令和２年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　令和 2 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ xy 平面上の曲線 $C: y = 2\log x$ と，実数 a によって定まる曲線 $D: y = x^2 + a$ を考える．曲線 C と曲線 D は点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通り，点 P における共通の接線 l をもつ．次に答えよ．

(1) 点 P の座標 $(p,\ q)$，実数 a の値，および接線 l の方程式をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C と曲線 D，および直線 $x = t\ (0 < t < p)$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ．また，$\displaystyle\lim_{t \to +0} S(t)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ が成り立つことを用いてもよい．

(3) 曲線 C と曲線 D，および直線 $x = t\ (t > p)$ で囲まれた領域の面積 $T(t)$ を t を用いて表せ．また，関数 $f(t) = \dfrac{T(t)}{t^3}$ は区間 $t > p$ で増加することを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0, -\pi)$，点 $\mathrm{B}(0,\ \pi)$，および動点 P を考える．動点 P は時刻 0 では点 A にある．時刻 t における動点 P の座標を $(x(t),\ y(t))$ とすると，動点 P の速度 $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ は，

$$y(t) \leqq 0 \text{ のとき}\quad \vec{v} = (a\cos b + \sin y(t),\ a\sin b)$$
$$y(t) > 0 \text{ のとき}\quad \vec{v} = \left(0,\ \frac{1}{2\pi b}\right)$$

で与えられる．ただし，実数 $a,\ b$ は $a > 0,\ 0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす．次に答えよ．

(1) 動点 P が点 A から x 軸上の点に到達するまでの間の $y(t)$ を $t,\ a,\ b$ を用いて表せ．

(2) 動点 P が点 A から x 軸上の点に到達するまでの間の $x(t)$ を $t,\ a,\ b$ を用いて表せ．

(3) 動点 P が原点 O に到達するためにみたすべき条件を a と b を用いて表せ．

(4) 動点 P が時刻 T に点 B に到達した．時刻 T を b を用いて表せ．また，T の最小値とそのときの b を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ α，β は定めらた複素数とする．複素数平面上の点 z_1 に対して，z_n $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を以下の規則によって定める．

(規則)　　$z_n = \alpha z_{n-1} + \beta$

点 z_1 として $z_1 = 3\sqrt{3} - 3i$ を選び，この規則を用いて z_2，z_3 を定めたところ，$z_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$，$z_3 = 3i$ となった．次に答えよ．

(1) z_1 と z_2 を通る直線と，z_2 と z_3 を通る直線を考える．この 2 直線のなす角 $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

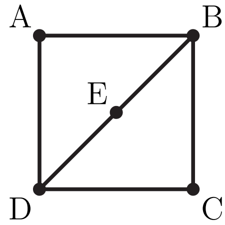
(2) α と β を求めよ．また，それぞれの絶対値，偏角も求めよ．

(3) 規則に示した z_n と z_{n-1} の関係を $z_n - \gamma = \alpha(z_{n-1} - \gamma)$ と表す．γ を求めよ．

(4) z_n を z_1，α および (3) の γ を用いて表せ．ただし，z_1，α および γ は記号のままで表せ．

(5) 複素数平面上の点 z_1 を選びなおし，規則を用いて z_5 を定めなおす．z_5 が $|z_5| < 1$ をみたすために z_1 がみたすべき条件を求めよ．また，その条件をみたす点 z_1 の全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ．

4 右図のように，正方形ABCDがあり，対角線BDの中点をEとする．時刻 $n=0$ において，点Pは頂点Aにあり，点Qは頂点Cにある．時刻 $n=1,2,3,\cdots$ における点Pと点Qの位置は，次の移動規則によって定まる．



- 点Pの移動規則
  時刻 $n-1$ における点Pの位置が頂点Aのときは，それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で頂点Bか頂点Dに移動する．頂点Bまたは頂点Dのときは，それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で頂点Aか頂点Cに移動する．頂点Cのときは，移動せずそのままとどまる．
- 点Qの移動規則
  時刻 $n-1$ における点Qの位置が頂点Cのときは，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点Bに移動するか頂点Dに移動するか移動せずそのままとどまる．頂点Bまたは頂点Dのときは，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点Aに移動するか点Eに移動するか移動せずそのままとどまる．頂点Aまたは点Eのときは，移動せずそのままとどまる．

次に答えよ．

(1) 時刻 $n=4$ における点Pの位置が頂点Cである確率を求めよ．

(2) 時刻 n における点Qの位置が頂点Bである確率を求めよ．

(3) 時刻 n において，はじめて点Qの位置が頂点Aとなる確率を求めよ．

(4) 時刻 $n=4$ までに，少なくとも一度，同時刻に点Pと点Qの位置が頂点Bとなる確率を求めよ．

(5) 時刻 $n=4$ における点Pの位置が頂点Cであった．このとき，はじめて点Pの位置が頂点Cとなった時刻より前に点Qの位置が頂点Aとなる条件付き確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(x)=2\log x$，$h(x)=x^2+a$ とおくと　$g'(x)=\dfrac{2}{x}$，$h'(x)=2x$

2 曲線 $C_1: y=g(x)$，$C_2: y=h(x)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で共通接線 l をもつから，l の傾きを m とすると，$q=g(p)=h(p)$，$m=g'(p)=h'(p)$ より

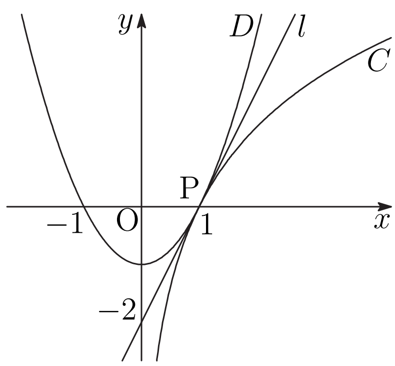
$$q=2\log p=p^2+a,\quad m=\frac{2}{p}=2p\quad\cdots(*)$$

$(*)$ の第 2 式から $(p>0)$　$p=1,\ m=2$

$p=1$ を $(*)$ の第 1 式に代入して

$$q=0=1+a\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=-1}$$

したがって　**P(1, 0)**



l は，P を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y=2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2x-2}$$

(2) $C: y=2\log x$，$D: y=x^2-1$ より，$0<t<1$ のとき

$$S(t)=\int_t^1 (x^2-1-2\log x)\,dx=\left[\,\frac{x^3}{3}+x-2x\log x\,\right]_t^1$$
$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}-\frac{t^3}{3}-t+2t\log t}$$

ここで　$$\lim_{t\to+0} t\log t=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u}\log\frac{1}{u}=\lim_{u\to\infty}\left(-\frac{\log u}{u}\right)=0$$

よって　$$\lim_{t\to+0} S(t)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{4}{3}-\frac{t^3}{3}-t+2t\log t\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(3) (2) と同様に，$t>1$ のとき

$$T(t)=\int_1^t (x^2-1-2\log x)\,dx=\left[\,\frac{x^3}{3}+x-2x\log x\,\right]_1^t$$
$$=\frac{t^3}{3}+t-2t\log t-\frac{4}{3},$$
$$f(t)=\frac{T(t)}{t^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{t^2}-\frac{2\log t}{t^2}-\frac{4}{3t^3}$$
$$f'(t)=-\frac{4}{t^3}+\frac{4\log t}{t^3}+\frac{4}{t^4}=\frac{4}{t^3}\left(-1+\log t+\frac{1}{t}\right)$$

$\varphi(t) = -1 + \log t + \dfrac{1}{t}$ とおくと $(t \geqq 1)$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} > 0 \quad (t > 1)$$

$\varphi(1) = 0$ であるから　$t \geqq 1$ において　$\varphi(t) \geqq 0$

したがって　$t > 1$ において　$f'(t) = \dfrac{4\varphi(t)}{t^3} > 0$

よって　$f(t)$ は区間 $t > 1$ で増加する

$\boxed{\mathbf{2}}$ **補足** 与えられた条件より，$\dfrac{dy}{dt} > 0$ であるから，動点 P は y 軸の正の向きに運動する．$t = 0$ で $\mathrm{A}(0, -\pi)$ にあった点 P が $t = T_1$ 秒後に x 軸上の点に到達するものとすると，その後，P の x 軸方向の速度ベクトルが $\dfrac{dx}{dt} = 0$ であることから，y 軸と平行な向きに等速度 $\vec{v} = \left(0,\ \dfrac{1}{2\pi b}\right)$ で運動し，点 $\mathrm{B}(0,\ \pi)$ に到達する．すなわち，$t = T_1$ で P は原点 O を通過し，その後，P は y 軸上を等速度で点 B まで運動する．OB 間の移動に要する時間を T_2 とすると，P は $t = T$ $(T = T_1 + T_2)$ で B に到達する．

(1) 動点 P が点 A から x 軸上の点に到達するまで，y 軸方向の速度ベクトル

$$\frac{dy}{dt} = a \sin b$$

が一定であるから，これを t について積分すると

$$y(t) = at \sin b + C_1 \quad (C_1 \text{は積分定数})$$

$y(0) = -\pi$ であるから，これを上式に代入すると　$C_1 = -\pi$

よって　$\boldsymbol{y(t) = at \sin b - \pi}$

(2) (1) の結果を $\dfrac{dx}{dt} = a \cos b + \sin y(t)$ に代入すると

$$\frac{dx}{dt} = a \cos b + \sin(at \sin b - \pi) = a \cos b - \sin(at \sin b)$$

これを t について積分すると

$$x(t) = at \cos b + \frac{\cos(at \sin b)}{a \sin b} + C_2 \quad (C_2 \text{は積分定数})$$

$x(0) = 0$ であるから，これを上式に代入すると　$C_2 = -\dfrac{1}{a \sin b}$

よって　$\boldsymbol{x(t) = at \cos b + \dfrac{\cos(at \sin b)}{a \sin b} - \dfrac{1}{a \sin b}}$

(3) $t=T_1$ で原点 O に到達するとき，(1)，(2) の結果から

$$aT_1\sin b-\pi=0,\quad aT_1\cos b-\frac{\cos(aT_1\sin b-\pi)}{a\sin b}-\frac{1}{a\sin b}=0$$

上の第 1 式から，$T_1=\dfrac{\pi}{a\sin b}\cdots$①．これを第 2 式に代入すると

$$\frac{\pi\cos b}{\sin b}-\frac{2}{a\sin b}=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=\frac{2}{\pi\cos b}}$$

(4) $y(t)$ の符号に関係なく，$\dfrac{dy}{dt}>0$ であるから，$\mathrm{A}(0,-\pi)$ を出発した P が x 軸を通過し，その後の x 軸方向の速度ベクトルが $\dfrac{dx}{dt}=0$ であるから，y 軸と平行な向きに等速度 $\vec{v}=\left(0,\ \dfrac{1}{2\pi b}\right)$ で運動し，点 $\mathrm{B}(0,\ \pi)$ に到達する．すなわち，$t=T_1$ で P は原点 O を通過し，その後，P は y 軸上を等速度で点 B まで運動する．OB 間の移動に要する時間を T_2 とすると

$$\frac{1}{2\pi b}\cdot T_2=\pi\quad \text{ゆえに}\quad T_2=2\pi^2 b$$

また，(3) の結果を ① に代入すると

$$T_1=\frac{\pi\cos b}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin b}=\frac{\pi^2}{2\tan b}$$

よって　$T=T_1+T_2=\dfrac{\pi^2}{2\tan b}+2\pi^2 b=\boldsymbol{\pi^2\left(\dfrac{1}{2\tan b}+2b\right)}$

$f(b)=\dfrac{1}{2\tan b}+2b$ とおくと $\left(0<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(b)=-\frac{1}{2\sin^2 b}+2=\frac{4\sin^2 b-1}{2\sin^2 b}=\frac{(2\sin b+1)(2\sin b-1)}{2\sin^2 b}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$		↘	極小	↗	

よって，T は $\boldsymbol{b=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最小値 $\pi^2 f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\pi^2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z_2 - z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i - (3\sqrt{3} - 3i) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$

$$= 3\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z_3 - z_2 = 3i - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ゆえに $\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \dfrac{3\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)}{3\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって $\theta = \arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

(2) 与えられた規則により $z_2 = \alpha z_1 + \beta$, $z_3 = \alpha z_2 + \beta$

$z_1 \neq z_2$ に注意してこれを解くと $\alpha = \dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}$, $\beta = \dfrac{{z_2}^2 - z_1 z_3}{z_2 - z_1}$

$${z_2}^2 - z_1 z_3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right)^2 - (3\sqrt{3} - 3i)\cdot 3i$$

$$= -\frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}i = 9\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 9\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\frac{{z_2}^2 - z_1 z_3}{z_2 - z_1} = \frac{9\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)}{3\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

上の諸式および (1) の結果から

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right),\ |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \arg\alpha = \frac{\pi}{6}},$$

$$\boldsymbol{\beta = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right),\ |\beta| = \sqrt{3},\ \arg\beta = \frac{2\pi}{3}}$$

(3) $\gamma = \alpha\gamma + \beta \cdots$ ① とおくと，(規則) と ① との辺々の差をとると，関係式

$$z_n - \gamma = \alpha(z_{n-1} - \gamma) \quad \cdots (*)$$

が得られるから，① を満たす γ を求めればよい．

$$\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}i$ より

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\beta}{1-\alpha} &= \frac{\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}} \\ &= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= \boldsymbol{3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)} \end{aligned}$$

(4) $(*)$ より，$\{z_n - \gamma\}$ は初項 $z_1 - \gamma$，公比 α の等比数列であるから

$$z_n - \gamma = \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{z_n = \gamma + \alpha^{n-1}(z_1 - \gamma)}$$

(5) $w = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ とおくと，(2)，(3) の結果から

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}w, \quad \beta = \sqrt{3}w^4, \quad \gamma = 3w^5$$

(4) の結果から

$$\begin{aligned} z_5 &= \gamma + \alpha^4(z_1 - \gamma) = 3w^5 + \frac{1}{9}w^4(z_1 - 3w^5) \\ &= \frac{1}{9}w^4(z_1 + 27w - 3w^5) \end{aligned}$$

ここで

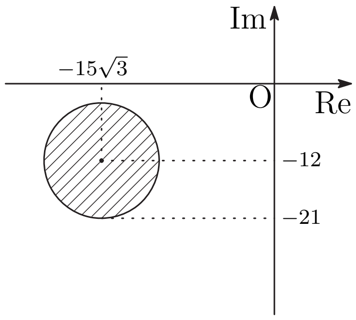
$$27w - 3w^5 = 27\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 15\sqrt{3} + 12i$$

$|z_5| < 1$ より

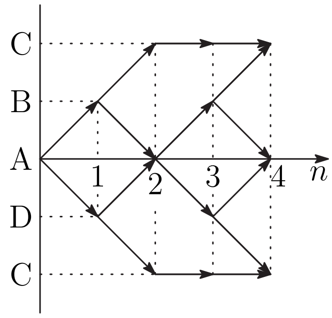
$$\frac{1}{9}|w^4||z_1 + 27w - 3w^5| < 1$$

ゆえに　$|z_1 + 15\sqrt{3} + 12i| < 9$

よって，点 z_1 は，$\boldsymbol{-15\sqrt{3} - 12i}$ を中心とする半径 **9** の円の内部にある．ただし，境界線は含まない．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 時刻 $n=4$ において，点 P は頂点 A または C にある．$n=4$ で点 P が頂点 A にある確率は



$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(2) 点 Q が時刻 n で，頂点 B，C にある確率をそれぞれ b_n，c_n とすると，点 Q の移動規則により，次の確率漸化式が成立する．

$$b_0=0,\quad c_0=1,\quad b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n,\quad c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから　$c_n=\frac{1}{3^n}$

これから　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^n}$　したがって　$3^{n+1}b_{n+1}-3^nb_n=1$

$n \geqq 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(3^{k+1}b_{k+1}-3^kb_k)=n$　ゆえに　$b_n=\frac{n}{3^n}$

$n=0$ のときも成立するから　$b_n=\boldsymbol{\frac{n}{3^n}}$

(3) 時刻 n において，点 Q が頂点 D にある確率は，B と D の対称性により

$$b_n$$

時刻 n ($n \geqq 1$) において，はじめて点 Q が頂点 A にある確率は，点 Q の移動規則により

$$b_{n-1}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{2(n-1)}{3^n}$$

$n=0$ のときは，その確率は 0 であるから，求める確率は

$$\boldsymbol{n=0\ \text{のとき}\ 0,\quad n \geqq 1\ \text{のとき}\ \frac{2(n-1)}{3^n}}$$

(4) 時刻 $n=4$ までに，同時刻に点 P と点 Q の位置が B であるのは，1 秒後と 3 秒後である．2 点 P，Q の位置が 1 秒後，3 秒後に B である事象を，それぞれ X，Y とすると，そのときの確率について

$$P(X)=\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

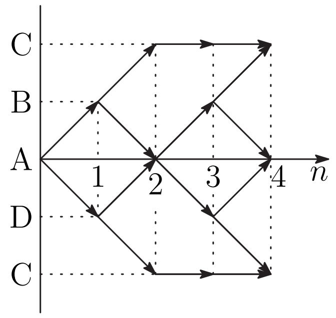
$$P(Y)=\frac{1}{4}b_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$$

$$P(X\cap Y)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{216}$$

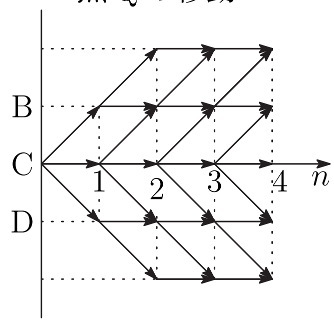
よって　$P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap B)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}-\frac{1}{216}=\mathbf{\frac{41}{216}}$$

点 P の移動



点 Q の移動



(5) はじめて点 P の位置が頂点 C となるのは，2 秒後と 4 秒後であるが，2 秒後よりも前に点 Q の位置が頂点 A となることはない．4 秒後にはじめて点 P の位置が頂点 C にある確率は

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

(3) で求めた確率を

$$q_n=\frac{2(n-1)}{3^n}\quad(n\geqq 1)$$

とおく．4 秒後に点 P の位置が頂点 C にある事象を S，はじめて点 P の位置が頂点 C となった時刻より前に点 Q の位置が頂点 A となる事象を T とすると，(1) の結果および上式における $n=2,\ 3$ の場合から

$$P(S)=\frac{3}{4},\quad P(S\cap T)=\frac{1}{4}(q_2+q_3)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{27}$$

よって，求める確率は　$P_S(T)=\dfrac{P(S\cap T)}{P(S)}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{27}}{\frac{3}{4}}=\mathbf{\dfrac{10}{81}}$