令和３年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和３年３月12日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ グー・チョキ・パーの 3 つの手からなる通常のじゃんけんに,「サム」とよぶ 4 つの目の手を加えた「拡張じゃんけん」を考える．n 人 ($n \geqq 3$) で行う 1 回の拡張じゃんけんでは，各人は必ず 4 つの手のいずれかを出し，サムを出した人数 k に応じて，次の表のように勝ち負け，あるいは勝ち負けなし (あいこ) を決める．

サムを出した人数 k	勝ち	負け
$k=0$	通常のじゃんけんのルールにしたがう	
$k=1$	サムを出した人	サム以外の手を出した人すべて
$2 \leqq k \leqq n-1$	サム以外の手を出した人すべて	サムを出した人すべて
$k=n$	勝ち負けなし (あいこ)	

A 君を含む n 人が拡張じゃんけんを 1 回行う．A 君以外の $n-1$ 人の各人は，サム，グー，チョキ，パーの手をそれぞれ確率 p，$\dfrac{1-p}{3}$，$\dfrac{1-p}{3}$，$\dfrac{1-p}{3}$ $(0<p<1)$ で出すものとする．次に答えよ．

(1) A 君はサムを出す．$n=4$，$p=\dfrac{1}{4}$ のとき A 君が勝つ確率を求めよ．

(2) A 君はサムを出す．$n=4$，$p=\dfrac{1}{4}$ のとき A 君が負ける確率を求めよ．

(3) A 君はグーを出す．$n=4$，$p=\dfrac{1}{4}$ のとき A 君が勝つ確率を求めよ．

(4) $n=4$，$p=\dfrac{1}{4}$ で A 君がグーを出して勝ったとき，サムを出した人がいる条件付き確率を求めよ．

(5) A 君はサムを出す．A 君が負ける確率を p と n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数直線上で点 P に実数 x が対応しているとき，x を点 P の座標といい，座標が x である点 P を $\mathrm{P}(x)$ で表す．数直線上の点 $\mathrm{A}_n(a_n)$，$\mathrm{B}_n(b_n)$，$\mathrm{C}_n(c_n)$ を次のように定める $(n = 1, 2, 3, \cdots)$．

まず，数直線上に 3 点 $\mathrm{A}_1(a_1)$，$\mathrm{B}_1(b_1)$，$\mathrm{C}_1(c_1)$ をとり，その後，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，

- 線分 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ を $1:3$ に内分する点を A_{n+1}
- 線分 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$ を $3:1$ に内分する点を B_{n+1}
- 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ を $9:5$ に外分する点を C_{n+1}

とする．ただし，数直線上の点 P と Q が同じ点の場合は，線分 PQ を内分する点も外分する点もいずれも P とする．次に答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} のそれぞれを a_n，b_n，c_n を用いて表せ．

(2) $a_n - b_n$ を a_1 と b_1 を用いて表せ．

(3) a_{n+2} を a_n，b_{n+1}，b_n を用いて表せ．

(4) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ．

(5) a_{n+2}，a_{n+1}，a_n の間には，ある実数 p，q に対して，

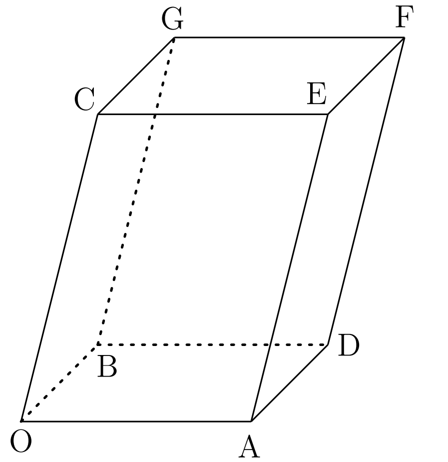
$$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$$

という関係が成り立つ．この関係を満たす組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

(6) $n \geqq 3$ において，a_n を a_1 と a_2 を用いて表せ．

(7) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を a_1，b_1，c_1 を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 6枚の平行四辺形を面とする立体のことを平行六面体という．平行六面体OADB-CEFGにおいて，OA $=3$，OB $=2$，OC $=4$ である．また，$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOC}=\beta$，$\angle\mathrm{BOC}=\gamma$ とするとき，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{4}$ である．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．次に答えよ．



(1) 3つの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ をそれぞれ求めよ．

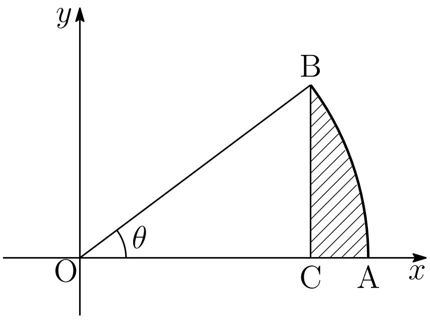
(2) 平行四辺形OADBの面積 S を求めよ．

(3) $\vec{r}=s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}$ が平行四辺形OADBと垂直であるときの s と t の値を求めよ．

(4) 辺EFの中点をMとし，直線OMと四角形ADGCの交点をNとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(5) 辺EF上の点をPとし，直線OPと四角形ADGCの交点をQとする．また，三角形ACGの重心をHとする．QHが最小となるときの点Pについて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．また，QHの最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 原点を O とする座標平面上に中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$，半径 r $(r > 0)$ の扇形 OAB がある．点 A の座標は $(r,\ 0)$ であり，弧 AB の長さは 1 である．点 B を通る y 軸と平行な直線と x 軸との交点を点 C とする．弧 AB と線分 BC と線分 CA で囲まれた図形を D とする．次に答えよ．



(1) r を θ を用いて表せ．

(2) 図形 D の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) $0 < \theta < \pi$ において $\sin\theta - \theta\cos\theta > 0$ であることを示せ．

(4) θ が変化するとき，(2) で求めた S の最大値を求めよ．

(5) 図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を θ を用いて表せ．

(6) (5) で求めた V について $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{V}{\theta}$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A 君がサムを出して勝つ確率は，A 君以外の残り 3 人がサム以外の手を出す確率であるから

$$(1-p)^3 = \left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{27}{64}}$$

(2) A 君がサムを出してあいこになる確率は，A 君以外の残り 3 人がサムを出す確率であるから

$$p^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

A 君がサムを出して負ける確率は，これと (1) の余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{27}{64}+\frac{1}{64}\right) = \boldsymbol{\frac{9}{16}}$$

(3) A 君がグーを出して勝つとき，サムを出す人数 k は　$k=0,\ 2,\ 3$

(i) $k=0$ のとき，残り 3 人がグーまたはチョキを出してあいこにならない (3 人ともグーを出さない) 確率であるから

$$\left\{\frac{2}{3}(1-p)\right\}^3 - \left\{\frac{1}{3}(1-p)\right\}^3 = \frac{7}{27}(1-p)^3 = \frac{7}{27}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{7}{64}$$

(ii) $k=2$，すなわち，A 君以外の残り 2 人がサムで，1 人がサム以外の手を出す確率であるから

$${}_3\mathrm{C}_1 p^2(1-p) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

(iii) $k=3$，すなわち，A 君以外の残り 3 人がサムを出す確率であるから

$$p^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

(i)〜(iii) より，求める確率は　$\dfrac{7}{64}+\dfrac{9}{64}+\dfrac{1}{64} = \boldsymbol{\dfrac{17}{64}}$

(4) 求める条件付き確率は，(3) の結果および (ii),(iii) の結果から

$$\frac{\dfrac{9}{64}+\dfrac{1}{64}}{\dfrac{17}{64}} = \boldsymbol{\frac{10}{17}}$$

(5) A 君が勝つのは，残り $n-1$ 人がサム以外の手を出すときで，その確率は

$$(1-p)^{n-1}$$

あいこになるのは，残り $n-1$ 人がサムを出すときで，その確率は

$$p^{n-1}$$

A 君が負ける確率は，これらの余事象の確率であるから

$$\boldsymbol{1-(1-p)^{n-1}-p^{n-1}}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $\boldsymbol{a_{n+1}=\dfrac{3b_n+c_n}{4},\quad b_{n+1}=\dfrac{c_n+3a_n}{4},\quad c_{n+1}=\dfrac{-5a_n+9b_n}{4}}$

(2) (1) の結果から　$a_{n+1}-b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}(a_n-b_n)$　$\cdots$ ①

よって　$\boldsymbol{a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1}+\frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{-5a_n+9b_n}{4} \\ &= \boldsymbol{-\frac{5}{16}a_n+\frac{3}{4}b_{n+1}+\frac{9}{16}b_n} \end{aligned}$$

(4) ① から　$b_{n+1}=a_{n+1}+\dfrac{3}{4}(a_n-b_n)$

これを (3) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -\frac{5}{16}a_n+\frac{3}{4}\left\{a_{n+1}+\frac{3}{4}(a_n-b_n)\right\}+\frac{9}{16}b_n \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}a_{n+1}+\frac{1}{4}a_n} \end{aligned}$$

(5) $(*)$　$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ より[1]

$$a_{n+2}-(p+q)a_{n+1}+pqa_n=0$$

(4) の結果から　$a_{n+2}-\dfrac{3}{4}p_{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n=0$　ゆえに　$p+q=\dfrac{3}{4},\ pq=-\dfrac{1}{4}$

$p,\ q$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}=0$ の解であるから

$$\boldsymbol{(p,\ q)=\left(1,-\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4},\ 1\right)}$$

---

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2014.pdf (p.11 を参照)

(6) (∗) より　$a_{n+1}-pa_n=q^{n-1}(a_2-pa_1)$,　$a_{n+1}-qa_n=p^{n-1}(a_2-qa_1)$

上の 2 式から a_{n+1} を消去すると

$$(p-q)a_n=p^{n-1}(a_2-qa_1)-q^{n-1}(a_2-pa_1)$$

これに $p=1$，$q=-\dfrac{1}{4}$ を代入すると

$$\frac{5}{4}a_n=a_2+\frac{1}{4}a_1-(a_2-a_1)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{4}{5}a_2+\dfrac{1}{5}a_1-\dfrac{4}{5}(a_2-a_1)\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}}$

(7) (6) の結果から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{5}a_2+\frac{1}{5}a_1$

これに $a_2=\dfrac{3b_1+c_1}{4}$ を代入すると

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{5}\cdot\frac{3b_1+c_1}{4}+\frac{1}{5}a_1=\boldsymbol{\frac{a_1+3b_1+c_1}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOC}=\beta$，$\angle\mathrm{BOC}=\gamma$，
$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=4$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{4}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{4}$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha=3\cdot2\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{2}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\beta=3\cdot4\cdot\frac{1}{4}=\mathbf{3}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\gamma=2\cdot4\cdot\frac{1}{4}=\mathbf{2}$$

(2) $S=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\sqrt{3^2\cdot2^2-2^2}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$

(3) $\vec{r}=s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}$ が平行四辺形 OADB と垂直である条件は　$\vec{r}\perp\vec{a}$，$\vec{r}\perp\vec{b}$

$$\vec{r}\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$
$$\vec{r}\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

したがって　$9s+2t+3=0$,　$2s+4t+2=0$

これを解いて　$\boldsymbol{s=-\dfrac{1}{4},\ t=-\dfrac{3}{8}}$

(4) M は辺 EF の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

4 点 A，D，G，C は平面 ACD 上の点であり

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \quad \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

に注意すると，N は平面 ACD 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= 2\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{1+2+1} = 2\overrightarrow{\mathrm{ON}}\end{aligned}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}(2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})}$

(5) P は辺 EF 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + k\vec{b} + \vec{c} \quad (0 \leqq k \leqq 1)$$

とおくと，(4) と同様に Q は平面 ACD 上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-k)\vec{a} + \vec{c} + k(\vec{a} + \vec{b}) = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + k\overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= 2\cdot\frac{(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + k\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{(1-k)+1+k} = 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\end{aligned}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}\right)$

H は 3 点 A$(\vec{a})$，C$(\vec{c})$，G$(\vec{b} + \vec{c})$ を頂点とする三角形の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{1}{3}\{\vec{a} + \vec{c} + (\vec{b} + \vec{c})\} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{QH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{k}{2}\right)\vec{b} + \dfrac{1}{6}(\vec{c} - \vec{a}) \quad \cdots (*)$

ここで　$\vec{b}\cdot(\vec{c} - \vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 2 - 2 = 0$

$$|\vec{c} - \vec{a}| = |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + |\vec{a}|^2 = 16 - 2\cdot3 + 9 = 19$$

$(*)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|^2 = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{k}{2}\right)^2|\vec{b}|^2 + \dfrac{1}{36}|\vec{c} - \vec{a}|^2 = \left(k - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{19}{36}$

$k = \dfrac{2}{3}$，すなわち，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}}$ のとき，QH は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{19}}{6}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 弧 AB の長さが 1 であるから，$r\theta = 1$ より　$\boldsymbol{r = \dfrac{1}{\theta}}$

(2) (i) $0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \text{扇形 OAB} - \triangle\text{OBC} \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \text{扇形 OAB} + \triangle\text{OBC} \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta + \frac{1}{2}r^2 \sin(\pi-\theta)\cos(\pi-\theta) \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

(i),(ii) および (1) の結果から

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \sin\theta\cos\theta \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2\theta^2}\sin\theta\cos\theta} \end{aligned}$$

補足 S は θ の可微分関数 (θ の変化に対して S はなめらかに変化) である．例えば $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を通過するときに，微分係数が不連続になるなどの挙動の変化はありえない．つまり θ が鋭角から鈍角に変わっても，S の式は変化しない．

(3) $f(\theta) = \sin\theta - \theta\cos\theta$ とおくと　$f'(\theta) = \theta\sin\theta$

したがって，$0 < \theta < \pi$ において　$f'(\theta) > 0$

$f(0) = 0$ であるから，$0 < \theta < \pi$ において

$$f(\theta) = \sin\theta - \theta\cos\theta > 0$$

(4) (2) で求めた S を θ で微分すると

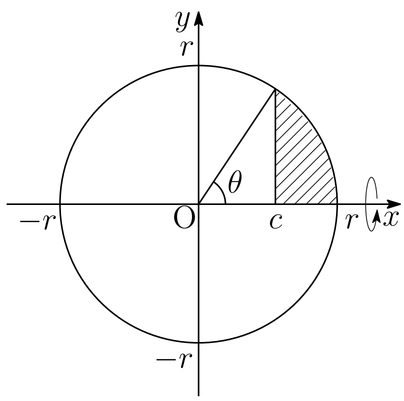
$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= -\frac{1}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2\theta^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\ &= -\frac{1}{2\theta^2}(1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta) + \frac{1}{\theta^3}\sin\theta\cos\theta\\ &= -\frac{1}{\theta^2}\cos^2\theta + \frac{1}{\theta^3}\sin\theta\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\theta^3}(\sin\theta - \theta\cos\theta)\end{aligned}$$

これから，S の増減表は，(3) の結果に注意して

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，S は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となり，(2) の結果により，最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{\pi}}$

(5) 右の図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は



$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_c^r (r^2 - x^2)\,dx\\ &= \left[\, r^2x - \frac{x^3}{3}\,\right]_c^r\\ &= \frac{2}{3}r^3 - r^2c + \frac{1}{3}c^3\end{aligned}$$

これに $r = \dfrac{1}{\theta}$，$c = r\cos\theta = \dfrac{\cos\theta}{\theta}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\theta}\right)^3 - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2\frac{\cos\theta}{\theta} + \frac{1}{3}\left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right)^3\\ &= \frac{1}{3\theta^3}(2 - 3\cos\theta + \cos^3\theta) = \frac{1}{3\theta^3}(1 - \cos\theta)^2(2 + \cos\theta)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \dfrac{\pi}{3\theta^3}(1 - \cos\theta)^2(2 + \cos\theta)}$

(6) (5) の結果から　$\dfrac{V}{\theta} = \dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{(1 - \cos^2\theta)^2}{\theta^4}\cdot\dfrac{2 + \cos\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{V}{\theta} = \lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\frac{2 + \cos\theta}{(1 + \cos\theta)^2}\right\} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$