令和２年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和２年３月12日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ のコイン A と，表が出る確率が q，裏が出る確率が $1-q$ のコイン B がある．ただし $0<p<1$，$0<q<1$ とする．A，B どちらか１枚のコインを投げる試行を，以下のルールに従って３回繰り返す．

- １回目に投げるコインは A とする．
- 各回の試行の結果に応じて，次に投げるコインを以下のように決める．
  - 表が出た場合，もう一方のコイン
  - 裏が出た場合，同じコイン

  (例えば，１回目に A を投げて表が出た場合，２回目に投げるコインは B となる．)

次に答えよ．

(1) ２回目に投げたコインが B である確率を求めよ．

(2) ２回目に投げたコインと３回目に投げたコインがともに B である確率を求めよ．

(3) ３回目に投げたコインが B であったとき，２回目に投げたコインが B である条件付き確率 s を求めよ．

(4) (3) の s に対し，$s \geqq \dfrac{1}{2}$ をみたす q の範囲を p を用いて表せ．

(5) ３回目に投げたコインが A であったとき，２回目に投げたコインが B である条件付き確率を t とおく．$t \geqq \dfrac{1}{2}$ をみたす点 $(p,\ q)$ 全体の集合を pq 平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ について，次に答えよ．

(1) $a_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合を考える．

(a) すべての自然数 n に対して，不等式 $2^n \geqq 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}$ を示せ．

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(c) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合を考える．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

(3) $a_n = n \sin \dfrac{\pi}{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の場合を考える．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数

$$f(t) = \tan t, \quad g(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$$

について，次に答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dt}f(t)$，$\dfrac{d}{dt}g(t)$ を求めよ．

(2) a，b は定数で，$a = f(b)$ と $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ をみたしている．定積分

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

を b を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to -1+0} g(t)$，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0} g(t)$ を求めよ．また，関数 $g(t)$ の増減を調べ，曲線 $x = g(t)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 定積分

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

を求めよ．

(5) 定積分

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a > 1$ とする．関数

$$f(x) = (a+1+a^{-1})a^{2x} - (a+1+a^{-1})a^{x}, \quad g(x) = a^{3x} - 1$$

がある．次に答えよ．

(1) X に関する方程式 $X^3 - (a+1+a^{-1})X^2 + (a+1+a^{-1})X - 1 = 0$ を解け．

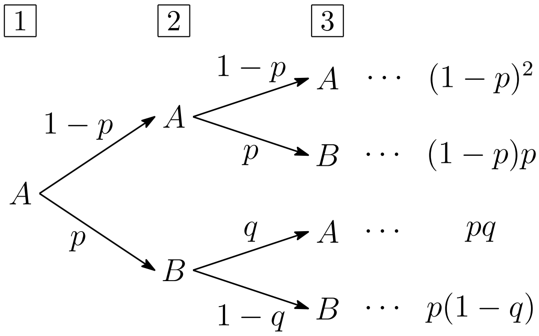
(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) 曲線 $C_1 : y = f(x)$ および曲線 $C_2 : y = g(x)$ の交点の x 座標をすべて求めよ．

(4) (3) の 2 曲線 C_1，C_2 で囲まれた図形のうち $x \geqq 0$ の部分の面積を S とする．$S = 1$ のとき，a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2 回目に投げたコインが B である確率は　　$\boldsymbol{p}$



(2) 2 回目に投げたコインと 3 回目に投げたコインがともに B である確率は

$$\boldsymbol{p(1-q)}$$

(3) 3 回目に投げたコインが B であったとき，2 回目に投げたコインが B である条件付き確率 s は

$$s = \frac{p(1-q)}{(1-p)p+p(1-q)} = \boldsymbol{\frac{1-q}{2-p-q}}$$

(4) (3) の結果から，$s \geqq \dfrac{1}{2}$ をみたすとき

$$\frac{1-q}{2-p-q} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad q \geqq p$$

$0<q<1$ であるから　　$\boldsymbol{0<q \leqq p}$

(5) 3 回目に投げたコインが A であったとき，2 回目に投げたコインが B である条件付き確率 t は

$$t = \frac{pq}{(1-p)^2+pq}$$

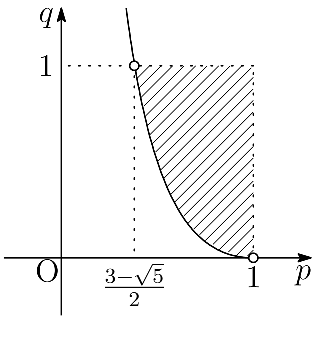
$t \geqq \dfrac{1}{2}$ をみたすとき　$\dfrac{pq}{(1-p)^2+pq} \geqq \dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$q \geqq p + \dfrac{1}{p} - 2$

$f(p) = p + \dfrac{1}{p} - 2$ とおくと $(0<p<1)$

$$f'(p) = 1 - \frac{1}{p^2} = \frac{p^2-1}{p^2} < 0$$

$f(p)=1$ を解くと $(0<p<1)$　$p = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

よって　$p + \dfrac{1}{p} - 2 \leqq q < 1$　$\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < p < 1\right)$



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2^n = 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} \quad \cdots (*)$

(a) $n = 1,\ 2$ のとき，$(*)$ は等号が成立する．

$n \geqq 3$ のとき，2 項定理により

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{k=3}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \\ &> 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

よって，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(b) 自然数 n について，$2^n \geqq 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} > \dfrac{n(n-1)}{2}$ であるから

$a_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$ について

$$0 < a_n < \frac{2n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2(2n-1)}{n(n-1)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2(2n-1)}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{2}{n}}{n-1} = 0$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$$

(c) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$ $(-1 < x < 1)$ とおくと，$f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ より

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n-2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\text{ゆえに}\quad x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{2n} = \frac{x^2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

これに $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を代入すると　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \mathbf{3}$

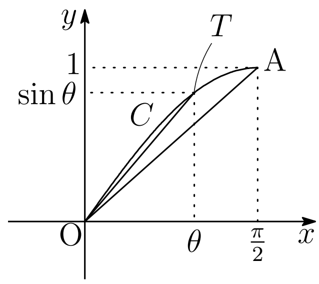
(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \cdots = \infty$ であるから　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

(3) $g(x) = \sin x$ とすると，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$C : y = g(x)$ のグラフは上に凸である．C 上の点 $\mathrm{A}(\frac{\pi}{2},\ 1)$，$\mathrm{T}(\theta,\ g(\theta))$ について，直線 OT の傾きと OA の傾きについて



$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geqq \frac{2}{\pi}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とすると

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \geqq \frac{2}{\pi} \quad \text{ゆえに} \quad n\sin\frac{\pi}{2n} \geqq 1$$

したがって，$a_n = n\sin\dfrac{\pi}{2n}$ について　$a_n \geqq 1$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqq \sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \text{よって} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

3 (1) $f(t) = \tan t$，$g(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$ より

$$\frac{d}{dt}f(t) = \boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 t}},$$

$$\frac{d}{dt}g(t) = \frac{2\sqrt{1-t^2} - 2t\cdot\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}$$

$$= \frac{2(1-t^2)+2t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}} = \boldsymbol{\frac{2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}}$$

(2) a，b が $a = f(b)$ を満たすとき $\left(0 < b < \dfrac{\pi}{2}\right)$，定積分 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx$

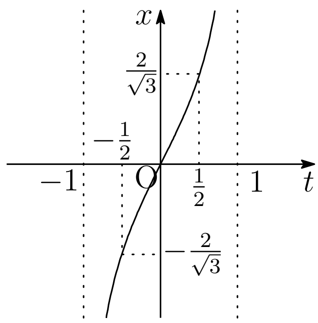
について，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

x	$0 \longrightarrow a$
t	$0 \longrightarrow b$

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^b \frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^b dt = \boldsymbol{b}$$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to -1+0} g(t) = -\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0} g(t) = \infty$

(1) の結果から，区間 $-1 < t < 1$ において単調増加であるから，$x = g(t)$ のグラフの概形は右の図のようになる．



(4) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+4} - x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{4(x^2+4)} = \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$$

したがって $$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}\,dx = \left[\ \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}\ \right]_0^{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{4\sqrt{3}}}$$

(5) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+4}}\,dx$ について，$\tan t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ とおくと

$$\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}},$$

x	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + \frac{x^2}{x^2+4} = \frac{2(x^2+2)}{x^2+4}$$

よって $$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{(x^2+2)\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 方程式 $X^3-(a+1+a^{-1})X^2+(a+1+a^{-1})X-1=0$ において，
$b=a+1+a^{-1}$ とおくと

$$X^3-bX^2+bX-1=0 \quad ゆえに \quad (X-1)\{X^2-(b-1)X+1\}=0$$

したがって $\qquad (X-1)\{X^2-(a+a^{-1})X+1\}=0$

$\qquad (X-1)(X-a)(X-a^{-1})=0$

これを解いて $\qquad \boldsymbol{X=1,\ a,\ a^{-1}}$

(2) $X=a^x$ とすると，$b=a+1+a^{-1}>0$ より

$$f(x)=bX^2-bX=b(X^2-X)=b\left(X-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{b}{4}$$

よって　極小値 $-\dfrac{b}{4}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}(a+1+a^{-1})}$

(3) (1) の結果において，$X=a^x$ とすると

$$g(x)-f(x)=(a^x-1)(a^x-a)(a^x-a^{-1})$$

よって，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は

$$\boldsymbol{x=0,\ 1,-1}$$

(4) $a>1$ より，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) \geqq g(x)$ であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx \\
&= \int_0^1 \{ba^{2x}-ba^x-(a^{3x}-1)\}\,dx \\
&= \left[\frac{ba^{2x}}{2\log a}-\frac{ba^x}{\log a}-\frac{a^{3x}}{3\log a}+x\right]_0^1 \\
&= \frac{b(a^2-1)}{2\log a}-\frac{b(a-1)}{\log a}-\frac{a^3-1}{3\log a}+1
\end{aligned}$$

$S=1$ であるとき，$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)=a(a-1)b$ に注意して

$$\frac{b(a+1)(a-1)}{2}-b(a-1)-\frac{a(a-1)b}{3}=0$$

$b(a-1)\neq 0$ であるから $\quad \dfrac{a+1}{2}-1-\dfrac{a}{3}=0 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{a=3}$