平成 31 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　平成 31 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ k を正の実数とする．原点を O，曲線 $C: y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ と直線 $y = kx$ の交点を P，線分 OP の中点を Q とする．さらに，点 Q を通り y 軸と平行な直線と C の交点を R，点 Q を通り x 軸と平行な直線と C の交点を S とする．次に答えよ．

(1) 点 P の座標を k を用いて表せ．

(2) 点 P における曲線 C の接線と直線 RS は平行であることを示せ．

(3) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形の面積は k の値によらず一定になることを示せ．

(4) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を k を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とする．$f(x)$ と S_n を次のように定める．

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$

次に答えよ．

(1) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ．

(3) 数列 $\{S_n\}$ は発散することを示せ．ただし，自然数 k に対して，$k \leqq x$ のとき，$\sqrt{k^2+1} \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを用いてよい．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n)$ を求めよ．ただし，自然数 k に対して，$k-1 \leqq x \leqq k$ のとき，$\sqrt{x^2+1} \leqq \sqrt{k^2+1} \leqq \sqrt{(x+1)^2+1}$ が成り立つことを用いてよい．

3 a を正の実数とし，複素数平面上の 4 点 O(0)，A$(6+4i)$，B$(8-2i)$，C$(-2ai)$ を 4 頂点とする四角形 OABC を考える．四角形 OABC の各辺を 1 辺とする 4 つの正方形を四角形 OABC の外側に作る．正方形において，2 本の対角線の交点をその正方形の重心という．辺 OA を 1 辺とする正方形の重心を P，辺 AB を 1 辺とする正方形の重心を Q，辺 BC を 1 辺とする正方形の重心を R，辺 CO を 1 辺とする正方形の重心を S とする．次に答えよ．

(1) 原点を中心として，点 A を反時計回りに 90 度回転させて得られる点を表す複素数を求めよ．

(2) 点 P および点 Q を表す複素数をそれぞれ求めよ．また，点 R および点 S を表す複素数をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) 線分 QS の長さを a を用いて表せ．

(4) 線分 PR と線分 QS の長さの比を求めよ．

(5) どのような正の実数 a に対しても，2 直線 PR，QS は垂直であることを示せ．

4 箱 A と箱 B がある．はじめに，どちらの箱にも白玉 2 個と黒玉 1 個が入っている．次に答えよ．

(1) 箱 A から無作為に 1 個の玉を取り出し，色を確認し，箱 A に戻す．この試行を 3 回行うとき，白玉を 2 回，黒玉を 1 回取り出す確率を求めよ．

(2) 箱 A と箱 B から無作為に 1 個ずつ玉を同時に取り出し，箱 A から取り出した玉を箱 B に，箱 B から取り出した玉を箱 A に入れる．このとき，箱 A の中身が白玉 1 個と黒玉 2 個である確率 P_1，箱 A の中身が白玉 2 個と黒玉 1 個である確率 P_2，箱 A の中身が白玉 3 個である確率 P_3 をそれぞれ求めよ．

(3) (2) の試行を 2 回続けて行う．すなわち，(2) の試行を行い，箱の中身をそのままにして，(2) の試行をもう 1 回行う．このとき，1 回目で箱 A の中身が白玉 3 個になり，かつ 2 回目で箱 A の中身が白玉 2 個と黒玉 1 個になる確率を求めよ．

(4) (2) の試行を 2 回続けて行う．このとき，箱 A の中身が白玉 2 個と黒玉 1 個である確率を求めよ．

(5) (2) の試行を 2 回続けて行ったとき，箱 A の中身が白玉 2 個と黒玉 1 個であった．このとき，1 回目の試行の後で，箱 A の中身が白玉 2 個と黒玉 1 個である条件付き確率を求めよ．

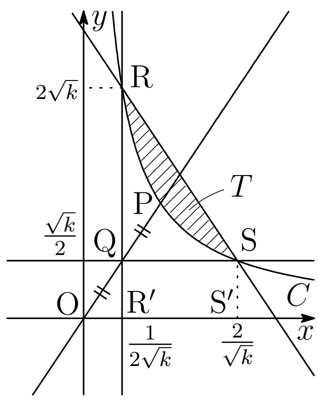
正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C : y=\dfrac{1}{x}$ と $y=kx$ から y を消去すると

$$\frac{1}{x}=kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2=\frac{1}{k} \quad x>0\ \text{に注意して} \quad x=\frac{1}{\sqrt{k}}$$

これを C の方程式に代入して　$y=\sqrt{k}$　よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k}}\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{x}$ を微分すると　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k}\right)$ における C の接線の傾きは

$$y'=-\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}=-k \quad \cdots ①$$

線分 OP の中点 Q は　$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ \dfrac{\sqrt{k}}{2}\right)$

C 上の点 R の x 座標が $\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$，点 S の y 座標が $\dfrac{\sqrt{k}}{2}$ であるから

$$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right), \quad \mathrm{S}\left(\frac{2}{\sqrt{k}},\ \frac{\sqrt{k}}{2}\right)$$

直線 RS の傾きは　$\dfrac{\dfrac{\sqrt{k}}{2}-2\sqrt{k}}{\dfrac{2}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{2\sqrt{k}}}=-k \quad \cdots ②$

①，② より，点 P における曲線 C の接線と直線 RS は平行である．

(3) 直線 RS と曲線 C で囲まれた図形の面積を T とする．2 点 R，S から x 軸にそれぞれ垂線 RR′，SS′ を下ろし，台形 RR′S′S の面積を利用すると

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{k}+\frac{\sqrt{k}}{2}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)-\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{k}}{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{k}}-\Big[\ \log x\ \Big]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{15}{8}-2\log 2 \end{aligned}$$

したがって，T は，k の値によらず一定である．

(4) 直線RSは点$\left(\dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right)$を通り，傾き$-k$の方程式であるから

$$y-2\sqrt{k}=-k\left(x-\frac{1}{2\sqrt{k}}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=-k\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)$$

台形RR′S′Sをx軸のまわりに1回転してできる立体の体積をV_1とすると

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{\pi}&=k^2\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)^2dx\\&=\frac{k^2}{3}\Big[\left(x-\frac{5}{2\sqrt{k}}\right)^3\Big]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{21}{8}\sqrt{k}\end{aligned}$$

曲線C，2直線RR′，SS′およびx軸で囲まれた図形をx軸のまわりに1回転してできる立体の体積をV_2とすると

$$\frac{V_2}{\pi}=\int_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\Big[-\frac{1}{x}\Big]_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}^{\frac{2}{\sqrt{k}}}=\frac{3}{2}\sqrt{k}$$

したがって，求める立体の体積をVとすると

$$V=V_1-V_2=\left(\frac{21}{8}\sqrt{k}-\frac{3}{2}\sqrt{k}\right)\pi=\boldsymbol{\frac{9}{8}\sqrt{k}\pi}$$

補足 台形RR′S′Sをx軸のまわりに1回転してできる立体は円錐台である．円錐台の上底の半径a，下底の半径b，高さhについて，その体積Vは

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^h\left(\frac{b-a}{h}x+a\right)^2dx=\int_0^h\left\{\left(\frac{b-a}{h}\right)^2x^2+\frac{2a(b-a)}{h}x+a^2\right\}dx\\&=\Big[\left(\frac{b-a}{h}\right)^2\frac{x^3}{3}+\frac{a(b-a)}{h}x^2+a^2x\Big]_0^h\\&=h\left\{\frac{1}{3}(b-a)^2+a(b-a)+a^2\right\}=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)\end{aligned}$$

上の円錐台の体積の公式に

$$a=\mathrm{RR'}=2\sqrt{k},\ b=\frac{\sqrt{k}}{2},\ h=\mathrm{R'S'}=\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{3}{2\sqrt{k}}$$

を代入すると

$$\frac{V_1}{\pi}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{k}}\left\{(2\sqrt{k})^2+2\sqrt{k}\cdot\frac{\sqrt{k}}{2}+\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2\right\}=\frac{21}{8}\sqrt{k}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ を微分すると

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

よって $\boldsymbol{\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

(2) (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int_1^{n+1} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \Big[\ \log f(x)\ \Big]_1^{n+1} \\ &= \log f(n+1) - \log f(1) \\ &= \boldsymbol{\log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) - \log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$

(3) $k \leqq x \leqq k+1$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\,dx \geqq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geqq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

上式および (2) の結果から

$$S_n \geqq \log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) - \log(1+\sqrt{2})$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \log(n+1+\sqrt{n^2+2n+2}) = \infty$ よって $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty}$

(4) $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\geqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &= \Big[\ \log f(x)\ \Big]_{n+1}^{2n+1} = \log\frac{f(2n+1)}{f(n+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\leqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\ &= \Big[\ \log f(x)\ \Big]_{n}^{2n} = \log\frac{f(2n)}{f(n)}\end{aligned}$$

したがって $\quad \log \dfrac{f(2n+1)}{f(n+1)} \leqq S_{2n} - S_n \leqq \log \dfrac{f(2n)}{f(n)}$

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f(2n+1)}{f(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1+\sqrt{4n^2+4n+2}}{n+1+\sqrt{n^2+2n+2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{1}{n}+\sqrt{4+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} = 2,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = 2$$

はさみうちの原理により $\quad \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \log 2$

別解 $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

自然数 k について $\quad \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}} < \dfrac{1}{k}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &< \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_{n}^{2n} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{n}^{2n} = \log 2, \\ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &> \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \geqq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int_{n+2}^{2n+2} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{n+2}^{2n+2} = \log \frac{2n+2}{n+2}\end{aligned}$$

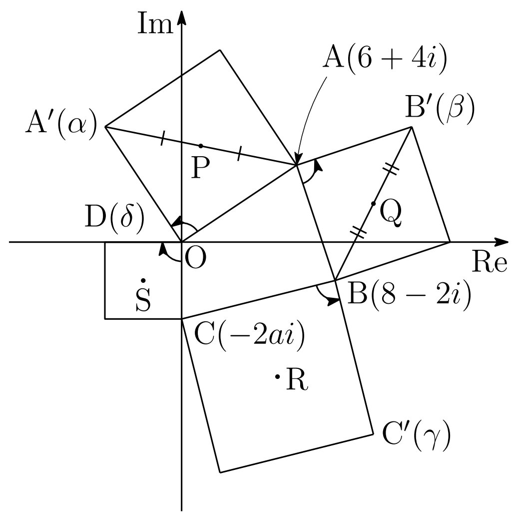
したがって $\quad \lim_{n\to\infty} \log \dfrac{2n+2}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \log \dfrac{2+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{2}{n}} = \log 2$

上の諸式から，はさみうちの原理により $\quad \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = \log 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 O を中心に点 A を $+90°$ 回転させた点を $\mathrm{A}'(\alpha)$ とすると

$$\alpha = (6+4i)i = \boldsymbol{-4+6i}$$

(2) 点 P は線分 AA' の中点であるから



$$\frac{(6+4i)+(-4+6i)}{2} = 1+5i$$

よって　　$\mathbf{P(1+5}\boldsymbol{i}\mathbf{)}$

点 A を中心に点 B を $+90°$ 回転させた点を $\mathrm{B}'(\beta)$ とすると

$$\frac{\beta-(6+4i)}{(8-2i)-(6+4i)} = i$$

これを解いて　$\beta = 12+6i$

点 Q は線分 BB' の中点であるから

$$\frac{(8-2i)+(12+6i)}{2} = 10+2i \quad \text{よって} \quad \mathbf{Q(10+2}\boldsymbol{i}\mathbf{)}$$

点 B を中心に点 C を $+90°$ 回転させた点を $\mathrm{C}'(\gamma)$ とすると

$$\frac{\gamma-(8-2i)}{-2ai-(8-2i)} = i \quad \text{これを解いて} \quad \gamma = 2a+6-10i$$

点 R は線分 CC' の中点であるから

$$\frac{-2ai+(2a+6-10i)}{2} = a+3-(a+5)i$$

よって　　$\mathbf{R}(\boldsymbol{a}+\mathbf{3}-(\boldsymbol{a}+\mathbf{5})\boldsymbol{i})$

原点 O を中心に点 C を $-90°$ 回転させた点を $\mathrm{D}(\delta)$ とすると

$$\delta = (-2ai)(-i) = -2a$$

点 S は線分 CD の中点であるから

$$\frac{-2ai+(-2a)}{2} = -a-ai \quad \text{よって} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{-a-ai})$$

(3) 4 点 P，Q，R，S の座標をそれぞれ $p,\ q,\ r,\ s$ とすると

$$s-q = (-a-ai)-(10+2i) = -(a+10)-(a+2)i$$

よって　$\mathrm{QS} = |s-q| = \sqrt{(a+10)^2+(a+2)^2} = \boldsymbol{\sqrt{2a^2+24a+104}}$

(4) (2) の結果から　$r-p = a+3-(a+5)i-(1+5i) = a+2-(a+10)i$

ゆえに　$\mathrm{PR} = |r-p| = \sqrt{(a+2)^2+(a+10)^2}$　　よって　$\mathbf{PR : QS = 1 : 1}$

(5) $\dfrac{s-q}{r-p}=\dfrac{-(a+10)-(a+2)i}{a+3-(a+5)i-(1+5i)}=\dfrac{-(a+10)-(a+2)i}{a+2-(a+10)i}=-i$

これが純虚数であるから，2 直線 PR，QS は垂直である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 箱 A から玉を 1 回取り出すとき，白玉である確率は $\dfrac{2}{3}$

よって，3 回取り出すとき，白玉をちょうど 2 回取り出す確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)=\mathbf{\frac{4}{9}} $$

(2) P_1 は箱 A から白玉，箱 B から黒玉を取り出す確率であるから

$$ P_1=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}} $$

P_2 は箱 A，箱 B から同色の玉を取り出す確率であるから

$$ P_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{5}{9}} $$

P_3 は箱 A から黒玉，箱 B から白玉を取り出す確率であるから

$$ P_3=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}} $$

補足 $P_2=1-(P_1+P_3)=1-\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{5}{9}$

(3) 1 回目の試行後，箱 A の中身が白玉 3 個であるとき，箱 B の中身は白玉 1 個，黒玉 2 個である．さらに，2 回目の試行で箱 A から白玉，箱 B から黒玉を取り出す確率であるから

$$ P_3\times 1\times\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{4}{27}} $$

(4) 1 回目の試行後，箱 A の中身が白玉 1 個，黒玉 2 個であるとき，箱 B の中身は白玉 3 個である．さらに，2 回目の試行で箱 A から黒玉，箱 B から白玉を取り出す確率は

$$ P_1\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{4}{27} $$

1 回目，2 回目の試行後，ともに箱 A の中身が白玉 2 個，黒玉 1 個である確率は

$$ {P_2}^2=\frac{25}{81} $$

これと (3) の結果から，求める確率を P とすると　$P=\dfrac{4}{27}+\dfrac{4}{27}+\dfrac{25}{81}=\mathbf{\dfrac{49}{81}}$

(5) よって，求める条件つき確率は　$\dfrac{{P_2}^2}{P}=\dfrac{25}{81}\cdot\dfrac{81}{49}=\mathbf{\dfrac{25}{49}}$