令和３年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和３年２月25日
数 I・II・III・A・B (120分)

問題 1 2 3 4

1 関数 $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$，$g(x) = \left|x - \sqrt{4 - x^2}\right|$ について，次に答えよ．

(1) 方程式 $x = \sqrt{4 - x^2}$ を解け．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれた図形を D とおく．図形 D の面積 S を求めよ．

(5) (4) の図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

2 正の定数 a，b は $a < b$ をみたしている．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{\log(a^x + b^x) - \log(2)}{x}$$

とする．次に答えよ．ただし，対数は自然対数を表し，e は自然対数の底とする．

(1) $e^{f(1)}$ を求めよ．また，$e^{f(-1)}$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \log(a^x + b^x)$ について，$g(0)$ および $g'(0)$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ を求めよ．

(4) 関数 $h(x) = x\log(x)$ について，$h''(x)$ を求めよ．また，$x \neq 0$ のとき，不等式 $f'(x) > 0$ を示せ．ただし，以下の命題は証明せずに用いてよい．

命題 P：正の実数 c，d は $c \neq d$ をみたしている．$x > 0$ のとき $k''(x) > 0$ をみたす関数 $k(x)$ について，不等式

$$k\left(\frac{c+d}{2}\right) < \frac{k(c) + k(d)}{2}$$

が成立する．

(5) $x_1 < 0 < x_2$ のとき，$f(x_1) < f(x_2)$ を示せ．また，不等式

$$\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$$

を証明せよ．

3 菱形（ひし）ABCD を底面とする四角錐（すい）O-ABCD を考える．菱形 ABCD の一辺の長さを 3 とし，OA $=$ OC $= 5$，OB $=$ OD とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 1$ のとき，次に答えよ．

(1) 菱形 ABCD の対角線の長さ AC，BD を求めよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(3) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(4) 四角錐 O-ABCD の体積 V を求めよ．

(5) 球 K が四角錐 O-ABCD の 5 つの面に接している．球 K の半径 r を求めよ．

4 自然数 x，y に対して，自然数 $x+y+xy$ を $x \circ y$ と表す．次に答えよ．

(1) $x \circ y = y \circ x$ および $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ を示せ．

以下では，$(x \circ y) \circ z$ を $x \circ y \circ z$ と表す．

(2) $y > z$ のとき，$x \circ y > x \circ z$ を示せ．

(3) 1 から 3 までの数字が 1 つずつ記入された 3 枚のカードから 1 枚を抜き出し，数字を調べてからもとに戻すことを 3 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目に調べた数字をそれぞれ a，b，c とする．

(a) $a \circ b \circ c \geqq 1 \circ 3 \circ 3$ かつ $a \leqq b \leqq c$ をみたす $(a,\ b,\ c)$ の組をすべて求めよ．

(b) $a \circ b \circ c \geqq 1 \circ 3 \circ 3$ となる事象を A とするとき，確率 $P(A)$ を求めよ．

(4) 1 から 6 までの数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードから 1 枚抜き出し，数字を調べてからもとに戻すことを 3 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目に調べた数字をそれぞれ a，b，c とする．$a \circ b \circ c \leqq 1 \circ 3 \circ 4$ となる事象を E，$a \circ b \circ c \leqq 1 \circ 2 \circ 2$ となる事象を F とする．事象 E が起こったときの，事象 F の起こる条件付き確率 $P_E(F)$ を求めよ．

解答例

1 (1) $x=\sqrt{4-x^2}$ の両辺を平方すると

$$x^2=4-x^2 \quad ゆえに \quad x^2=2 \quad これを解いて \quad x=\pm\sqrt{2}$$

このとき，原方程式を満たす解は $\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$

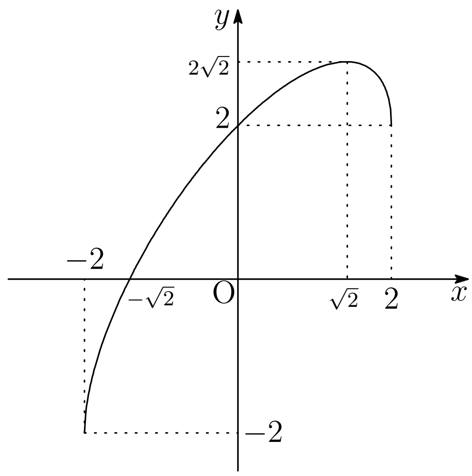
(2) $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ の定義域は

$4-x^2 \geqq 0$ すなわち $-2 \leqq x \leqq 2$

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

よって 極大値 $f(\sqrt{2})=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$



(3) $h(x)=x-\sqrt{4-x^2}$ とおくと $(-2 \leqq x \leqq 2)$

$$h'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}+x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-2	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	2

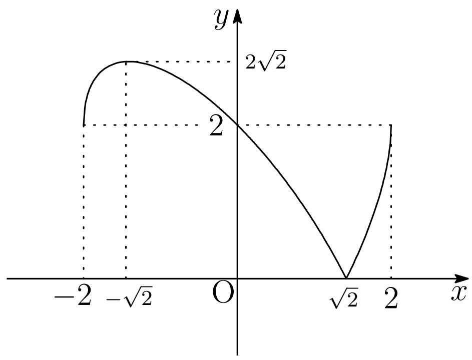
$h(x)=0$ とすると，(1) の結果から

$$x=\sqrt{2}$$

したがって

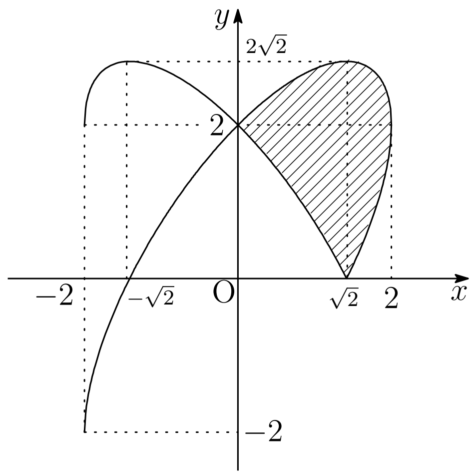
$$(*) \quad g(x)=\begin{cases} -h(x) & (-2 \leqq x \leqq \sqrt{2}) \\ h(x) & (\sqrt{2} \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

よって 極大値 $g(-\sqrt{2})=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$
極小値 $g(\sqrt{2})=\boldsymbol{0}$



補足 x を $-\sqrt{2}$ の近傍 ($-\sqrt{2}$ の局所的な前後の値) とすると，$g(x) \leqq g(-\sqrt{2})$ であるから，$g(-\sqrt{2})$ は極大値．x を $\sqrt{2}$ の近傍とすると，$g(x) \geqq g(\sqrt{2})$ であるから，$g(\sqrt{2})$ は極小値．なお，$g(-2)$，$g(2)$ はその近傍 (局所的な前後の値) が取れないから，極値ではない．

(4) (2)，(3) の結果から，S は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S = \int_0^2 \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

(i) $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x) + h(x) \\ &= 2x \end{aligned}$$

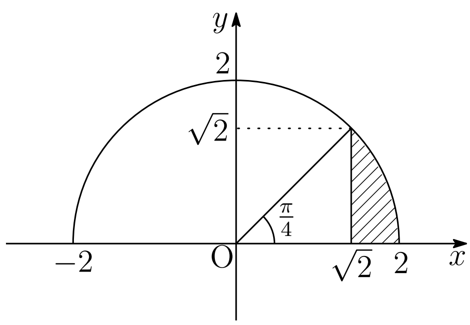
(ii) $\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x) - h(x) \\ &= 2\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} 2x\,dx + \int_{\sqrt{2}}^2 2\sqrt{4 - x^2}\,dx \\ &= \Big[\ x^2\ \Big]_0^{\sqrt{2}} + 2\int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx \end{aligned}$$

ここで，右の図の斜線部分の面積を S_1 とすると



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

よって　$S = 2 + 2S_1 = 2 + 2\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$

$= \boldsymbol{\pi}$

(5) $g(x)$ は $(*)$ で示した $h(x)$ を用いて，次のようになる．

(i) $0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= f(x)-h(x) \\ f(x)-g(x) &= f(x)+h(x) \end{aligned}$$

(ii) $\sqrt{2} \leqq x \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= f(x)+h(x) \\ f(x)-g(x) &= f(x)-h(x) \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$0 \leqq x \leqq 2$ において

$$\begin{aligned} f(x)^2-g(x)^2 &= \{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\} \\ &= \{f(x)+h(x)\}\{f(x)-h(x)\} \end{aligned}$$

$f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$，$h(x)=x-\sqrt{4-x^2}$ であるから

$$f(x)+h(x)=2x, \quad f(x)-h(x)=2\sqrt{4-x^2}$$

ゆえに　$\{f(x)+h(x)\}\{f(x)-h(x)\}=2x\cdot 2\sqrt{4-x^2}=4x\sqrt{4-x^2}$

したがって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^2 \{f(x)^2-g(x)^2\}\,dx \\ &= \int_0^2 4x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{4}{3}\Big[\,(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\frac{32}{3}\pi}$　■

2 (1) $f(x)=\dfrac{\log(a^x+b^x)-\log(2)}{x}$ より

$$f(1)=\log\frac{a+b}{2}, \quad f(-1)=\log\frac{2}{a^{-1}+b^{-1}}=\log\frac{2ab}{a+b}$$

よって　$\boldsymbol{e^{f(1)}=\frac{a+b}{2},\quad e^{f(-1)}=\frac{2ab}{a+b}}$

(2) $g(x)=\log(a^x+b^x)$ より　$\boldsymbol{g(0)=\log 2}$

$$(*)\quad g'(x)=\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}$$

よって　$\boldsymbol{g'(0)=\frac{\log a+\log b}{2}}$

(3) (**)　$f(x)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ であるから，(2) の結果から

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\boldsymbol{\frac{\log a+\log b}{2}}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x}\log(a^x+b^x)-\dfrac{\log 2}{x}$ より $(0<a<b)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x)&=\lim_{x\to\infty}\left[\ \frac{1}{x}\log b^x\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right\}-\frac{\log 2}{x}\ \right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\ \log b+\frac{1}{x}\log\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x\right\}-\frac{\log 2}{x}\ \right]\\&=\boldsymbol{\log b},\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)&=\lim_{x\to-\infty}\left[\ \frac{1}{x}\log a^x\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\right\}-\frac{\log 2}{x}\ \right]\\&=\lim_{x\to-\infty}\left[\ \log a+\frac{1}{x}\log\left\{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\right\}-\frac{\log 2}{x}\ \right]\\&=\boldsymbol{\log a}\end{aligned}$$

(4) $h(x)=x\log x$ より　$h'(x)=\log x+1$　よって　$\boldsymbol{h''(x)=\dfrac{1}{x}}$

$x>0$ のとき，$h''(x)>0$ が成り立ち，$c>0,\ d>0,\ c\neq d$ のとき

$$\begin{aligned}h\left(\frac{c+d}{2}\right)&<\frac{h(c)+h(d)}{2}\\\frac{c+d}{2}\log\frac{c+d}{2}&<\frac{1}{2}(c\log c+d\log d)\\\frac{c\log c+d\log d}{c+d}&>\log\frac{c+d}{2}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

$f(x)=\dfrac{g(x)-\log 2}{x}$ より　$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-\{g(x)-\log 2\}}{x^2}$

$$\begin{aligned}xg'(x)&=x\cdot\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}=\frac{a^x\log a^x+b^x\log b^x}{a^x+b^x}\\g(x)-\log 2&=\log(a^x+b^x)-\log 2=\log\frac{a^x+b^x}{2}\end{aligned}$$

$c=a^x$，$d=b^x$ を ① に代入すると

$$\frac{a^x\log a^x+b^x\log b^x}{a^x+b^x}>\log\frac{a^x+b^x}{2}$$

これから　$xg'(x)-\{g(x)-\log 2\}>0$　よって　$f'(x)>0$

補足 $f(x)=\dfrac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}$ より，$x\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x}+\frac{\log(a^{-x}+b^{-x})-\log 2}{-x}\\&=\frac{\log(a^x+b^x)-\log(a^{-x}+b^{-x})}{x}\\&=\frac{\log(a^x+b^x)-\log\{a^{-x}b^{-x}(a^x+b^x)\}}{x}=\log ab\end{aligned}$$

$f(x)+f(-x)=\log ab$ の両辺を x で微分すると $(x\neq 0)$

$$f'(x)-f'(-x)=0 \quad \text{すなわち} \quad f'(x)=f'(-x)$$

$f'(x)$ は偶関数である．

解説 $k''(x)>0$ を満たす関数 $k(x)$ について，$b>0$ とすると

$$\begin{aligned}k(a+b)-k(a)&=\int_a^{a+b}k'(x)\,dx=-\int_a^{a+b}(a+b-x)'k'(x)\,dx\\&=-\Big[\,(a+b-x)k'(x)\,\Big]_a^{a+b}+\int_a^{a+b}(a+b-x)k''(x)\,dx\\&=bk'(a)+\int_a^{a+b}(a+b-x)k''(x)\,dx>bk'(a)\\k(a-b)-k(a)&=-bk'(a)+\int_a^{a-b}(a-b-x)k''(x)\,dx\\&=-bk'(a)+\int_{a-b}^{a}(x-a+b)k''(x)\,dx>-bk'(a)\end{aligned}$$

ゆえに　$k(a+b)+k(a-b)>2k(a)$　よって　$k\left(\dfrac{c+d}{2}\right)<\dfrac{k(c)+k(d)}{2}$

別解 $(*)$ を微分すると

$$\begin{aligned}g''(x)&=\frac{a^x(\log a)^2+b^x(\log b)^2}{a^x+b^x}-\frac{(a^x\log a+b^x\log b)^2}{(a^x+b^x)^2}\\&=\frac{(a^x+b^x)\{a^x(\log a)^2+b^x(\log b)^2\}-(a^x\log a+b^x\log b)^2}{(a^x+b^x)^2}\\&=\frac{a^xb^x(\log b-\log a)^2}{(a^x+b^x)^2}>0\end{aligned}$$

$(**)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)+g(0)}{x^2}$$

ここで，$\varphi(x)=xg'(x)-g(x)+g(0)$ とおくと　$\varphi(0)=0$

$$\varphi'(x)=xg''(x)$$

$g''(x)>0$ であるから，$\varphi(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$　および　$x\neq 0$ のとき $\varphi(x)>0$ であるから

$$f'(x)>0$$

(5) (3),(4) の結果から，$x_1<0<x_2$ について

$$f(x_1)<\lim_{x\to 0}f(x)<f(x_2)\quad \text{よって}\quad f(x_1)<f(x_2)$$

このとき，$x_1=-1$，$x_2=1$ とおくと

$$f(-1)<f(1)\quad \text{ゆえに}\quad e^{f(-1)}<e^{f(1)}$$

(1) の結果から　$\dfrac{2ab}{a+b}<\dfrac{a+b}{2}$

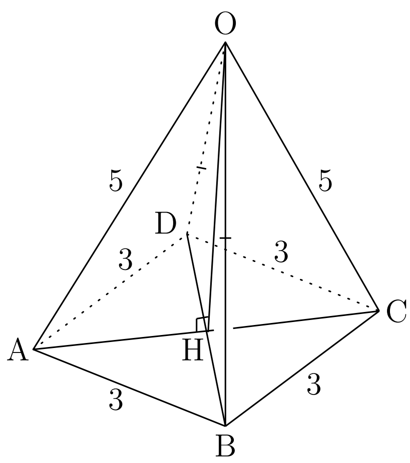
補足 $\lim_{x\to 0}f(x)=\log\sqrt{ab}$ より，$f(0)=\log\sqrt{ab}$ によって，$f(0)$ を定義すれば，(4) より，$f(x)$ は $-\infty<x<\infty$ において，単調増加な連続関数になり，

$$x_1<0<x_2 \text{ のとき}\quad f(x_1)<f(x_2)$$

■

3 (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=1$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2\\&=3^2+2\cdot 1+3^2=20\\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\&=3^2-2\cdot 1+3^2=16\end{aligned}$$



よって　$\mathbf{AC=2\sqrt{5}}$，$\mathbf{BD=4}$

(2) 対角線 AC，BD の交点を H とすると

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}=\sqrt{5},\quad \mathrm{BH}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}=2$$

$\mathrm{OA}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{OH}^2$，$\mathrm{OB}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{OH}^2$ より

$$5^2=(\sqrt{5})^2+\mathrm{OH}^2,\quad \mathrm{OB}^2=2^2+\mathrm{OH}^2$$

これを解いて　$\mathrm{OH}=2\sqrt{5}$，$\mathrm{OB}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$
$$3^2=(2\sqrt{6})^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5^2$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=20}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25\cdot24-20^2}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

別解　△OAB に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{OB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{25+9-24}{2\cdot5\cdot3}=\frac{1}{3}$$

$\sin\angle\mathrm{OAB}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

(4) 四角錐 O-ABCD の底面積を T とすると

$$T=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot4=4\sqrt{5}$$

よって　$V=\dfrac{1}{3}T\cdot\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}\cdot4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{5}=\boldsymbol{\dfrac{40}{3}}$

(5) $V=\dfrac{1}{3}(4S+T)r$ より　$\dfrac{40}{3}=\dfrac{1}{3}(4\cdot5\sqrt{2}+4\sqrt{5})r$

これを解いて　$\boldsymbol{r=\dfrac{2}{9}(5\sqrt{2}-\sqrt{5})}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x \circ y = x + y + xy$ より　$y \circ x = y + x + yx$　よって　$x \circ y = y \circ x$

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (x + y + xy) \circ z \\ &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + yz + zx + xyz, \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + z + yz) \\ &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ &= x + y + z + xy + yz + zx + xyz\end{aligned}$$

よって　$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

(2) $x \circ y = x + y + xy$，$x \circ z = x + z + xz$ より

$$\begin{aligned}x \circ y - x \circ z &= (x + y + xy) - (x + z + xz) \\ &= (1 + x)(y - z)\end{aligned}$$

x，y，z は自然数であるから，$y > z$ のとき

$$x \circ y - x \circ z > 0 \quad \text{すなわち} \quad x \circ y > x \circ z$$

(3) (a) (1) の結果から

$$\begin{aligned}a \circ b \circ c &= a + b + c + ab + bc + ca + abc \\ &= (a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1 \\ 1 \circ 3 \circ 3 &= (1 + 1)(3 + 1)(3 + 1) - 1 \\ &= 32 - 1\end{aligned}$$

したがって　$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geqq 32 \quad \cdots (*)$

$a \circ b \circ c \geqq 1 \circ 3 \circ 3$ かつ $a \leqq b \leqq c$ より　$(c + 1)^3 \geqq 32$

上式を満たす自然数 c は　$c = 3$

$c = 3$ を $(*)$ に代入することにより　$(a + 1)(b + 1) \geqq 8$

これを満たす $(a,\ b)$ の組は　$(a,\ b) = (2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 3)$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (2,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 3),\ (2,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 3)}$

(b) 求める確率は，(a) の結果に順序を付けることにより

$$\frac{3 + 3 + 3 + 1}{3^3} = \boldsymbol{\frac{10}{27}}$$

(4) $a \circ b \circ c \leqq 1 \circ 3 \circ 4$ より

$$(a+1)(b+1)(c+1)-1 \leqq (1+1)(3+1)(4+1)-1$$

ゆえに　$(a+1)(b+1)(c+1) \leqq 2{\cdot}4{\cdot}5$

$a \leqq b \leqq c$ で上式を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c) =& (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 1,\ 5),\ (1,\ 1,\ 6),\\ & (1,\ 2,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 3),\ (1,\ 3,\ 4),\\ & (2,\ 2,\ 2),\ (2,\ 2,\ 3)\end{aligned}$$

したがって　$P(E) = \dfrac{1 \times 2 + 3 \times 8 + 6 \times 4}{6^3} = \dfrac{50}{216}$

$a \circ b \circ c \leqq 1 \circ 2 \circ 2$ より

$$(a+1)(b+1)(c+1)-1 \leqq (1+1)(2+1)(2+1)-1$$

ゆえに　$(a+1)(b+1)(c+1) \leqq 2{\cdot}3{\cdot}3$

$a \leqq b \leqq c$ で上式を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は

$$(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2)$$

したがって　$P(F) = \dfrac{1+3+3+3}{6^3} = \dfrac{10}{216}$

$F \subset E$ であるから，求める条件付き確率は

$$P_E(F) = \frac{\frac{10}{216}}{\frac{50}{216}} = \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

■