平成 30 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　平成 30 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 a を正の実数とする．円 $C : x^2 + y^2 = 1$ と曲線 $D : y = ax^2 - 1$ について，次に答えよ．

(1) a の値によらず，円 C と曲線 D の両方がつねに通る点の座標を求めよ．

(2) 円 C と曲線 D が (1) で求めた点以外で交点をもつとき，a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，(1) で求めた点以外の円 C と曲線 D の交点の座標を a を用いて表せ．

(4) (3) で求めた交点を通り，x 軸と平行な直線を ℓ とする．直線 ℓ と曲線 D で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ．

(5) (4) で求めた立体の体積 V の最大値を求めよ．また，そのときの a の値を求めよ．

2 L を正の定数とする．3 以上の整数 n に対して，辺の長さの和が L である正 n 角形を P_n とし，P_n の面積を $S(n)$ とする．次に答えよ．

(1) P_n の外接円の中心から各辺に下ろした垂線の長さを h とする．h を L と n を用いて表せ．

(2) $S(n)$ を L と n を用いて表せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，関数 $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ が単調増加であることを示せ．

(4) $S(n)$ と $S(n+1)$ の大小を比較せよ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n)$ を L を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面 α 上の $\triangle$OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = t$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．また，$\triangle$OAB の面積を S とする．次に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 - 4\sqrt{3}S$ を t，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて表せ．

(2) t を固定したとき，(1) で求めた式を $f(\theta)$ とする．$f(\theta)$ の最小値を t を用いて表せ．また，その最小値をとるときの θ の値を求めよ．

設問 (3)，(4) では，点 P が平面 α 上を動くものとし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{x}$ とする．

(3) t および θ を固定したとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ の最小値を t，$\cos\theta$ を用いて表せ．また，その最小値をとるときの $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) t，θ および $\vec{x}$ によらず，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 \geqq \dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$ が成り立つことを示せ．また，この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 人工知能ベンチャータウンにあるA社とB社は,「はい」か「いいえ」で答えられる質問に回答する知能ロボットを開発した．質問に対して，A社製のロボットは，$\frac{4}{5}$の確率で正しい答えを返し，$\frac{1}{5}$の確率で間違った答えを返す．B社製のロボットは，$\frac{1}{10}$の確率で正しい答えを返し，$\frac{9}{10}$の確率で間違った答えを返す．A社製のロボットが3体，B社製のロボットが3体，計6体のロボットがある．これらのロボットは外見では区別することができない．

ベンチャータウンの入口に，二股の分かれ道があり，一方の道はA社へ，もう一方の道はB社へ続いている．この入口に，6体の中から無作為に選ばれた1体のロボットが案内役として立っている．次に答えよ．

(1) 案内役ロボットに「あなたはA社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」である確率を求めよ．

(2) 案内役ロボットに「あなたはA社製のロボットですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，このロボットがA社製のロボットである確率を求めよ．

(3) 案内役ロボットに，無作為に選んだ一方の道を指しながら「この道はあなたを作った会社へ続く道ですか？」と質問して，答えが「はい」であったとき，指した道がA社へ続く道である確率を求めよ．

(4) 案内役ロボットが，(2)，(3)のどちらの質問に対しても「はい」と答えたとき，指した道がA社へ続く道である確率を求めよ．

(5) 残りの5体のロボットの中から無作為に選ばれた1体のロボットが入口にやってきた．これら2体のロボットに「あなたたちは同じ会社製のロボットですか？」と質問したところ，案内役ロボットは「はい」と答え，あとから来たロボットは「いいえ」と答えた．このとき，2体ともA社製のロボットである確率を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $D: y=ax^2-1$ が a の値によらず通る点は　$(0,-1)$

$C: x^2+y^2=1$ もこの点を通るから，求める点は　$\mathbf{(0,-1)}$

(2) C と D の方程式から x を消去すると

$$y=a(1-y^2)-1 \quad \text{整理すると} \quad a(y^2-1)+y+1=0$$

ゆえに　$(y+1)(ay-a+1)$　これを解いて　$y=-1,\ \dfrac{a-1}{a}$　$\cdots$①

共有点の y 座標に注意して　$-1<\dfrac{a-1}{a}\leqq 1$　よって　$\boldsymbol{a>\dfrac{1}{2}}$

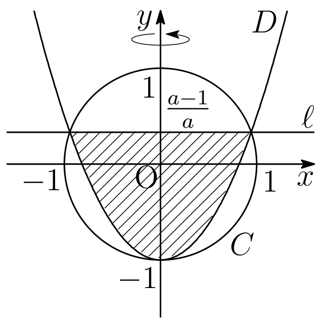
(3) 点 $(0,-1)$ 以外の C と D の共有点の y 座標は，① より　$y=\dfrac{a-1}{a}$

これを D の方程式に代入して

$$\frac{a-1}{a}=ax^2-1 \quad \text{ゆえに} \quad x=\pm\frac{\sqrt{2a-1}}{a}$$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{\sqrt{2a-1}}{a},\ \dfrac{a-1}{a}\right)}$

(4) D と ℓ で囲まれた部分は右の図の斜線部分で，y 軸に関して対称である．D の方程式から



$$x^2=\frac{y+1}{a}$$

よって，求める回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}} x^2\,dy=\frac{\pi}{a}\int_{-1}^{\frac{a-1}{a}}(y+1)\,dy$$

$$=\frac{\pi}{2a}\Big[\,(y+1)^2\,\Big]_{-1}^{\frac{a-1}{a}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2a^3}(2a-1)^2}$$

(5) (4) の結果から，$f(a)=\dfrac{\pi}{2}a^{-3}(2a-1)^2$ とおくと $\left(a>\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\pi}{2}\{-3a^{-4}(2a-1)^2+a^{-3}\cdot 4(2a-1)\} \\ &= \frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)\{-3(2a-1)+4a\} = -\frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)(2a-3) \end{aligned}$$

したがって，$f(a)$ の増減表は次のようになる．

a	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，V は $\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2}}$ のとき，最大値 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{16}{27}\pi}$

解説 (1) で示したように，a の値によらず，点 $(0,-1)$ は C と D の共有点である．

$C: x^2+y^2=1$ より　$(*)\begin{cases} 2x+2yy'=0, \\ 2+2(y')^2+2yy''=0 \end{cases}$

$D: y=ax^2-1$ より　$(**)\begin{cases} y'=2ax, \\ y''=2a \end{cases}$

これらに共有点 $(0,-1)$ の座標を代入することにより

$$(*) \text{ から } y'=0,\ y''=1, \qquad (**) \text{ から } y'=0,\ y''=2a$$

したがって，共有点 $(0,-1)$ において，C と D の第 1 次導関数の値が等しいから，C と D は，$(0,-1)$ において **1 次の接触**をなす (共通接線をもつ)．

とくに，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，C と D の第 1 次・第 2 次導関数の値がともに等しいから，C と D は，$(0,-1)$ において **2 次の接触**をなす．このとき，C と D の点 $(0,-1)$ における接触円 (曲率円) が一致する [1]．

なお，y が x の関数であるとき，その曲率 κ は次式で与えられる [2]．また，曲率半径 R は曲率の逆数である

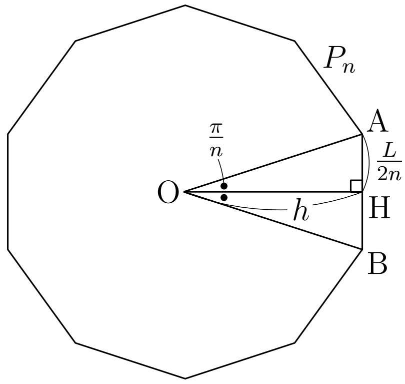
$$\kappa=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R=\frac{1}{\kappa}$$

$y=ax^2-1$ の点 $(0,-1)$ における曲率および曲率半径は　$\kappa=2a,\ \ R=\dfrac{1}{2a}$

とくに，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$R=1$ となり，C の半径と一致する．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2017.pdf (p.10 を参照)
[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf (p.8 を参照)

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 正 n 角形 P_n の 1 つの辺 AB に P_n の外心 O から垂線 OH を引くと



$$\angle\mathrm{AOH} = \frac{\pi}{n},\quad \mathrm{OH} = h,\quad \mathrm{AH} = \frac{L}{2n}$$

したがって　$h\tan\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{L}{2n}$

よって　$\boldsymbol{h = \dfrac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}}$

(2) $\triangle$OAB の面積について，(1) の結果を利用すると

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{n}\cdot\frac{L}{2n\tan\frac{\pi}{n}}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{S(n) = \frac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}}$$

(3) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ を微分すると $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{2x - 2\sin x\cos x}{2x^2\cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$$

ここで，$g(x) = 2x - \sin 2x$ とおくと $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$g(0) = 0,\quad g'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(x) > 0$，すなわち，$f'(x) > 0$

よって，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加である．

(4) (2) の結果から　$S(n) = \dfrac{L^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}} = \dfrac{L^2}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)}$　$\cdots(*)$

$\dfrac{\pi}{n+1} < \dfrac{\pi}{n}$ であるから，(3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

よって，$(*)$ より　$\boldsymbol{S(n) < S(n+1)}$

(5) $x = \dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{x\to+0}\frac{L^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{f(x)}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\tan x}{x} = 1$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \boldsymbol{\frac{L^2}{4\pi}}$

補足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ は円 (半径 R) に収束するから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \pi R^2 = \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \frac{L^2}{4\pi}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=t$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{a}|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=2\cdot1^2+2t^2-2\cdot1\cdot t\cos\theta=2+2t^2-2t\cos\theta,\end{aligned}$$

$$4\sqrt{3}S=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=2\sqrt{3}t\sin\theta$$

よって $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-4\sqrt{3}S$

$$\begin{aligned}&=2+2t^2-2t\cos\theta-2\sqrt{3}t\sin\theta\\&=\boldsymbol{2t^2+2-2t(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\quad f(\theta)=2t^2+2-4t\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0<\theta<\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$ であるから，$f(\theta)$ は

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2(t-1)^2}$

(3)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2&=|\vec{x}|^2+|\vec{x}-\vec{a}|^2+|\vec{x}-\vec{b}|^2\\&=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\\&=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)\\&=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)}$

(4) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}S\\&=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(1-t\cos\theta+t^2)-\frac{2\sqrt{3}}{3}t\sin\theta\\&=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(t^2-2t+1)+\frac{2}{3}t(2-\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)\\&=3\left|\vec{x}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2+\frac{2}{3}(t-1)^2+\frac{4}{3}t\left\{1-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right\}\geqq0\end{aligned}$$

よって $\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2\geqq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}S$

等号が成立する場合は $\quad \boldsymbol{\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}),\ t=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 質問に対してA社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ $a,\ \overline{a}$ とし，同様にB社製ロボットが正しい答え，間違った答えを返す確率をそれぞれ $b,\ \overline{b}$ とする $\left(a = \frac{8}{10},\ \overline{a} = \frac{2}{10},\ b = \frac{1}{10},\ \overline{b} = \frac{9}{10}\right)$.

(1) 案内役ロボットがA社製，B社製である確率は，ともに $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
案内役ロボットが「はい」と答える確率は

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\overline{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{10} + \frac{9}{10}\right) = \mathbf{\frac{17}{20}}$$

(2) 案内役ロボットが「はい」と答えたとき，ロボットがA社製である確率は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\overline{b}} = \frac{a}{a + \overline{b}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{8}{10} + \frac{9}{10}} = \mathbf{\frac{8}{17}}$$

(3) 案内役ロボットがどちらか，指した道がどちらであるかにより，次の4つの場合がある．

(i) A社製ロボットにA社への道を指した
(ii) B社製ロボットにA社への道を指した
(iii) A社製ロボットにB社への道を指した
(iv) B社製ロボットにB社への道を指した

これらの確率は，すべて $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

したがって，案内ロボットが「はい」と答える確率は

(i) のとき $\dfrac{1}{4}a$,　(ii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}$,　(iii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{a}$,　(iv) のとき $\dfrac{1}{4}b$

よって，指した道がA社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\overline{b}}{\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\overline{b} + \frac{1}{4}\overline{a} + \frac{1}{4}b} = \frac{a + \overline{b}}{(a + \overline{a}) + (b + \overline{b})} = \frac{\frac{8}{10} + \frac{9}{10}}{1 + 1} = \mathbf{\frac{17}{20}}$$

(4) 前問と同様に，(2)，(3) どちらの質問に対しても「はい」と答える確率は

(i) のとき $\dfrac{1}{4}a^2$,　(ii) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}^2$,　(iii) のとき $\dfrac{1}{4}a\overline{a}$,　(iv) のとき $\dfrac{1}{4}\overline{b}b$

よって，指した道がA社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\overline{b}^2}{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\overline{b}^2 + \frac{1}{4}a\overline{a} + \frac{1}{4}\overline{b}b} = \frac{a^2 + \overline{b}^2}{a(a + \overline{a}) + \overline{b}(b + \overline{b})} = \frac{a^2 + \overline{b}^2}{a + \overline{b}}$$

$$= \frac{\left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{8}{10} + \frac{9}{10}} = \frac{8^2 + 9^2}{10(8 + 9)} = \mathbf{\frac{29}{34}}$$

(5) 案内役ロボットとあとから来たロボットの組合せとその確率は，次のようになる．

① 案内役がA社製，後からきたのもA社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

② 案内役がA社製，後からきたのがB社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{10}$

③ 案内役がB社製，後からきたのがA社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{10}$

④ 案内役がB社製，後からきたのもB社製のとき $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

案内役ロボットは「はい」，あとから来たロボットが「いいえ」と答える確率は

①のとき $\dfrac{1}{5}a\overline{a}$,　②のとき $\dfrac{3}{10}\overline{a}b$,　③のとき $\dfrac{3}{10}\overline{b}a$,　④のとき $\dfrac{1}{5}b\overline{b}$

したがって，2体ともA社製のロボットである確率は

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{5}a\overline{a}}{\frac{1}{5}a\overline{a}+\frac{3}{10}\overline{a}b+\frac{3}{10}\overline{b}a+\frac{1}{5}b\overline{b}} &= \frac{2a\overline{a}}{2a\overline{a}+3\overline{a}b+3\overline{b}a+2b\overline{b}}\\ &= \frac{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}}{2\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}\\ &= \frac{2\cdot8\cdot2}{2\cdot8\cdot2+3\cdot2\cdot1+3\cdot9\cdot8+2\cdot1\cdot9}\\ &= \frac{32}{272}=\boldsymbol{\frac{2}{17}}\end{aligned}$$