

令和3年度 九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)

工学部・情報工学部 令和3年2月25日

- 数I・II・III・A・B (120分)

1 関数 $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$, $g(x) = |x - \sqrt{4-x^2}|$ について, 次に答えよ.

- (1) 方程式 $x = \sqrt{4-x^2}$ を解け.
- (2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ.
- (3) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ.
- (4) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形を D とおく. 図形 D の面積 S を求めよ.
- (5) (4) の図形 D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ.

2 正の定数 a, b は $a < b$ をみたしている. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\log(a^x + b^x) - \log(2)}{x}$$

とする. 次に答えよ. ただし, 対数は自然対数を表し, e は自然対数の底とする.

- (1) $e^{f(1)}$ を求めよ. また, $e^{f(-1)}$ を求めよ.
- (2) 関数 $g(x) = \log(a^x + b^x)$ について, $g(0)$ および $g'(0)$ を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を求めよ.
- (4) 関数 $h(x) = x \log(x)$ について, $h''(x)$ を求めよ. また, $x \neq 0$ のとき, 不等式 $f'(x) > 0$ を示せ. ただし, 以下の命題は証明せずに用いてよい.

命題 P: 正の実数 c, d は $c \neq d$ をみたしている. $x > 0$ のとき $k''(x) > 0$ をみたす関数 $k(x)$ について, 不等式

$$k\left(\frac{c+d}{2}\right) < \frac{k(c) + k(d)}{2}$$

が成立する.

- (5) $x_1 < 0 < x_2$ のとき, $f(x_1) < f(x_2)$ を示せ. また, 不等式

$$\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$$

を証明せよ.

3 菱形 ABCD を底面とする四角錐 O-ABCD を考える. 菱形 ABCD の一辺の長さを 3 とし, $OA = OC = 5$, $OB = OD$ とする. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1$ のとき, 次に答えよ.

- (1) 菱形 ABCD の対角線の長さ AC, BD を求めよ.
- (2) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ.
- (3) 三角形 OAB の面積 S を求めよ.
- (4) 四角錐 O-ABCD の体積 V を求めよ.
- (5) 球 K が四角錐 O-ABCD の 5 つの面に接している. 球 K の半径 r を求めよ.

4 自然数 x, y に対して, 自然数 $x + y + xy$ を $x \circ y$ と表す. 次に答えよ.

- (1) $x \circ y = y \circ x$ および $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ を示せ.

以下では, $(x \circ y) \circ z$ を $x \circ y \circ z$ と表す.

- (2) $y > z$ のとき, $x \circ y > x \circ z$ を示せ.
- (3) 1 から 3 までの数字が 1 つずつ記入された 3 枚のカードから 1 枚を抜き出し, 数字を調べてからもとに戻すことを 3 回繰り返す. 1 回目, 2 回目, 3 回目に調べた数字をそれぞれ a, b, c とする.
 - (a) $a \circ b \circ c \geq 1 \circ 3 \circ 3$ かつ $a \leq b \leq c$ をみたす (a, b, c) の組をすべて求めよ.
 - (b) $a \circ b \circ c \geq 1 \circ 3 \circ 3$ となる事象を A とするとき, 確率 $P(A)$ を求めよ.
- (4) 1 から 6 までの数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードから 1 枚抜き出し, 数字を調べてからもとに戻すことを 3 回繰り返す. 1 回目, 2 回目, 3 回目に調べた数字をそれぞれ a, b, c とする. $a \circ b \circ c \leq 1 \circ 3 \circ 4$ となる事象を E , $a \circ b \circ c \leq 1 \circ 2 \circ 2$ となる事象を F とする. 事象 E が起こったときの, 事象 F の起こる条件付き確率 $P_E(F)$ を求めよ.

解答例

1 (1) $x = \sqrt{4-x^2}$ の両辺を平方すると

$$x^2 = 4 - x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

このとき、原方程式を満たす解は $x = \sqrt{2}$

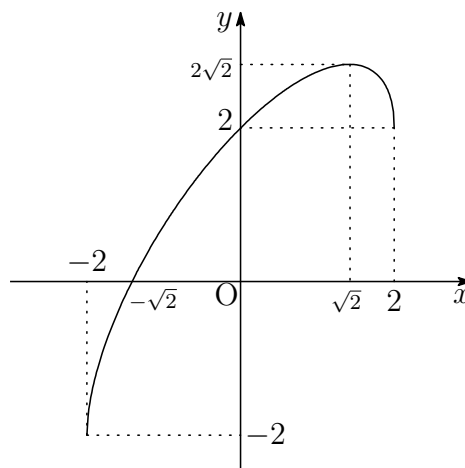
(2) $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ の定義域は

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	-2	...	$\sqrt{2}$...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2

よって 極大値 $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$



(3) $h(x) = x - \sqrt{4-x^2}$ とおくと $(-2 \leq x \leq 2)$

$$h'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	-2	...	$-\sqrt{2}$...	2
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	-2	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	2

$h(x) = 0$ とすると、(1) の結果から

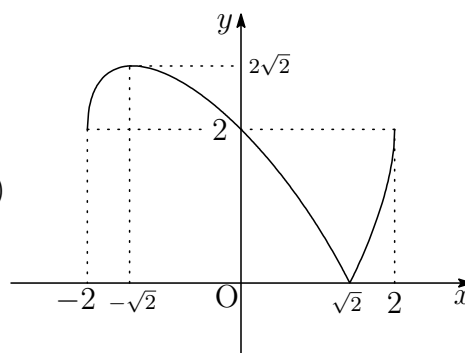
$$x = \sqrt{2}$$

したがって

$$(*) \quad g(x) = \begin{cases} -h(x) & (-2 \leq x \leq \sqrt{2}) \\ h(x) & (\sqrt{2} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

よって 極大値 $g(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

極小値 $g(\sqrt{2}) = 0$



補足 x を $-\sqrt{2}$ の近傍 ($-\sqrt{2}$ の局所的な前後の値) とすると、 $g(x) \leq g(-\sqrt{2})$ であるから、 $g(-\sqrt{2})$ は極大値. x を $\sqrt{2}$ の近傍とすると、 $g(x) \geq g(\sqrt{2})$ であるから、 $g(\sqrt{2})$ は極小値. なお、 $g(-2)$ 、 $g(2)$ はその近傍 (局所的な前後の値) が取れないから、極値ではない.

(4) (2), (3)の結果から, S は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S = \int_0^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

(i) $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x) + h(x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

(ii) $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x) - h(x) \\ &= 2\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

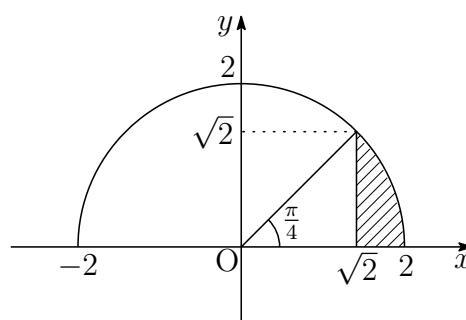
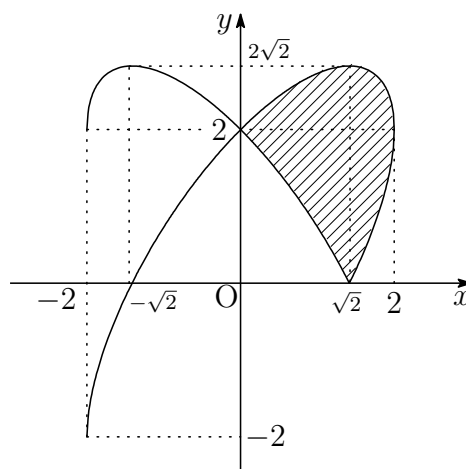
したがって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} 2x dx + \int_{\sqrt{2}}^2 2\sqrt{4 - x^2} dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} + 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \end{aligned}$$

ここで, 右の図の斜線部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S &= 2 + 2S_1 = 2 + 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$



(5) $g(x)$ は (*) で示した $h(x)$ を用いて, 次のようになる.

(i) $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ のとき

$$f(x) + g(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) - g(x) = f(x) + h(x)$$

(ii) $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ のとき

$$f(x) + g(x) = f(x) + h(x)$$

$$f(x) - g(x) = f(x) - h(x)$$

(i), (ii) より, $0 \leq x \leq 2$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2 - g(x)^2 &= \{f(x) + g(x)\}\{f(x) - g(x)\} \\ &= \{f(x) + h(x)\}\{f(x) - h(x)\} \end{aligned}$$

$f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$, $h(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$ であるから

$$f(x) + h(x) = 2x, \quad f(x) - h(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$$

ゆえに $\{f(x) + h(x)\}\{f(x) - h(x)\} = 2x \cdot 2\sqrt{4 - x^2} = 4x\sqrt{4 - x^2}$

したがって, 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^2 \{f(x)^2 - g(x)^2\} dx \\ &= \int_0^2 4x\sqrt{4 - x^2} dx = -\frac{4}{3} \left[(4 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{32}{3}\pi$

2 (1) $f(x) = \frac{\log(a^x + b^x) - \log(2)}{x}$ より

$$f(1) = \log \frac{a+b}{2}, \quad f(-1) = \log \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} = \log \frac{2ab}{a+b}$$

よって $e^{f(1)} = \frac{a+b}{2}$, $e^{f(-1)} = \frac{2ab}{a+b}$

(2) $g(x) = \log(a^x + b^x)$ より $g(0) = \log 2$

$$(*) \quad g'(x) = \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x}$$

よって $g'(0) = \frac{\log a + \log b}{2}$

(3) (**) $f(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$ であるから, (2) の結果から

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(0) = \frac{\log a + \log b}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \log(a^x + b^x) - \frac{\log 2}{x} \text{ より } (0 < a < b)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \log b^x \left\{ 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x \right\} - \frac{\log 2}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\log b + \frac{1}{x} \log \left\{ 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^x \right\} - \frac{\log 2}{x} \right] \\ &= \log b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \log a^x \left\{ 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} \right\} - \frac{\log 2}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\log a + \frac{1}{x} \log \left\{ 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{-x} \right\} - \frac{\log 2}{x} \right] \\ &= \log a \end{aligned}$$

(4) $h(x) = x \log x$ より $h'(x) = \log x + 1$ よって $h''(x) = \frac{1}{x}$
 $x > 0$ のとき, $h''(x) > 0$ が成り立ち, $c > 0, d > 0, c \neq d$ のとき

$$\begin{aligned} h\left(\frac{c+d}{2}\right) &< \frac{h(c) + h(d)}{2} \\ \frac{c+d}{2} \log \frac{c+d}{2} &< \frac{1}{2}(c \log c + d \log d) \\ \frac{c \log c + d \log d}{c+d} &> \log \frac{c+d}{2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{g(x) - \log 2}{x} \text{ より } f'(x) = \frac{xg'(x) - \{g(x) - \log 2\}}{x^2}$$

$$xg'(x) = x \cdot \frac{a^x \log a + b^x \log b}{a^x + b^x} = \frac{a^x \log a^x + b^x \log b^x}{a^x + b^x}$$

$$g(x) - \log 2 = \log(a^x + b^x) - \log 2 = \log \frac{a^x + b^x}{2}$$

$c = a^x, d = b^x$ を ① に代入すると

$$\frac{a^x \log a^x + b^x \log b^x}{a^x + b^x} > \log \frac{a^x + b^x}{2}$$

これから $xg'(x) - \{g(x) - \log 2\} > 0$ よって $f'(x) > 0$

補足 $f(x) = \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x}$ より, $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \frac{\log(a^x + b^x) - \log 2}{x} + \frac{\log(a^{-x} + b^{-x}) - \log 2}{-x} \\ &= \frac{\log(a^x + b^x) - \log(a^{-x} + b^{-x})}{x} \\ &= \frac{\log(a^x + b^x) - \log\{a^{-x}b^{-x}(a^x + b^x)\}}{x} = \log ab \end{aligned}$$

$f(x) + f(-x) = \log ab$ の両辺を x で微分すると ($x \neq 0$)

$$f'(x) - f'(-x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f'(x) = f'(-x)$$

$f'(x)$ は偶関数である.

解説 $k''(x) > 0$ を満たす関数 $k(x)$ について, $b > 0$ とすると

$$\begin{aligned} k(a+b) - k(a) &= \int_a^{a+b} k'(x) dx = - \int_a^{a+b} (a+b-x)' k'(x) dx \\ &= - \left[(a+b-x)k'(x) \right]_a^{a+b} + \int_a^{a+b} (a+b-x)k''(x) dx \\ &= bk'(a) + \int_a^{a+b} (a+b-x)k''(x) dx > bk'(a) \\ k(a-b) - k(a) &= -bk'(a) + \int_a^{a-b} (a-b-x)k''(x) dx \\ &= -bk'(a) + \int_{a-b}^a (x-a+b)k''(x) dx > -bk'(a) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad k(a+b) + k(a-b) > 2k(a) \quad \text{よって} \quad k\left(\frac{c+d}{2}\right) < \frac{k(c) + k(d)}{2}$$

別解 (*) を微分すると

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{a^x(\log a)^2 + b^x(\log b)^2}{a^x + b^x} - \frac{(a^x \log a + b^x \log b)^2}{(a^x + b^x)^2} \\ &= \frac{(a^x + b^x)\{a^x(\log a)^2 + b^x(\log b)^2\} - (a^x \log a + b^x \log b)^2}{(a^x + b^x)^2} \\ &= \frac{a^x b^x (\log b - \log a)^2}{(a^x + b^x)^2} > 0 \end{aligned}$$

(**) を微分すると

$$f'(x) = \frac{xg'(x) - g(x) + g(0)}{x^2}$$

ここで、 $\varphi(x) = xg'(x) - g(x) + g(0)$ とおくと $\varphi(0) = 0$

$$\varphi'(x) = xg''(x)$$

$g''(x) > 0$ であるから、 $\varphi(x)$ の増減表は

x	...	0	...
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	↘	0	↗

$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ および $x \neq 0$ のとき $\varphi(x) > 0$ であるから

$$f'(x) > 0$$

(5) (3),(4) の結果から、 $x_1 < 0 < x_2$ について

$$f(x_1) < \lim_{x \rightarrow 0} f(x) < f(x_2) \quad \text{よって} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

このとき、 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ とおくと

$$f(-1) < f(1) \quad \text{ゆえに} \quad e^{f(-1)} < e^{f(1)}$$

(1) の結果から $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$

補足 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \log \sqrt{ab}$ より、 $f(0) = \log \sqrt{ab}$ によって、 $f(0)$ を定義すれば、
(4) より、 $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ において、単調増加な連続関数になり、

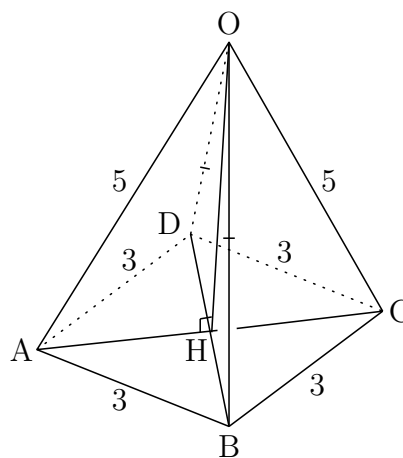
$$x_1 < 0 < x_2 \quad \text{のとき} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

3 (1) $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 3$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 1$ より

$$\begin{aligned} |\vec{AC}|^2 &= |\vec{AB} + \vec{AD}|^2 \\ &= |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + |\vec{AD}|^2 \\ &= 3^2 + 2 \cdot 1 + 3^2 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{BD}|^2 &= |\vec{AD} - \vec{AB}|^2 \\ &= |\vec{AD}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + |\vec{AB}|^2 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 1 + 3^2 = 16 \end{aligned}$$

よって $AC = 2\sqrt{5}$, $BD = 4$



(2) 対角線 AC, BD の交点を H とすると

$$AH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{5}, \quad BH = \frac{1}{2}BD = 2$$

$$OA^2 = AH^2 + OH^2, \quad OB^2 = BH^2 + OH^2 \text{ より}$$

$$5^2 = (\sqrt{5})^2 + OH^2, \quad OB^2 = 2^2 + OH^2$$

$$\text{これを解いて } OH = 2\sqrt{5}, \quad OB = 2\sqrt{6}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ より}$$

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2$$

$$3^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 5^2$$

$$\text{よって } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 20$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 \cdot 24 - 20^2} = 5\sqrt{2}$$

別解 $\triangle OAB$ に余弦定理を適用すると

$$\cos \angle OAB = \frac{OA^2 + AB^2 - OB^2}{2OA \cdot AB} = \frac{25 + 9 - 24}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$\sin \angle OAB = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB \sin \angle OAB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$$

(4) 四角錐 O-ABCD の底面積を T とすると

$$T = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4 = 4\sqrt{5}$$

$$\text{よって } V = \frac{1}{3}T \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \frac{40}{3}$$

$$(5) V = \frac{1}{3}(4S + T)r \text{ より } \frac{40}{3} = \frac{1}{3}(4 \cdot 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5})r$$

$$\text{これを解いて } r = \frac{2}{9}(5\sqrt{2} - \sqrt{5})$$

4 (1) $x \circ y = x + y + xy$ より $y \circ x = y + x + yx$ よって $x \circ y = y \circ x$

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x + y + xy) \circ z \\ &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + yz + zx + xyz, \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + z + yz) \\ &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + xy + yz + zx + xyz \end{aligned}$$

よって $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

(2) $x \circ y = x + y + xy$, $x \circ z = x + z + xz$ より

$$\begin{aligned} x \circ y - x \circ z &= (x + y + xy) - (x + z + xz) \\ &= (1 + x)(y - z) \end{aligned}$$

x, y, z は自然数であるから, $y > z$ のとき

$$x \circ y - x \circ z > 0 \quad \text{すなわち} \quad x \circ y > x \circ z$$

(3) (a) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a \circ b \circ c &= a + b + c + ab + bc + ca + abc \\ &= (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1 \\ 1 \circ 3 \circ 3 &= (1 + 1)(3 + 1)(3 + 1) - 1 \\ &= 32 - 1 \end{aligned}$$

したがって $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 32 \quad \dots (*)$

$a \circ b \circ c \geq 1 \circ 3 \circ 3$ かつ $a \leq b \leq c$ より $(c + 1)^3 \geq 32$

上式を満たす自然数 c は $c = 3$

$c = 3$ を (*) に代入することにより $(a + 1)(b + 1) \geq 8$

これを満たす (a, b) の組は $(a, b) = (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)$

よって $(a, b, c) = (2, 2, 3), (1, 3, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3)$

(b) 求める確率は, (a) の結果に順序を付けることにより

$$\frac{3 + 3 + 3 + 1}{3^3} = \frac{10}{27}$$

(4) $a \circ b \circ c \leq 1 \circ 3 \circ 4$ より

$$(a+1)(b+1)(c+1) - 1 \leq (1+1)(3+1)(4+1) - 1$$

ゆえに $(a+1)(b+1)(c+1) \leq 2 \cdot 4 \cdot 5$

$a \leq b \leq c$ で上式を満たす (a, b, c) の組は

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), \\ (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 3), (1, 3, 4), \\ (2, 2, 2), (2, 2, 3)$$

したがって $P(E) = \frac{1 \times 2 + 3 \times 8 + 6 \times 4}{6^3} = \frac{50}{216}$

$a \circ b \circ c \leq 1 \circ 2 \circ 2$ より

$$(a+1)(b+1)(c+1) - 1 \leq (1+1)(2+1)(2+1) - 1$$

ゆえに $(a+1)(b+1)(c+1) \leq 2 \cdot 3 \cdot 3$

$a \leq b \leq c$ で上式を満たす (a, b, c) の組は

$$(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2)$$

したがって $P(F) = \frac{1 + 3 + 3 + 3}{6^3} = \frac{10}{216}$

$F \subset E$ であるから、求める条件付き確率は

$$P_E(F) = \frac{\frac{10}{216}}{\frac{50}{216}} = \frac{1}{5}$$