# 平成 31 年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
# 工学部・情報工学部　平成 31 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $k$ を 2 以上の自然数とする．次に答えよ．

(1) 不定方程式 $7x + 5y = 1$ の整数解をすべて求めよ．

(2) 不定方程式 $7x + 5y = k$ の整数解をすべて求めよ．

以下では，(1) の整数解の 1 つが表す座標平面上の点を P とする．(2) の整数解が表す点のうち，点 P からの距離が最小になる点を Q とする．ただし，距離が最小になる点が複数ある場合には，$x$ 座標が最小になる点を Q とする．

(3) $k = 74l + 1$ ($l$ は自然数) のとき，$\mathrm{PQ}^2$ を $l$ を用いて表せ．

(4) $k = 100$ のとき，PQ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次に答えよ．ただし，$i$ は虚数単位を表し，$|z|$ は複素数 $z$ の絶対値を表す．

(1) $|1 + i|$ を求めよ．

(2) 複素数平面上で，点 $z$ が $|z| = 1$ をみたしながら動くとき，複素数 $w = -iz + 1 - i$ が表す点 $w$ の描く円 $C_1$ の中心と半径を求めよ．

(3) 複素数平面上で，点 $z$ が $|z + i| = 1$ をみたしながら動くとき，複素数 $w = \dfrac{iz + (i-2)}{z-1}$ が表す点 $w$ の描く円 $C_2$ の中心と半径を求めよ．

(4) 複素数平面上の原点を O，(2) で求めた円 $C_1$ の中心を P，(3) で求めた円 $C_2$ の中心を Q とする．3 点 O，P，Q を通る円 $C_3$ の中心と半径を求め，円 $C_3$ を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ について，次に答えよ．ただし，$e$ は自然対数の底を表す．必要ならば，$2 < e < 3$ を用いてよい．

(1) $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，および $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $f(x) > 0$ が成立することを示せ．

(3) $0 < x < 1$ のとき，不等式 $f(x) < x^3$ が成立することを示せ．

(4) (2)，(3) を用いて，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{e^x - 1}{x}$，および $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ を求めよ．

(5) (4) を用いて，$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{e^{2x} - 1 - 2xe^x}{x^2}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $x^2+4y^2=4\ (x \geqq 0)$ を $C$ とする．また，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対し，$C$ 上の点 A，B を $\mathrm{A}(2\cos t,\ \sin t)$，$\mathrm{B}(2\sin t, -\cos t)$ とする．次に答えよ．

(1) 関数 $f(t)=\sin t+\cos t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) 直線 AB と $x$ 軸の交点を $\mathrm{P}(g(t),\ 0)$ とする．$g(t)$ を求めよ．さらに，関数 $g(t)\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 2 点 A，B の中点を M とする．点 M の座標を $\cos t$，$\sin t$ を用いて表せ．さらに，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $t$ が変化するとき，点 M が描く軌跡を図示せよ．

(4) 直線 AB が $y$ 軸に平行であるとする．このとき，直線 AB と曲線 $C$ により囲まれた図形を $D$ とする．$D$ を直線 AB のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めよ．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $7 \equiv 2,\ 5 \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$7x + 5y = 1 \cdots$ ① より

$$2x \equiv 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3{\cdot}2x \equiv 3{\cdot}1 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 3 \pmod 5$$

したがって，$x = 5n + 3$ ($n$ は整数) を ① に代入すると

$$7(5n + 3) + 5y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = -7n - 4$$

よって　$\boldsymbol{x = 5n + 3,\ y = -7n - 4}$ **($\boldsymbol{n}$ は整数)**

(2) (1) と同様にして，$7x + 5y = k \cdots$ ② より

$$2x \equiv k \quad \text{ゆえに} \quad 3{\cdot}2x \equiv 3k \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 3k \pmod 5$$

したがって，$x = 5m + 3k$ ($m$ は整数) を ② に代入すると

$$7(5m + 3k) + 5y = k \quad \text{ゆえに} \quad y = -7m - 4k$$

よって　$\boldsymbol{x = 5m + 3k,\ y = -7m - 4k}$ **($\boldsymbol{m}$ は整数)**

(3) (1)，(2) の結果から，$\mathrm{P}(5n+3, -7n-4)$，$\mathrm{Q}(5m+3k, -7m-4k)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (5(m - n) + 3(k - 1), -7(m - n) - 4(k - 1)) \quad \cdots (*)$$

ここで，$a = m - n$，$b = k - 1$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (5a + 3b, -7a - 4b) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{PQ}^2 = (5a + 3b)^2 + (7a + 4b)^2$$

したがって，$74 = 5^2 + 7^2$ に注意して

$$\begin{aligned}
74\mathrm{PQ}^2 &= (5^2 + 7^2)\{(5a + 3b)^2 + (7a + 4b)^2\} \\
&= \{5(5a + 3b) + 7(7a + 4b)\}^2 + \{7(5a + 3b) - 5(7a + 4b)\}^2 \\
&= (74a + 43b)^2 + b^2 \\
&= \{74(m - n) + 43(k - 1)\}^2 + (k - 1)^2 \quad \cdots (**)
\end{aligned}$$

$k = 74l + 1$ を $(**)$ に代入すると

$$74\mathrm{PQ}^2 = \{74(m - n) + 43{\cdot}74l\}^2 + (74l)^2$$

したがって　$\mathrm{PQ}^2 = 74(m - n + 43l)^2 + 74l^2$

よって，$m - n + 43l = 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{PQ}^2 = 74l^2}$

補足 $(p^2 + q^2)(x^2 + y^2) = (px + qy)^2 + (qx - py)^2$ を利用．

(4) $(**)$ において，$N = m - n$ とおくと，$k = 100$ より

$$74\mathrm{PQ}^2 = (74N + 43{\cdot}99)^2 + 99^2$$

ここで，$f(N) = 74N + 43{\cdot}99$ とおくと　$74\mathrm{PQ}^2 = f(N)^2 + 99^2$
$f(-58) = -35$，$f(-57) = 39$ より，$N = -58$ のとき，PQ は最小．
したがって，$m - n = -58$，$k = 100$ を $(*)$ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (7,\ 10) \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$$

よって　$\mathbf{PQ = \sqrt{149}}$

**注意** $\mathrm{PQ} = \sqrt{\dfrac{f(N)^2 + 99^2}{74}}$ に $f(-58) = 35$ を代入してもよいが，P，Q は格子点にあるから，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ から直接求めた方がよい．

**解説** $a,\ b$ を素数とするとき $(a > b)$，1 次不定方程式

$$ax + by = 1$$

は，法 $a$ について　$by \equiv 1 \pmod a$
$a$ の剰余系 $A = \{0, 1, 2, \cdots, a-1\}$ について，$a_1 \in A$，$a_2 \in A$ とすると $(a_1 > a_2)$，$b$ および $a_1 - a_2$ は $a$ で割り切れないから

$$b(a_1 - a_2) \not\equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ba_1 \not\equiv ba_2 \pmod a$$

したがって，$b{\cdot}0,\ b{\cdot}1,\ b{\cdot}2, \cdots,\ b(a-1)$ は，法 $a$ について，互いに合同でない，すなわち (鳩の巣原理)

$$\{b{\cdot}0,\ b{\cdot}1,\ b{\cdot}2, \cdots,\ b(a-1)\}$$

は，$a$ の剰余系をなす．ゆえに，$by_0 \equiv 1 \pmod a$ をみたす $y_0 \in A$ が存在し，$by_0 = 1 - ax_0$ ($x_0$は整数) および原方程式から

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

ゆえに　$\begin{cases} x - x_0 = bn \\ y - y_0 = -an \end{cases}$　よって　$\begin{cases} x = x_0 + bn \\ y = y_0 - an \end{cases}$　($n$ は整数)

同様に，1 次不定方程式 $ax + by = k \cdots (*)$ についても $by_0' \equiv k \pmod a$ をみたす $y_0' \in A$ が存在し，$by_0' = k - ax_0'$ により，$(*)$ の解は

$$\begin{cases} x = x_0' + bn \\ y = y_0' - an \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

(2) $w = -iz + 1 - i$ より，$w - 1 + i = -iz$ であるから

$$|w-1+i| = |-i||z|$$

$|-i| = 1$，$|z| = 1$ であるから　$|w-(1-i)| = 1$

よって，$C_1$ は中心 $\boldsymbol{1-i}$，半径 **1** の円

(3) $w = \dfrac{iz+(i-2)}{z-1}$ を $z$ について解くと　$z = \dfrac{w-2+i}{w-i}$

ゆえに　$z + i = \dfrac{(1+i)(w+i)}{w-i}$　これと $|z+i| = 1$ により

$$\frac{|1+i||w+i|}{|w-i|} = 1 \quad \text{(1) の結果から} \quad \sqrt{2}|w+i| = |w-i| \quad \cdots(*)$$

$(*)$ より，$2|w+i|^2 = |w-i|^2$ であるから

$$\begin{aligned} 2(w+i)(\overline{w}-i) &= (w-i)(\overline{w}+i) \\ w\overline{w} - 3iw + 3i\overline{w} + 1 &= 0 \\ (w+3i)(\overline{w}-3i) &= 8 \\ |w+3i|^2 &= 8 \end{aligned}$$

よって，$C_2$ は中心 $\boldsymbol{-3i}$，半径 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ の円

(4) (2)，(3) の結果から，O(0)，P$(1-i)$，Q$(-3i)$

線分 OP の中点は　$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$　ゆえに，線分 OP の垂直二等分線は

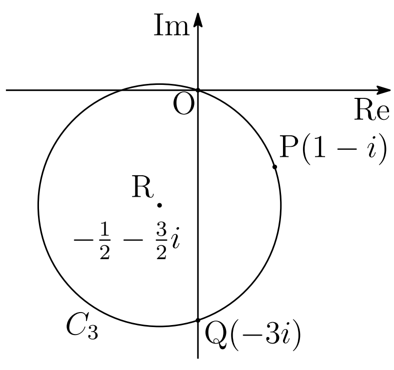
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + ti(1-i) = \frac{1}{2} + t + \left(-\frac{1}{2} + t\right)i \quad (t \text{ は実数}) \quad \cdots ①$$

線分 OQ の中点は　$-\dfrac{3}{2}i$

ゆえに，線分 OQ の垂直二等分線は

$$u - \frac{3}{2}i \quad (u \text{ は実数}) \quad \cdots ②$$

円 $C_3$ の中心を R とすると，R は ① と ② の交点であるから




$$\frac{1}{2} + t + \left(-\frac{1}{2} + t\right)i = u - \frac{3}{2}i$$

これを解いて　$t = -1,\ u = -\dfrac{1}{2}$　よって　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i}\right)$

円の半径は　$\mathrm{OR} = \left|-\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i\right| = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{f(0)=0},$$
$$f'(x)=e^x-1-x \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{f'(0)=0},$$
$$f''(x)=e^x-1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{f''(0)=0},$$
$$\boldsymbol{f'''(x)=e^x}$$

(2) $x>0$ のとき，$f'''(x)>0$ より

$$\int_0^x f'''(t)\,dt=\Big[\,f''(t)\,\Big]_0^x=f''(x)-f''(0)=f''(x)>0$$

ゆえに，$x>0$ のとき，$f''(x)>0$ より

$$\int_0^x f''(t)\,dt=\Big[\,f'(t)\,\Big]_0^x=f'(x)-f'(0)=f'(x)>0$$

さらに，$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ より

$$\int_0^x f'(t)\,dt=\Big[\,f(t)\,\Big]_0^x=f(x)-f(0)=f(x)>0$$

(3) $0<x<1$ のとき，$f'''(x)-3<0$ より

$$\int_0^x (f'''(t)-3)\,dt=\Big[\,f''(t)-3t\,\Big]_0^x=f''(x)-3x<0$$

ゆえに，$0<x<1$ のとき，$f''(x)-3x<0$ より

$$\int_0^x (f''(t)-3t)\,dt=\Big[\,f'(t)-\frac{3}{2}t^2\,\Big]_0^x=f'(x)-\frac{3}{2}x^2<0$$

さらに，$0<x<1$ のとき，$f'(x)-\dfrac{3}{2}x^2<0$ より

$$\int_0^x \left(f'(t)-\frac{3}{2}t^2\right)dt=\Big[\,f(t)-\frac{t^3}{2}\,\Big]_0^x=f(x)-\frac{x^3}{2}<0$$

よって　$0<x<1$ のとき　$f(x)<\dfrac{x^3}{2}<x^3$

(4) (2),(3) の結果から　$0<x<1$ のとき，$0<e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}<x^3$ より

$$1+\frac{x}{2}<\frac{e^x-1}{x}<1+\frac{x}{2}+x^2,\quad \frac{1}{2}<\frac{e^x-1-x}{x^2}<\frac{1}{2}+x$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-1}{x}=\mathbf{1},\ \lim_{x\to+0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^{2x}-1-2xe^x}{x^2}=\lim_{x\to+0}\left\{4\cdot\frac{e^{2x}-1-2x}{(2x)^2}-2\cdot\frac{e^x-1}{x}\right\}=4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot1=\mathbf{0}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(t)=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より　$1 \leqq f(t) \leqq \sqrt{2}$

よって　$t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$，　$t=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき，最小値 $\mathbf{1}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} g(t) \\ 0 \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}+(1-u)\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2u\cos t+2(1-u)\sin t \\ u(\sin t+\cos t)-\cos t \end{pmatrix}$$

$y$ 成分を比較して　$u=\dfrac{\cos t}{\sin t+\cos t}$　さらに　$1-u=\dfrac{\sin t}{\sin t+\cos t}$

よって　$$g(t)=\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\cdot 2\cos t+\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\cdot 2\sin t$$
$$=\frac{2(\cos^2 t+\sin^2 t)}{\sin t+\cos t}=\boldsymbol{\frac{2}{\sin t+\cos t}}$$

(1) の結果から，$t=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\mathbf{2}$，　$t=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

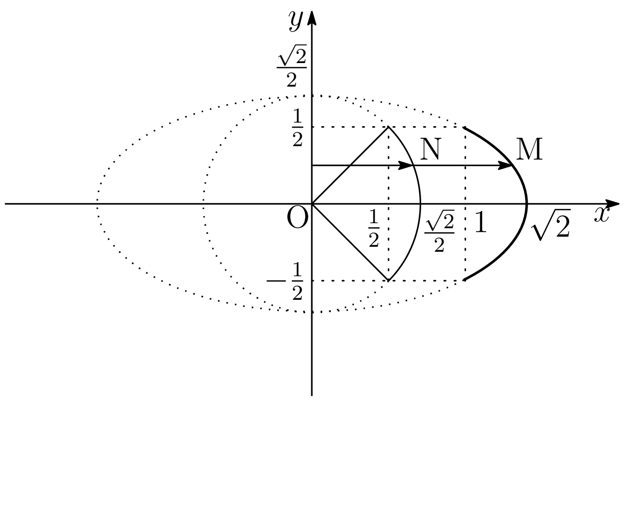
(3) 2 点 $\mathrm{A}(2\cos t,\ \sin t)$，$\mathrm{B}(2\sin t, -\cos t)$ の中点 M の座標は

$$\boldsymbol{\left(\cos t+\sin t,\ \frac{\sin t-\cos t}{2}\right)}$$

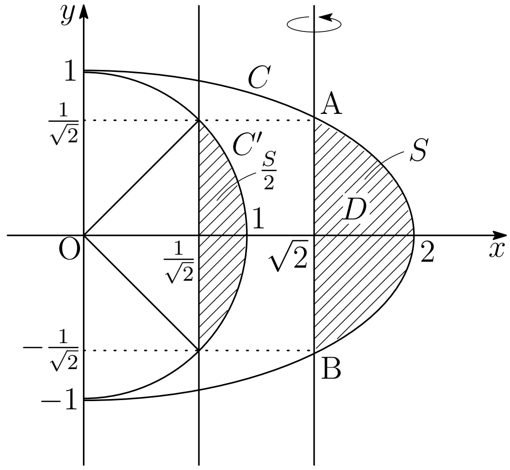
M の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right),\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\mathrm{M}(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{N}\left(\dfrac{x}{2},\ y\right)$ をとると，N は半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円周上にあり，ON の偏角は $t-\dfrac{\pi}{4}$ であるから，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq t-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{4}$ となる．点 M の描く軌跡は点 N の描く図形を $y$ 軸をもとに $x$ 軸方向に 2 倍に拡大したものである．



(4) 直線 AB が $y$ 軸に平行であるから，2 点 A，B の $x$ 座標は等しい．




$$2\cos t = 2\sin t$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して　$t = \dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，直線 AB は　$x = \sqrt{2}$

$C$ を $y$ 軸をもとに $x$ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ に縮小したものを $C'$ とすると，その方程式は

$$(2x)^2 + 4y^2 = 4 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + y^2 = 1 \ \ (x \geqq 0)$$

$D$ の面積を $S$ とすると，$C'$ と直線 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で囲まれた部分の面積により

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1^2\left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad S = \frac{\pi}{2} - 1$$

$C : x = 2\sqrt{1 - y^2}$ であることから

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x - \sqrt{2}\,)\,dy = S = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \cdots ①$$

ここで

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{2})^2 &= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \\ &= x^2 - 2 - 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ &= (2\sqrt{1 - y^2})^2 - 2 - 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}\,) \\ &= 2 - 4y^2 - 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}\,)\end{aligned}$$

したがって，求める体積 $V$ は，① を利用して

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x - \sqrt{2}\,)^2\,dy \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2 - 4y^2)\,dy - 2\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x - \sqrt{2}\,)\,dy \\ &= \frac{4}{6}(\sqrt{2}\,)^3 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \sqrt{2}\left(\frac{10}{3} - \pi\right)\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V = \sqrt{2}\pi\left(\frac{10}{3} - \pi\right)}$