}\,dt$$

$$= \frac{1}{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sqrt{a}} \{3at^8 + (1 - 6a^2)t^6 + (3a^3 - 2a)t^4 + a^2t^2\}\,dt$$

$$= \frac{1}{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\left[\ \frac{1}{3}at^9 + \frac{1}{7}(1 - 6a^2)t^7 + \frac{1}{5}(3a^3 - 2a)t^5 + \frac{1}{3}a^2t^3\ \right]_0^{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{8a^{\frac{7}{2}}(a^2 + 1)}{105} = \frac{8a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2 + 1}}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2 + 1}}}$

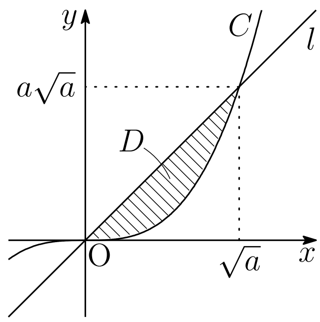
(5) (4) の結果から $\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{8\pi}{105}\sqrt{\dfrac{a}{a^2+1}}=\dfrac{8\pi}{105\sqrt{a+\frac{1}{a}}}$

$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{a}}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって $\dfrac{V}{a^3}\leqq\dfrac{8\pi}{105\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ よって，求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi}$

補足 $0\leqq x\leqq\sqrt{a}$ において，$C: y=x^3$ と $l: y=ax$ で囲まれた図形 D の面積を S とすると



$$\begin{aligned} S&=\int_0^{\sqrt{a}}(ax-x^3)\,dx\\ &=\left[\,\frac{ax^2}{2}-\frac{x^4}{4}\,\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

D を y 軸，x 軸のまわりにそれぞれ 1 回転してできる立体の体積 V_1，V_2 は

$$\begin{aligned} V_1&=2\pi\int_0^{\sqrt{a}}x(ax-x^3)\,dx=2\pi\left[\,\frac{ax^3}{3}-\frac{x^5}{5}\,\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{4\pi a^{\frac{5}{2}}}{15},\\ V_2&=\pi\int_0^{\sqrt{a}}\{(ax)^2-(x^3)^2\}\,dx=\pi\left[\,\frac{a^2x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\,\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{4\pi a^{\frac{7}{2}}}{21}\end{aligned}$$

D の重心を $\mathrm{G}(h_1,\ h_2)$ とすると，パップス・ギュルダンの定理により[1]

$$V_1=2\pi h_1S,\quad V_2=2\pi h_2S \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{G}\left(\frac{8\sqrt{a}}{15},\ \frac{8a\sqrt{a}}{21}\right)$$

G と直線 $l: ax-y=0$ の距離 d は $d=\dfrac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}}$

D を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi dS=2\pi\cdot\frac{16a\sqrt{a}}{105\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{a^2}{4}=\frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

別解 領域 D の微小区間 $[t,\ t+\Delta t]$ の面積 ΔS とその重心 G は

$$\Delta S=(at-t^3)\Delta t,\quad \mathrm{G}\left(t,\ \frac{at+t^3}{2}\right)$$

G と直線 $l: ax-y=0$ の距離 d は $(0 \leqq t \leqq \sqrt{a})$ $\quad d=\dfrac{at-t^3}{2\sqrt{a^2+1}}$

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_0^{\sqrt{a}}\frac{at-t^3}{2\sqrt{a^2+1}}\cdot(at-t^3)\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\int_0^{\sqrt{a}}(t^6-2at^4+a^2t^2)\,dt\\&=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2a}{5}t^5+\frac{a^2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{8\pi a^{\frac{7}{2}}}{105\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

3

$$(*)\ \begin{cases}f_1(x)=x,\quad f_2(x)=2x^2-1,\\ f_n(x)=2xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\quad (n=3,4,\cdots)\end{cases}$$

(1) 与えられた漸化式 $(*)$ より

$$\begin{aligned}f_3(x)&=2xf_2(x)-f_1(x)\\&=2x(2x^2-1)-x=\boldsymbol{4x^3-3x}\end{aligned}$$

(2) $(**)$ $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$

［1］$n=1$ のとき，$(*)$ より $\quad f_1(\cos\theta)=\cos\theta$

$n=2$ のとき，$(*)$ より $\quad f_2(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

よって，$n=1,\ 2$ のとき，$(**)$ は成立する．

［2］$n \leqq k$ のとき $(k \geqq 2)$，$(**)$ が成立すると仮定すると，$(*)$ より

$$\begin{aligned}f_{k+1}(\cos\theta)&=2\cos\theta f_k(\cos\theta)-f_{k-1}(\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで $\quad \cos(k+1)\theta=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta,$

$\qquad\qquad \cos(k-1)\theta=\cos k\theta\cos\theta+\sin k\theta\sin\theta$

これらの 2 式の辺々を加えると

$$\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta=2\cos k\theta\cos\theta$$

したがって $\quad \cos(k+1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta\quad\cdots②$

①，② より $\quad f_{k+1}(\cos\theta)=\cos(k+1)\theta$

よって，$n=k+1$ のときも $(**)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，次式が成立する．

$$f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

(3) $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ の両辺を θ について微分すると

$$f_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)=-n\sin n\theta \quad \text{ゆえに} \quad f_n'(\cos\theta)\sin\theta=n\sin n\theta$$

$x=\cos\theta$ $(-1<x<1)$ とおくと $(0<\theta<\pi)$

$$|\sin\theta|=\sqrt{1-x^2}\neq 0$$

したがって $\qquad |f_n'(x)|=\dfrac{n|\sin n\theta|}{\sqrt{1-x^2}}$

$n\geqq 2$ のとき，$|f_n'(x)|=\dfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}$ をみたすから

$$|\sin n\theta|=1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos n\theta=0$$

したがって $\quad n\theta=\dfrac{2k-1}{2}\pi \quad$ (k は自然数)

$0<\theta<\pi$ であるから $\quad \theta=\dfrac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1,2,\cdots,n)$

よって $\qquad \boldsymbol{x=\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1,2,\cdots,n)}$

補足 「$\cos n\theta$ は $\cos\theta$ の n 次式である」を示す

［1］$n=1$ のとき，自明であり，$n=2$ のとき，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ であるから，$\cos 2\theta$ は $\cos\theta$ の 2 次式である．

［2］$\cos k\theta$，$\cos(k-1)\theta$ が，それぞれ $\cos\theta$ の k 次式，$k-1$ 次式であると仮定すると

$$\cos(k+1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta \qquad (**)$$

これから，$\cos(k+1)\theta$ は $\cos\theta$ の $k+1$ 次式である．

［1］,［2］より，$\cos n\theta$ は，$\cos\theta$ の n 次式である． (証終)

$(*)$ と $(**)$ の漸化式が一致するから $\quad \cos n\theta=f_n(\cos\theta)$

$\cos n\theta=0$ の解は，θ の主値を $0\leqq\theta\leqq\pi$ とすると

$$n\theta=\frac{2k-1}{2}\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta=\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

よって，n 次方程式 $f_n(x)=0$ の解は (解は $-1\leqq x\leqq 1$ にある)

$$x=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

(4) $f_3(\cos\theta)=\cos 3\theta$ および (1) の結果から

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$$

$\theta=\dfrac{\pi}{9}$，$\cos\theta=\dfrac{q}{p}$ を上式に代入すると (p, q は互いに素)

$$4\left(\frac{q}{p}\right)^3-3\cdot\frac{q}{p}=\frac{1}{2} \quad ゆえに \quad 8q^3-6p^2q=p^3$$

上の第 2 式の左辺は偶数であるから，p^3 は偶数，すなわち，p は偶数であるから，整数 r を用いて，$p=2r$ とすると (q, r は互いに素)

$$8q^3-24r^2q=8r^3 \quad ゆえに \quad \frac{q^3}{r}=3rq+r^2$$

上の第 2 式の右辺は整数であるから，左辺の分母 r は 1 となる．このとき，

$$q^3=3q+1 \quad ゆえに \quad q(q^2-3)=1$$

これを満たす自然数 q は存在しない，すなわち，$\cos\theta=\dfrac{q}{p}$ を満たす自然数 p, q (p, q は互いに素) は存在しない．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) A(2, 1)，B(1, 3)，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$

$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$ を $m\vec{a}+n\vec{b}=(1,-7)$ に代入すると

$$m(2,\ 1)+n(1,\ 3)=(1,-7) \quad ゆえに \quad \begin{cases} 2m+n=1 \\ m+3n=-7 \end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{m=2,\ n=-3}$

(2) $\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$

$$\begin{aligned}|\vec{b}-t\vec{a}|^2&=|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2=b^2-2pt+a^2t^2\\ &=a^2\left(t^2-\frac{2p}{a^2}t\right)+b^2=a^2\left(t-\frac{p}{a^2}\right)^2+b^2-\frac{p^2}{a^2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{t=\dfrac{p}{a^2}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{s=\sqrt{b^2-\dfrac{p^2}{a^2}}}$

(3) $p=ab\cos\theta$ を (2) の結果に代入すると ($0\leqq\theta\leqq\pi$)

$$p=\sqrt{b^2-\frac{(ab\cos\theta)^2}{a^2}}=\sqrt{b^2(1-\cos^2\theta)}=\boldsymbol{b\sin\theta}$$

(4) $\dfrac{|p|}{a^2} \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$|2p| \leqq a^2$ であるから

$$\begin{aligned} |m\vec{a}+n\vec{b}|^2 &= m^2a^2+2mnp+n^2b^2 \\ &\geqq m^2a^2-|mm|a^2+n^2a^2+n^2(b^2-a^2) \\ &= \{(|m|-|n|)^2+|mn|\}a^2+n^2(b^2-a^2) \end{aligned}$$

$m,\ n$ は整数であるから，$(|m|-|n|)^2+|mn|$ は非負整数である．
$(|m|-|n|)^2+|mn|=0$ とすると

$$|m|-|n|=0,\quad |mn|=0 \quad \text{すなわち} \quad m=n=0$$

となり，条件に反する．$(|m|-|n|)^2+|mn| \geqq 1$ および $b \geqq a$ であるから

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|^2 \geqq a^2 \quad \text{よって} \quad |m\vec{a}+n\vec{b}| \geqq |\vec{a}|$$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}-\vec{a}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

A$(1,\ 0)$，B$(x,\ y)$ とおくと $(x>0,\ y>0)$　$\vec{a}=(1,\ 0)$，$\vec{b}=(x,\ y)$

条件から　$|\vec{b}-\vec{a}| \leqq |\vec{a}+\vec{b}|,\quad |\vec{b}-\vec{a}| \leqq |\vec{a}|,\quad |\vec{b}-\vec{a}| \leqq |\vec{b}|$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b} \geqq 0,\quad |\vec{b}-\vec{a}|^2 \leqq 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} \geqq \dfrac{1}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x$，$|\vec{b}-\vec{a}|^2=(x-1)^2+y^2$ より，点 B の表す不等式は

$$x \geqq \frac{1}{2},\quad y>0,\quad (x-1)^2+y^2 \leqq 1$$

よって，点 B が存在する領域は，右下の図の斜線部分で境界線を含む．
ただし，x 軸上の境界線は除く．