令和４年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和４年２月２５日
数 I・II・III・A・B (120分)

問題 1 2 3 4

1 $p \neq 0$ を定数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = x^2 - px + 1, \quad g(x) = \frac{1}{p}x$$

とおく．定数 $\alpha > 1$ に対し $f(\alpha) = 0$ であるとき，曲線 $C : y = f(x)$ および直線 $l : y = g(x)$ について，次に答えよ．

(1) $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$ を示せ．

(2) 曲線 C と直線 l の交点の座標を p を用いて表せ．

(3) 曲線 C の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における法線を m とする．法線 m と直線 l の交点の座標を p を用いて表せ．

(4) (3) の法線 m を $y = h(x)$ と表す．連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq g(x) \\ y \geqq h(x) \end{cases}$$

の表す図形を D とする．図形 D を直線 $x = \dfrac{p}{2}$ のまわりに１回転してできる立体の体積 V を α を用いて表せ．

2 関数

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}, \quad g(x) = \frac{x-2}{x}$$

がある．次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(\sqrt{x} + \sqrt{x+4}) - \log\sqrt{x}\}$ を求めよ．

(2) ２つの関数 $\sqrt{x(x+4)}$ と $\log(\sqrt{x} + \sqrt{x+4})$ をそれぞれ微分せよ．

(3) $x > 0$ のとき，不等式 $f(x) > g(x)$ を示せ．

(4) O を原点とする座標平面において，曲線 $y = g(x)$ と x 軸の交点を P とする．$t > 2$ のとき，２曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と線分 OP および直線 $x = t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ O を原点とする座標空間に一直線上にない 3 点 A，B，C がある．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を $(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分表示を $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする．また，点 A を始点とし成分表示が $(b_2c_3 - b_3c_2,\ b_3c_1 - b_1c_3,\ b_1c_2 - b_2c_1)$ となるベクトルの終点を D とする．次に答えよ．

(1) 3 点 A，B，C の定める平面上の任意の点を P とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の値が 0 になることを示せ．

以下では，3 点 A，B，C の座標をそれぞれ

$$(-1,\ 1,\ 2), \quad (3, -1,\ 0), \quad (1,\ 3, -2)$$

とする．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 正の実数 k に対して $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をみたす点 E がある．三角形 EBC の面積が $6\sqrt{5}$ であるとき，点 E の座標を求めよ．

(4) (3) で求めた点 E に対して，三角形 EBC の重心を G とする．以下の 2 つの条件をみたす点 Q の座標をすべて求めよ．
(条件 1) $\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ は 3 点 E，B，C の定める平面に垂直である．
(条件 2) 四面体 QEBC の体積と四面体 EABC の体積が等しい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次に答えよ．

(1) $a_n = n^2$ の場合を考える．このとき，b_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を n を用いて表せ．

(2) $a_n = \sin n\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ の場合を考える．$b_n = 0$ がすべての n について成り立つとき θ を求めよ．

(3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ の場合を考える．

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_{n+1}}$ を求めよ．

(ii) b_n と a_{n+1} の大小を比較せよ．

(4) $a_1 = 1$，$a_2 = 4$，および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ が成り立つ場合を考える．

(i) a_{n+1} と a_n の関係を表す等式を求めよ．

(ii) b_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を n を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^2-px+1$ および $f(\alpha)=0$ より

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - p\cdot\frac{1}{\alpha}+1 \\ &= \frac{1}{\alpha^2}(1-p\alpha+\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}f(\alpha)=0 \end{aligned}$$

(2) $C: y=x^2-px+1$，$l: y=\dfrac{1}{p}x$ から，y を消去すると

$$x^2-px+1=\frac{1}{p}x \quad \text{ゆえに} \quad (x-p)\left(x-\frac{1}{p}\right)=0$$

l の方程式から　$x=p$ のとき $y=1$，$x=\dfrac{1}{p}$ のとき $y=\dfrac{1}{p^2}$

よって，C と l の交点の座標は　$\boldsymbol{(p,\ 1)}$，$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{p},\ \dfrac{1}{p^2}\right)}$

(3) $f(x)=x^2-px+1$ より　$f'(x)=2x-p$

$f(\alpha)=0$，$f'(\alpha)=2\alpha-p$ であるから，m の方程式は

$$x-\alpha+f'(\alpha)\{y-f(\alpha)\}=0 \quad \text{すなわち} \quad x-\alpha+(2\alpha-p)y=0$$

これと l の方程式から y を消去すると

$$x-\alpha+(2\alpha-p)\cdot\frac{1}{p}x \quad \text{ゆえに} \quad \alpha(2x-p)=0$$

$\alpha\neq 0$ より　$x=\dfrac{p}{2}$　これを l の方程式に代入すると　$y=\dfrac{1}{2}$

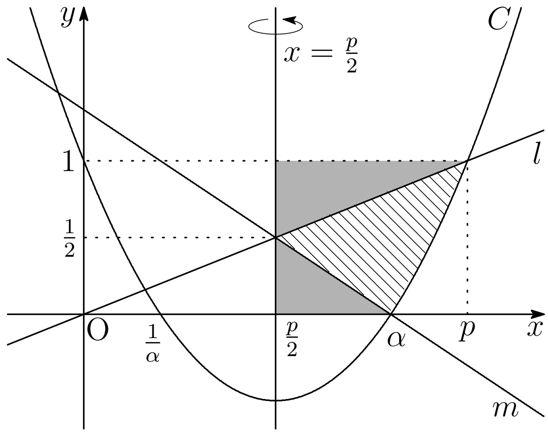
よって，交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

(4) $f(x)=0$ の解が $\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}$ であるから $(\alpha>1)$，解との係数の関係により

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=p \quad \text{ゆえに} \quad 0<\frac{1}{\alpha}<\frac{p}{2}<\alpha$$

曲線 C の方程式を変形すると $\quad \left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2=y+\dfrac{p^2}{4}-1$

連立不等式の表す領域 D は，下の図の斜線部分である．



したがって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 dy-\frac{1}{3}\pi\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\pi\left(p-\frac{p}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\\
&= \pi\int_0^1\left(y+\frac{p^2}{4}-1\right)dy-\frac{\pi}{6}\left(\alpha^2-\alpha p+\frac{p^2}{2}\right)\\
&= \pi\Big[\,\frac{y^2}{2}+\left(\frac{p^2}{4}-1\right)y\,\Big]_0^1-\frac{\pi}{6}\left(\alpha^2-\alpha p+\frac{p^2}{2}\right)\\
&= \pi\left(\frac{p^2}{6}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\alpha p}{6}\right)\\
&= \pi\left\{\frac{1}{6}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{6}+\frac{\alpha}{6}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}\\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6}\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)}
\end{aligned}$$

補足 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(p,\ 1)$ を通る直線を n とする．3 直線 $l,\ m,\ n$ で囲まれた三角形を T とし，T の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\left(p - \frac{p}{2}\right) g(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot\frac{\alpha}{p} = \frac{\alpha}{4}$$

T の重心を G とし，G の x 座標を x_g とすると

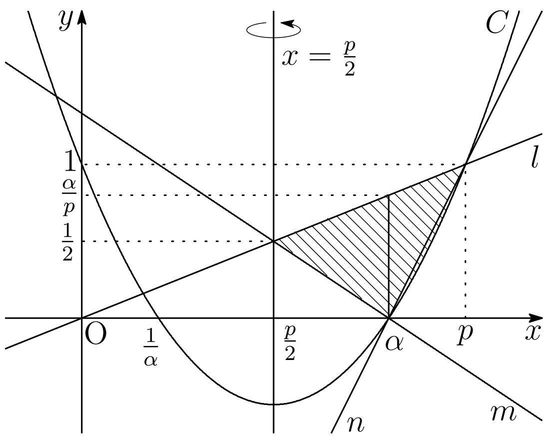
$$x_g = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2} + \alpha + p\right) = \frac{p}{2} + \frac{\alpha}{3}$$

G と直線 $x = \dfrac{p}{2}$ の距離を d とすると

$$d = x_g - \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2} + \frac{\alpha}{3}\right) - \frac{p}{2} = \frac{\alpha}{3}$$

T を直線 $x = \dfrac{p}{2}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem) により [1]

$$V_1 = 2\pi dS = 2\pi\cdot\frac{\alpha}{3}\cdot\frac{\alpha}{4} = \frac{\pi\alpha^2}{6}$$



直線 n の方程式は　$y = \dfrac{1}{p-\alpha}(x-\alpha)$　すなわち　$y = \alpha(x-\alpha)$

C と n で囲まれた図形を直線 $x = \dfrac{p}{2}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とすると，バウムクーヘン型求積法により

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_\alpha^p \left(x - \frac{p}{2}\right)\left\{\alpha(x-\alpha) - (x-\alpha)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\right\} dx$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

$p = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ を利用すると

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{2\pi} &= \int_\alpha^p \left(x - \frac{p}{2}\right)(x-\alpha)\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - x\right) dx \\
&= \int_\alpha^p \left\{\frac{p}{2} - (p-x)\right\}(x-\alpha)(p-x)\,dx \\
&= \frac{p}{2}\int_\alpha^p (x-\alpha)(p-x)\,dx - \int_\alpha^p (x-\alpha)(p-x)^2\,dx \\
&= \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{6}(p-\alpha)^3 - \frac{1}{12}(p-\alpha)^4 \\
&= \frac{1}{12}\{p - (p-\alpha)\}(p-\alpha)^3 = \frac{1}{12}\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = \frac{1}{12\alpha^2}
\end{aligned}$$

したがって　$V_2 = \dfrac{\pi}{6\alpha^2}$　　よって　$V = V_1 + V_2 = \dfrac{\pi}{6}\left(\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

また積分公式[2]

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用している． ■

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})-\log\sqrt{x}\} = \lim_{x\to\infty}\log\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right) = \mathbf{log\,2}$

(2)

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x(x+4)} = \frac{\{x(x+4)\}'}{2\sqrt{x(x+4)}} = \frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{\sqrt{x(x+4)}}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}) &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})'}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+4)}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{x(x+4)}}}\end{aligned}$$

(3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$，$g(x) = \dfrac{x-2}{x}$

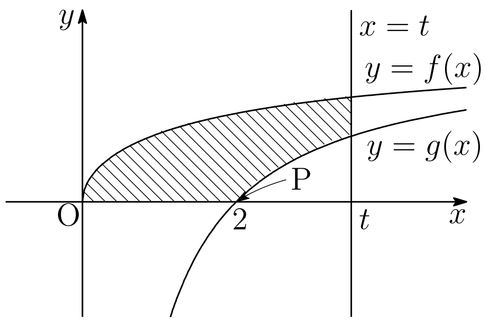
(i) $0 < x \leqq 2$ のとき，$f(x) > 0$，$g(x) \leqq 0$ より　$f(x) > g(x)$

(ii) $x > 2$ のとき，$f(x) > 0$，$g(x) > 0$

$$\begin{aligned}f(x)^2 - g(x)^2 &= \frac{x}{x+4} - \frac{(x-2)^2}{x^2} \\ &= \frac{x^3-(x+4)(x-2)^2}{x^2(x+4)} = \frac{4(3x-4)}{x^2(x+4)} > 0\end{aligned}$$

(i)，(ii) より　$x > 2$ のとき　$f(x) > g(x)$

(4) $S(t)$ は，次の図の斜線部分の面積である



これから

$$S(t) = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^t \{f(x)-g(x)\}\,dx \qquad (*)$$

(2) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} = \frac{x}{\sqrt{x(x+4)}} \\ &= \frac{x+2}{\sqrt{x(x+4)}} - 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x(x+4)}} \\ &= \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x(x+4)} - 4\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})\right\}, \end{aligned}$$

また

$$g(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} = \frac{d}{dx}(x - 2\log x)$$

これから

$$F(x) = \sqrt{x(x+4)} - 4\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}), \quad G(x) = x - 2\log x \qquad (**)$$

とおくと

$$\sqrt{x(x+4)} - x = \frac{x(x+4)-x^2}{\sqrt{x(x+4)}+x} = \frac{4x}{\sqrt{x(x+4)}+x} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}$$

に注意して

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \sqrt{x(x+4)} - 4\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}) - (x - 2\log x) \\ &= \sqrt{x(x+4)} - x - 4\{\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}) - \log\sqrt{x}\} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} - 4\log\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right) \qquad (***) \end{aligned}$$

$(*)$ より
$$\begin{aligned} S(t) &= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^2 + \Big[\ F(x) - G(x)\ \Big]_2^t \\ &= -F(0) + G(2) + \{F(t) - G(t)\} \end{aligned}$$

$(**)$ より　$F(0) = -4\log 2$，$G(2) = 2 - 2\log 2$

$(***)$ より　$\lim_{t\to\infty}\{F(t) - G(t)\} = 2 - 4\log 2$

よって

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = -(-4\log 2) + (2 - 2\log 2) + (2 - 4\log 2) = \mathbf{4 - 2\log 2}$$

■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=b_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_2(b_3c_1-b_1c_3)+b_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_1b_2c_3-b_3b_1c_2+b_2b_3c_1-b_1b_2c_3+b_3b_1c_2-b_2b_3c_1=0,\\\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=c_1(b_2c_3-b_3c_2)+c_2(b_3c_1-b_1c_3)+c_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_2c_3c_1-b_3c_1c_2+b_3c_1c_2-b_1c_2c_3+b_1c_2c_3-b_2c_3c_1=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が1次独立であるから，平面ABC上の任意の点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad(\alpha,\ \beta\text{は実数})$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0\end{aligned}$$

(2) 等式

$$\begin{aligned}({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)({c_1}^2+{c_2}^2+{c_3}^2)&=(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2+(b_2c_3-b_3c_2)^2\\&\quad+(b_3c_1-b_1c_3)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2\end{aligned}$$

より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$ が成立する．

したがって，△ABCの面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\qquad(*)$$

A$(-1,\ 1,\ 2)$，B$(3,-1,\ 0)$，C$(1,\ 3,-2)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,-2,-2),\quad\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 2,-4)$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-2\cdot(-4)-(-2)\cdot2,\ (-2)\cdot2-4\cdot(-4),\ 4\cdot2-(-2)\cdot2)$
$=(12,\ 12,\ 12)$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=\mathbf{6\sqrt{3}}$

(3) $(*)$ と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (d_1,\ d_2,\ d_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = (d_2e_3 - d_3e_2,\ d_3e_1 - d_1e_3,\ d_1e_2 - d_2e_1) \qquad (**)$$

とすると，$\triangle\mathrm{BCE} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BF}}|$ である．

$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(3, -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 3, -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= (-1,\ 1,\ 2) + k(12,\ 12,\ 12)\\ &= (12k-1,\ 12k+1,\ 12k+2) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 3, -2) - (3, -1,\ 0) = (-2,\ 4, -2),\\ \overrightarrow{\mathrm{BE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (12k-1,\ 12k+1,\ 12k+2) - (3, -1,\ 0)\\ &= (12k-4,\ 12k+2,\ 12k+2)\end{aligned}$$

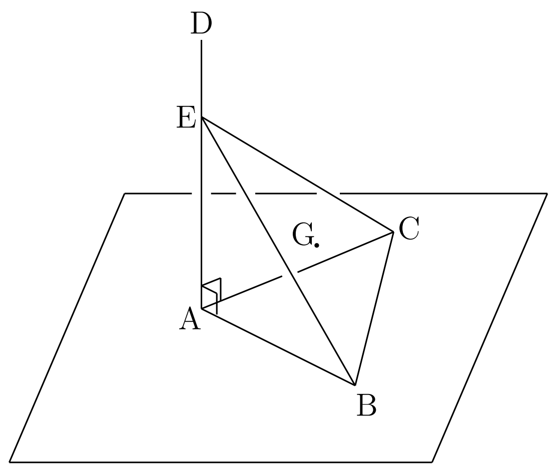
$(**)$ により，$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = 12(-6k-1, -1,\ 6k-1)$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BCE} &= \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{(-6k-1)^2 + (-1)^2 + (6k-1)^2}\\ &= 6\sqrt{72k^2+3}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{EBC} = 6\sqrt{5}$ であるから

$$6\sqrt{72k^2+3} = 6\sqrt{5} \quad \text{これを解いて}\ (k>0) \quad k = \frac{1}{6}$$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1,\ 3,\ 4)$　よって　**E(1，3，4)**



(4) A$(-1,\ 1,\ 2)$，E$(1,\ 3,\ 4)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(2,\ 2,\ 2)\quad \text{ゆえに}\quad |\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2\sqrt{3}$$

2 つの条件から　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BCE}|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|$

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{5}|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|\quad \text{ゆえに}\quad |\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

(3) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=12(-2,-1,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{v}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ は平行であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{GQ}}|\vec{e}=\pm\frac{6}{5}(2,\ 1,\ 0)$$

また，E$(1,\ 3,\ 4)$，B$(3,-1,\ 0)$，C$(1,\ 3,-2)$ より，$\triangle$EBC の重心 G は

$$\mathrm{G}\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)\pm\frac{6}{5}(2,\ 1,\ 0)$$

よって，求める点 E の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{61}{15},\ \frac{43}{15},\ \frac{2}{3}}\right)\quad \textbf{または}\quad \left(\boldsymbol{-\frac{11}{15},\ \frac{7}{15},\ \frac{2}{3}}\right)$$

■

$\boxed{4}$ (1) $a_n = n^2$ より

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\{n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2\} = \boldsymbol{n^2 + 2n + \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + 2k + \frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{5}{3}n \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) + 6(n+1) + 10\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n^2 + 9n + 17)} \end{aligned}$$

(2) $a_n = \sin n\theta\ (0 < \theta < \pi)$ より

$$\begin{aligned} 3b_n &= a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \\ &= \sin n\theta + \sin(n+1)\theta + \sin(n+2)\theta \\ &= \sin(n+1)\theta + \{\sin n\theta + \sin(n+2)\theta\} \\ &= \sin(n+1)\theta + 2\sin(n+1)\theta\cos\theta \\ &= (1 + 2\cos\theta)\sin(n+1)\theta = 0 \end{aligned}$$

$1 + 2\cos\theta \neq 0$ と仮定すると，すべての n について

$$\sin(n+1)\theta = 0$$

となる．例えば，$n = 1,\ 2$ のとき

$$\sin 2\theta = 0 \quad \text{かつ} \quad \sin 3\theta = 0$$

すなわち　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$　かつ　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}$　これを満たす θ は存在しない．

したがって，$1 + 2\cos\theta = 0\ (0 < \theta < \pi)$ を解いて　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2\pi}{3}}$

(3) (i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ より

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})\} \\
&= \frac{1}{3}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

また，$a_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$ であるから

$$
\frac{b_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1}
$$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1} = \frac{1+1}{1+1} = \mathbf{1}$

(ii) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ より

$$
\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} < a_n
$$

$\{a_n\}$ は単調減少列であるから

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{a_{n+1}} - 1 &= \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} - 1 \\
&= \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{a_n - a_{n+3}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} > 0
\end{aligned}
$$

$a_{n+1} > 0$ であるから $\boldsymbol{b_n > a_{n+1}}$

(4) (i) (∗) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$

(∗) に $n=1$ を代入すると，$a_1 = b_1$ より

$$a_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \quad \text{整理すると} \quad a_3 + a_2 - 2a_1 = 0 \quad \cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき，(∗) より

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} b_k, \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n$$

上の 2 式から　$a_n = b_n$

$$a_n = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n = 0 \qquad (**)$$

① より，(∗∗) は，正の整数 n について成立するから

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + 2a_n = a_2 + 2a_1$$

$a_1 = 1$，$a_2 = 4$ より　$\boldsymbol{a_{n+1} + 2a_n = 6}$

(ii) (∗∗) より　$a_{n+2} - a_{n+1} = -2(a_{n+1} - a_n)$

$$a_{n+1} - a_n = (-2)^{n-1}(a_2 - a_1) = 3(-2)^{n-1}$$

これと (i) の結果から，a_{n+1} を消去すると

$$3a_n = 6 - 3(-2)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 2 - (-2)^{n-1}$$

$a_n = b_n$ であるから　$\boldsymbol{b_n = 2 - (-2)^{n-1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} \{2 - (-2)^{k-1}\} \\ &= 2n - \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} \\ &= \boldsymbol{2n - \frac{1 - (-2)^n}{3}}\end{aligned}$$

■