平成30年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　平成30年3月12日

- 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Oを原点とする座標空間において，2点 $\mathrm{A}(5, -2,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 2,\ 1)$ を直径の両端とする球面を S とする．また，S と x 軸との交点のうち，x 座標が小さい方の点をCとする．さらに，3点A，B，Cの定める平面を α とする．次に答えよ．

(1) 球面 S の中心Pの座標と半径 r を求めよ．

(2) 点Cの座標を求めよ．

(3) 平面 α に垂直で，長さが $\sqrt{21}$ のベクトル $\vec{n}$ をすべて求めよ．

(4) 点 $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ q)$ を通り，平面 α に垂直な直線を l とする．また，l と α の交点をHとする．

(a) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|$ を，q を用いて表せ．

(b) 点Qが平面 α 上にないとき，四面体QABCの体積を V とする．$V = 4$ をみたす q の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は $a_1 = 1$，$b_1 = 0$ および

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_n \cos\frac{x}{2} - b_n \sin\frac{x}{2}\right)\right\} = e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_{n+1}\cos\frac{x}{2} - b_{n+1}\sin\frac{x}{2}\right)$$

$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたしている．次に答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(3) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を推測し，その結果が正しいことを数学的帰納法により証明せよ．

(4) 不定積分

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = 5\sqrt{x-4}$ について，次に答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = x$ を解け．

(2) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．ただし $x > 4$ とする．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(4) $t > 4$ とする．連立不等式 $0 \leqq y \leqq f(x)$ の表す領域を A とする．連立不等式 $0 \leqq x \leqq t$，$0 \leqq y \leqq t$ の表す領域を B とする．このとき，A と B の共通部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $S(t)$ に対して，t が $t > 4$ の範囲で変化するとき，$R(t) = \dfrac{S(t)}{t^2}$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ について，次に答えよ．

(1) 不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$，$J = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$，$x = 0$，$x = \dfrac{\pi}{3}$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) (2) の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

正解

$\boxed{1}$ (1) 2 点 A$(5, -2,\ 1)$，B$(3,\ 2,\ 1)$ の中点は

$$\left(\frac{5+3}{2},\ \frac{-2+2}{2},\ \frac{1+1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{P(4,\ 0,\ 1)}$$

よって　$r = \mathrm{PB} = \sqrt{(3-4)^2+(2-0)^2+(1-1)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

(2) (1) の結果から　　$S : (x-4)^2+y^2+(z-1)^2 = 5$

S と x 軸との交点は，S の方程式に $y = z = 0$ を代入して

$$(x-4)^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad x = 4 \pm 2$$

この x 座標が小さい方の点が C であるから　C$\mathbf{(2,\ 0,\ 0)}$

(3) A$(5, -2,\ 1)$，B$(3,\ 2,\ 1)$，C$(2,\ 0,\ 0)$ であるから

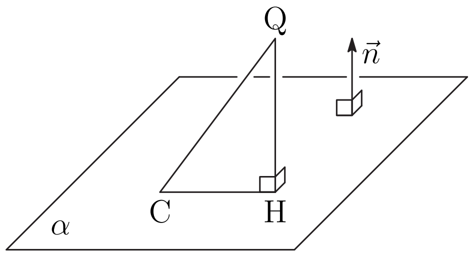
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 4,\ 0), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3,\ 2, -1)$$

これらに垂直なベクトルの 1 つは　$(2,\ 1, -4)$

このベクトルの大きさは　$\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$

よって　　$\boldsymbol{\vec{n} = \pm(2,\ 1, -4)}$

(4) (a) $\overrightarrow{\mathrm{QH}} = k\vec{n}$ より (k は実数)



$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{CQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QH}} = \overrightarrow{\mathrm{CQ}} + k\vec{n}$$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = 0$ より

$$\vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{CQ}} + k\vec{n}) = 0$$

したがって　$k|\vec{n}|^2 = -\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$　ゆえに　$k|\vec{n}| = -\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}}{|\vec{n}|}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}| = |k||\vec{n}|$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}| = \dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|}{|\vec{n}|}$　　$\cdots(*)$

C$(2,\ 0,\ 0)$，Q$(0,\ 0,\ q)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = (-2,\ 0,\ q)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}| = \frac{|2\cdot(-2) - 4q|}{\sqrt{21}} = \boldsymbol{\frac{4|q+1|}{\sqrt{21}}}$$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\ 2,-1)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2\sqrt{5},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{14},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=14$$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20\cdot 14-14^2}=\sqrt{21}$$

四面体 QABC の体積 V は　　$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|$

これに $V=4$ および以上の結果を代入すると

$$4=\frac{1}{3}\sqrt{21}\cdot\frac{4|q+1|}{\sqrt{21}}\quad \text{ゆえに}\quad |q+1|=3\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{q=2,-4}$$

解説 $(*)$ で示した，Q から平面 α に下ろした垂線の長さに C を用いているが，実際 α 上の点であればどこでもよい．たとえば

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\quad \text{ゆえに}\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

したがって，α 上の点 A についても　　$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|}{|\vec{n}|}$　　$\cdots(**)$

2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ が平行でないとき，ベクトル

$$(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する．このベクトルを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**ベクトル積**といい，

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)}$$

これから，$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ が成り立ち，その大きさについて

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\end{aligned}$$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S，四面体 ABCQ の体積を V とすると，上式および $(**)$ より

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=2S,$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{q}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}=\frac{|\vec{q}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|}{2S},\quad V=\frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\frac{1}{6}|\vec{q}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$$

本題において，$\vec{q}=(-5,\ 2,\ q-1)$，$\vec{a}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\vec{b}=(-3,\ 2,-1)$ より

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-4,-2,\ 8),\quad V=\frac{1}{6}|\vec{q}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|=\frac{1}{6}|8q+8|=\frac{4}{3}|q+1|$$

注意 ベクトル積 (外積) は高校数学ではないので検算として使用すること．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\dfrac{d}{dx}\left\{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_n\cos\dfrac{x}{2}-b_n\sin\dfrac{x}{2}\right)\right\}=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_{n+1}\cos\dfrac{x}{2}-b_{n+1}\sin\dfrac{x}{2}\right)\quad\cdots(*)$

与えられた関係式 $(*)$ の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}(*)\text{の左辺}&=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_n\cos\frac{x}{2}-b_n\sin\frac{x}{2}\right)\\&\qquad+e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(-\frac{1}{2}a_n\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}b_n\cos\frac{x}{2}\right)\\&=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n\right)\cos\frac{x}{2}-\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\right)\sin\frac{x}{2}\right\}\end{aligned}$$

上式と $(*)$ の右辺を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n-\frac{1}{2}b_n,\quad b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n}$$

(2) $a_1=1,\ b_1=0$ から (1) で得られた漸化式に順次 $n=1,2,3$ を代入すると

$$\boldsymbol{a_2=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad a_3=\frac{1}{2},\qquad a_4=0,}$$
$$\boldsymbol{b_2=\frac{1}{2},\qquad b_3=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad b_4=1}$$

(3) (2) の結果から，次を推測する．

$$\text{(A)}\quad a_n=\cos\frac{n-1}{6}\pi,\quad b_n=\sin\frac{n-1}{6}\pi$$

［1］ $n=1$ のとき　$a_1=\cos 0=1,\quad b_1=\sin 0=0$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，(1) の結果により

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k-1}{6}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{k-1}{6}\pi\\&=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{k-1}{6}\pi-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{k-1}{6}\pi\\&=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k-1}{6}\pi\right)=\cos\frac{k\pi}{6},\\b_{k+1}&=\frac{1}{2}\cos\frac{k-1}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{k-1}{6}\pi\\&=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{k-1}{6}\pi+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{k-1}{6}\pi\\&=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k-1}{6}\pi\right)=\sin\frac{k\pi}{6}\end{aligned}$$

［1］，［2］の結果から，すべての自然数 n に対して，(A) は成立する．

(4) $(*)$ を積分することにより

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_{n+1}\cos\frac{x}{2}-b_{n+1}\sin\frac{x}{2}\right)dx=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(a_n\cos\frac{x}{2}-b_n\sin\frac{x}{2}\right)+C$$

これに $n=12$ を代入すると，$a_{13}=1$，$b_{13}=0$ に注意して

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx&=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(\cos\frac{11}{6}\pi\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{11}{6}\pi\sin\frac{x}{2}\right)+C\\&=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{11}{6}\pi+\frac{x}{2}\right)+C\\&=\boldsymbol{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+C}\quad(\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})\end{aligned}$$

解説 不定積分 $\displaystyle\int e^{\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+C$ は，複素数 $\alpha\neq 0$ について成立する．

$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$ にオイラーの公式 (次のページで証明)

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

を適用すると，$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}=\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ より

$$\int e^{\alpha x}\,dx=e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{\alpha x}+C$$

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}e^{\frac{x}{2}i}\,dx=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}e^{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)i}+C$$

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)\,dx=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\left\{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}+C$$

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx+i\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+ie^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+C$$

上式の実部と虚部を比較することにより，次の積分を得る．

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+C,$$
$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\frac{x}{2}\,dx=e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+C$$

逆に，次式も成立する．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left\{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\frac{x}{2}\right\} &= e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right),\\
\frac{d}{dx}\left\{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\frac{x}{2}\right\} &= e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right),\\
\frac{d^n}{dx^n}\left\{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\frac{x}{2}\right\} &= e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{n\pi}{6}\right),\\
\frac{d^n}{dx^n}\left\{e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\frac{x}{2}\right\} &= e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{n\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

一般に，$\alpha = a + bi$，$r = |\alpha|$，$\theta = \arg\alpha$ とすると

$$\alpha = a + bi = r\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}i\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\alpha x} &= \alpha e^{\alpha x}\\
\frac{d}{dx}e^{ax+bxi} &= re^{i\theta}e^{ax+bxi}\\
\frac{d}{dx}\left\{e^{ax}e^{bxi}\right\} &= re^{ax}e^{(bx+\theta)i}\\
\frac{d}{dx}\{e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\} &= re^{ax}\{\cos(bx+\theta) + i\sin(bx+\theta)\}
\end{aligned}$$

上式の実部と虚部を比較すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left\{e^{ax}\cos bx\right\} &= re^{ax}\cos(bx+\theta),\\
\frac{d}{dx}\left\{e^{ax}\sin bx\right\} &= re^{ax}\sin(bx+\theta)
\end{aligned}$$

上の 2 式から次の積分を得る．

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos bx\,dx &= \frac{1}{r}e^{ax}\cos(bx-\theta) + C,\\
\int e^{ax}\sin bx\,dx &= \frac{1}{r}e^{ax}\sin(bx-\theta) + C
\end{aligned}$$

本題において，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b = \dfrac{1}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ であるから，$r = 1$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$\int e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\frac{x}{2}\,dx = e^{\frac{\sqrt{3}x}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + C$$

テイラー展開

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能 (C^∞級) な関数とし，$k \geqq 1$ とする．

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt &= -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt \\ &= -\left[\ \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\ \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{1}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ が最大値，最小値をもつとき，それらをそれぞれ M，m とすると，$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{2}$$

を満たす．(2) を (1) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{3}$$

(3) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．

とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \tag{4}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin’s expansion) という．

オイラーの公式

(3) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

をテイラー級数 (Taylor series) という．同様に，(4) から得られる級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad \cdots (*)$$

をマクローリン級数 (Maclaurin's series) という．

- $f(x) = e^x$ のとき，$f^{(n)}(x) = e^x$ より $f^{(n)}(0) = 1$
- $f(x) = \cos x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \cos\dfrac{n\pi}{2}$
- $f(x) = \sin x$ のとき，$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ より $f^{(n)}(0) = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

これらの結果を (*) に代入すると

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

上の第 1 式から $\qquad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

したがって

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=5\sqrt{x-4}$ について，$f(x)=x$ より

$$5\sqrt{x-4}=x \quad \text{両辺を平方して} \quad 25(x-4)=x^2$$

整理すると　$x^2-25x+100=0$　ゆえに　$(x-5)(x-20)=0$

$x \geqq 4$ に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{x=5,\ 20}$

(2) $f(x)=5(x-4)^{\frac{1}{2}}$ より $(x>4)$

$$f'(x)=\frac{5}{2}(x-4)^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{5}{2\sqrt{x-4}}}$$
$$f''(x)=-\frac{5}{4}(x-4)^{-\frac{3}{2}}=\boldsymbol{-\frac{5}{4(x-4)^{\frac{3}{2}}}}$$

(3) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int 5(x-4)^{\frac{1}{2}}\,dx=\boldsymbol{\frac{10}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}+C}$　**(C は積分定数)**

(4) (i) $4<t<5,\ 20<t$ のとき

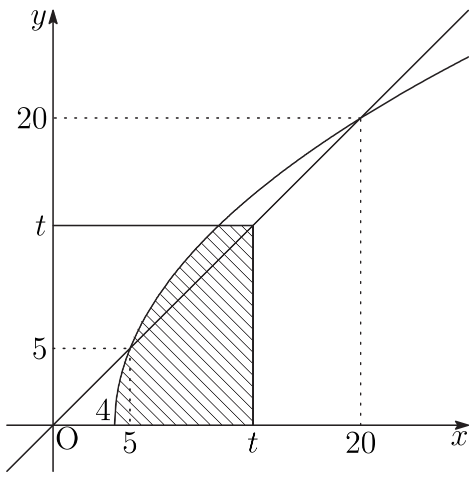
$$S(t)=\int_4^t f(x)\,dx=\left[\ \frac{10}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\ \right]_4^t=\boldsymbol{\frac{10}{3}(t-4)^{\frac{3}{2}}}$$

(ii) $5 \leqq t \leqq 20$ のとき,

$$y=5\sqrt{x-4}$$

とおくと

$$x=\left(\frac{y}{5}\right)^2+4 \quad (y \geqq 0)$$



右の図から，$S(t)$ の表す領域は，区間 $0 \leqq y \leqq t$ において，直線 $x=t$ および曲線 $x=\left(\dfrac{y}{5}\right)^2+4$ で囲まれた部分である.

$$S(t)=\int_0^t (t-x)\,dy=\int_0^t \left(t-\frac{y^2}{25}-4\right)dy$$
$$=\left[\ (t-4)y-\frac{y^3}{75}\ \right]_0^t=(t-4)t-\frac{t^3}{75}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{t^3}{75}+t^2-4t}$$

(5) (i) $4 < t < 5,\ 20 < t$ のとき

$$R(t) = \frac{S(t)}{t^2} = \frac{10}{3}\cdot\frac{(t-4)^{\frac{3}{2}}}{t^2},$$

$$R'(t) = \frac{10}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}(t-4)^{\frac{1}{2}}t^2 - (t-4)^{\frac{3}{2}}\cdot 2t}{t^4} = \frac{5(16-t)\sqrt{t-4}}{3t^3}$$

$4 < t < 5$ において，$R'(t) > 0$ より，$R(t)$ は単調増加.

$20 < t$ において，$R'(t) < 0$ より，$R(t)$ は単調減少.

したがって，これらの開区間において，最大値をとらない.

(ii) $5 \leqq t \leqq 20$ のとき

$$R(t) = \frac{S(t)}{t^2} = \frac{1}{t^2}\left(-\frac{t^3}{75} + t^2 - 4t\right) = 1 - \left(\frac{t}{75} + \frac{4}{t}\right)$$

$\dfrac{t}{75} > 0,\ \dfrac{4}{t} > 0$ であるから相加・相乗平均の大小関係により

$$\frac{t}{75} + \frac{4}{t} \geqq 2\sqrt{\frac{t}{75}\cdot\frac{4}{t}} = \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$$

上式において等号が成立するのは

$$\frac{t}{75} = \frac{4}{t} \quad \text{すなわち} \quad t = 10\sqrt{3}$$

したがって　　$R(t) \leqq 1 - \dfrac{4\sqrt{3}}{15}$

(i)，(ii) より，$R(t)$ は，$t = 10\sqrt{3}$ のとき最大値 $\mathbf{1 - \dfrac{4\sqrt{3}}{15}}$ をとる.

$\boxed{4}$ (1) $I=\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \boldsymbol{\tan x + C}$ **(C は積分定数)**

この結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^3 x}\,dx = \int (\sin x)'\cdot\frac{1}{\cos^3 x}\,dx \\
&= \sin x\cdot\frac{1}{\cos^3 x} - \int \sin x\cdot\frac{3\sin x}{\cos^4 x}\,dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^3 x} + 3\int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^4 x}\,dx = \frac{\sin x}{\cos^3 x} + 3I - 3J
\end{aligned}
$$

$$3J = 2I + \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

よって　　$J = \dfrac{2}{3}I + \dfrac{\sin x}{3\cos^3 x} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\tan x + \dfrac{\sin x}{3\cos^3 x} + C}$

(2) 求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \left[\ \tan x - \frac{1}{\cos x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3}-1}
\end{aligned}
$$

(3) 求める立体の体積 V は

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)^2(1-\sin x)^2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2-\cos^2 x - 2\sin x}{\cos^4 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}\right)dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx \\
&= 2\left[\ \frac{2}{3}\tan x + \frac{\sin x}{3\cos^3 x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\ \tan x\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2\left[\ \frac{1}{3\cos^3 x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \left[\ \frac{1}{3}\tan x + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin x - 1}{\cos^3 x}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{3} - \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{V = \left(3\sqrt{3} - \dfrac{14}{3}\right)\pi}$