

平成30年度 九州工業大学2次試験前期日程(数学問題)

工学部・情報工学部 平成30年2月25日

数I・II・III・A・B(120分)

問題 1 2 3 4

1 a を正の実数とする. 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と曲線 $D: y = ax^2 - 1$ について, 次に答えよ.

- (1) a の値によらず, 円 C と曲線 D の両方がつねに通る点の座標を求めよ.
- (2) 円 C と曲線 D が (1) で求めた点以外で交点をもつとき, a の範囲を求めよ.
- (3) a が (2) で求めた範囲にあるとき, (1) で求めた点以外の円 C と曲線 D の交点の座標を a を用いて表せ.
- (4) (3) で求めた交点を通り, x 軸と平行な直線を l とする. 直線 l と曲線 D で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ.
- (5) (4) で求めた立体の体積 V の最大値を求めよ. また, そのときの a の値を求めよ.

2 L を正の定数とする. 3 以上の整数 n に対して, 辺の長さの和が L である正 n 角形を P_n とし, P_n の面積を $S(n)$ とする. 次に答えよ.

- (1) P_n の外接円の中心から各辺に下ろした垂線の長さを h とする. h を L と n を用いて表せ.
- (2) $S(n)$ を L と n を用いて表せ.
- (3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, 関数 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ が単調増加であることを示せ.
- (4) $S(n)$ と $S(n+1)$ の大小を比較せよ.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ を L を用いて表せ.

3 平面 α 上の $\triangle OAB$ に対して、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = t$, $\angle AOB = \theta$ とする. ただし, $0 < \theta < \pi$ とする. また, $\triangle OAB$ の面積を S とする. 次に答えよ.

(1) $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 4\sqrt{3}S$ を t , $\cos \theta$, $\sin \theta$ を用いて表せ.

(2) t を固定したとき, (1) で求めた式を $f(\theta)$ とする. $f(\theta)$ の最小値を t を用いて表せ. また, その最小値をとるときの θ の値を求めよ.

設問 (3), (4) では, 点 P が平面 α 上を動くものとし, $\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ とする.

(3) t および θ を固定したとき, $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2$ の最小値を t , $\cos \theta$ を用いて表せ. また, その最小値をとるときの \vec{x} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.

(4) t , θ および \vec{x} によらず, $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}S$ が成り立つことを示せ. また, この不等式において等号が成立するのはどのような場合か答えよ.

- 4 人工知能ベンチャータウンにある A 社と B 社は、「はい」か「いいえ」で答えられる質問に回答する知能ロボットを開発した。質問に対して、A 社製のロボットは、 $\frac{4}{5}$ の確率で正しい答えを返し、 $\frac{1}{5}$ の確率で間違った答えを返す。B 社製のロボットは、 $\frac{1}{10}$ の確率で正しい答えを返し、 $\frac{9}{10}$ の確率で間違った答えを返す。A 社製のロボットが 3 体、B 社製のロボットが 3 体、計 6 体のロボットがある。これらのロボットは外見では区別することができない。

ベンチャータウンの入口に、二股の分かれ道があり、一方の道は A 社へ、もう一方の道は B 社へ続いている。この入口に、6 体の中から無作為に選ばれた 1 体のロボットが案内役として立っている。次に答えよ。

- (1) 案内役ロボットに「あなたは A 社製のロボットですか？」と質問して、答えが「はい」である確率を求めよ。
- (2) 案内役ロボットに「あなたは A 社製のロボットですか？」と質問して、答えが「はい」であったとき、このロボットが A 社製のロボットである確率を求めよ。
- (3) 案内役ロボットに、無作為に選んだ一方の道を指しながら「この道はあなたを作った会社へ続く道ですか？」と質問して、答えが「はい」であったとき、指した道が A 社へ続く道である確率を求めよ。
- (4) 案内役ロボットが、(2), (3) のどちらの質問に対しても「はい」と答えたとき、指した道が A 社へ続く道である確率を求めよ。
- (5) 残りの 5 体のロボットの中から無作為に選ばれた 1 体のロボットが入口にやってきた。これら 2 体のロボットに「あなたたちは同じ会社製のロボットですか？」と質問したところ、案内役ロボットは「はい」と答え、あとから来たロボットは「いいえ」と答えた。このとき、2 体とも A 社製のロボットである確率を求めよ。

解答例

1 (1) $D: y = ax^2 - 1$ が a の値によらず通る点は $(0, -1)$

$C: x^2 + y^2 = 1$ もこの点を通るから、求める点は $(0, -1)$

(2) C と D の方程式から x を消去すると

$$y = a(1 - y^2) - 1 \quad \text{整理すると} \quad a(y^2 - 1) + y + 1 = 0$$

ゆえに $(y + 1)(ay - a + 1)$ これを解いて $y = -1, \frac{a-1}{a} \dots \textcircled{1}$

共有点の y 座標に注意して $-1 < \frac{a-1}{a} \leq 1$ よって $a > \frac{1}{2}$

(3) 点 $(0, -1)$ 以外の C と D の共有点の y 座標は、 $\textcircled{1}$ より $y = \frac{a-1}{a}$

これを D の方程式に代入して

$$\frac{a-1}{a} = ax^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \pm \frac{\sqrt{2a-1}}{a}$$

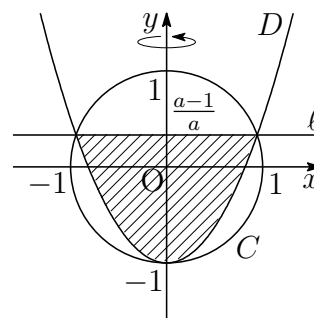
よって、求める交点の座標は $\left(\pm \frac{\sqrt{2a-1}}{a}, \frac{a-1}{a} \right)$

(4) D と ℓ で囲まれた部分は右の図の斜線部分で、 y 軸に関して対称である。 D の方程式から

$$x^2 = \frac{y+1}{a}$$

よって、求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{\frac{a-1}{a}} x^2 dy = \frac{\pi}{a} \int_{-1}^{\frac{a-1}{a}} (y+1) dy \\ &= \frac{\pi}{2a} \left[(y+1)^2 \right]_{-1}^{\frac{a-1}{a}} = \frac{\pi}{2a^3} (2a-1)^2 \end{aligned}$$



(5) (4)の結果から, $f(a) = \frac{\pi}{2}a^{-3}(2a-1)^2$ とおくと ($a > \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{\pi}{2}\{-3a^{-4}(2a-1)^2 + a^{-3}\cdot 4(2a-1)\} \\ &= \frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)\{-3(2a-1) + 4a\} = -\frac{\pi}{2}a^{-4}(2a-1)(2a-3) \end{aligned}$$

したがって, $f(a)$ の増減表は次のようになる.

| | | | | |
|---------|-----------------|------------|---------------|------------|
| a | $(\frac{1}{2})$ | \dots | $\frac{3}{2}$ | \dots |
| $f'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(a)$ | | \nearrow | 極大 | \searrow |

よって, V は $a = \frac{3}{2}$ のとき, 最大値 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{16}{27}\pi$

解説 (1)で示したように, a の値によらず, 点 $(0, -1)$ は C と D の共有点である.

$$C: x^2 + y^2 = 1 \text{ より } (*) \begin{cases} 2x + 2yy' = 0, \\ 2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \end{cases}$$

$$D: y = ax^2 - 1 \text{ より } (**) \begin{cases} y' = 2ax, \\ y'' = 2a \end{cases}$$

これらに共有点 $(0, -1)$ の座標を代入することにより

$$(*) \text{ から } y' = 0, y'' = 1, \quad (**) \text{ から } y' = 0, y'' = 2a$$

したがって, 共有点 $(0, -1)$ において, C と D の第1次導関数の値が等しいから, C と D は, $(0, -1)$ において1次の接触をなす(共通接線をもつ).

とくに, $a = \frac{1}{2}$ のとき, C と D の第1次・第2次導関数の値がともに等しいから, C と D は, $(0, -1)$ において2次の接触をなす. このとき, C と D の点 $(0, -1)$ における接触円(曲率円)が一致する¹.

なお, y が x の関数であるとき, その曲率 κ は次式で与えられる². また, 曲率半径 R は曲率の逆数である

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = \frac{1}{\kappa}$$

$y = ax^2 - 1$ の点 $(0, -1)$ における曲率および曲率半径は $\kappa = 2a, R = \frac{1}{2a}$

とくに, $a = \frac{1}{2}$ のとき, $R = 1$ となり, C の半径と一致する. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i.2017.pdf (p.10を参照)

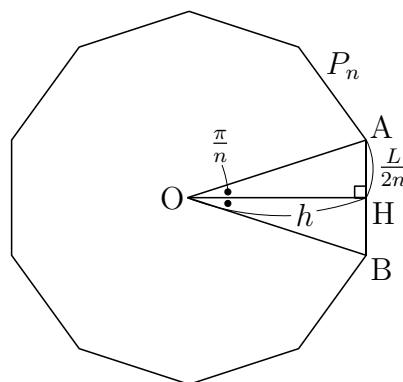
²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri.2009.pdf (p.8を参照)

- 2 (1) 正 n 角形 P_n の 1 つの辺 AB に P_n の外心 O から垂線 OH を引くと

$$\angle AOH = \frac{\pi}{n}, \quad OH = h, \quad AH = \frac{L}{2n}$$

$$\text{したがって} \quad h \tan \frac{\pi}{n} = \frac{L}{2n}$$

$$\text{よって} \quad h = \frac{L}{2n \tan \frac{\pi}{n}}$$



- (2) $\triangle OAB$ の面積について, (1) の結果を利用すると

$$\frac{S(n)}{n} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{n} \cdot \frac{L}{2n \tan \frac{\pi}{n}} \quad \text{よって} \quad S(n) = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$$

- (3) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ を微分すると ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - \tan x}{x^2} = \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x}$$

ここで, $g(x) = 2x - \sin 2x$ とおくと ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$)

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = 2(1 - \cos 2x) > 0$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, $g(x) > 0$, すなわち, $f'(x) > 0$

よって, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, $f(x)$ は単調増加である.

- (4) (2) の結果から $S(n) = \frac{L^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad \dots (*)$

$\frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n}$ であるから, (3) の結果より

$$f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < f\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n}\right)} < \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

よって, (*) より $S(n) < S(n+1)$

- (5) $x = \frac{\pi}{n}$ とおくと, (*) より $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{f(x)}$

$$\text{ここで} \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \frac{L^2}{4\pi}$$

補足 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ は円 (半径 R) に収束するから $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \pi R^2 = \frac{(2\pi R)^2}{4\pi} = \frac{L^2}{4\pi}$ ■

3 (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = t$, $\angle AOB = \theta$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 2 \cdot 1^2 + 2t^2 - 2 \cdot 1 \cdot t \cos \theta = 2 + 2t^2 - 2t \cos \theta, \\ 4\sqrt{3}S &= 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 2\sqrt{3}t \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 4\sqrt{3}S \\ &= 2 + 2t^2 - 2t \cos \theta - 2\sqrt{3}t \sin \theta \\ &= \mathbf{2t^2 + 2 - 2t(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $f(\theta) = 2t^2 + 2 - 4t \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

$0 < \theta < \pi$ より, $\frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi$ であるから, $f(\theta)$ は

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち, } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき, 最小値 } \mathbf{2(t-1)^2}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 &= |\vec{x}|^2 + |\vec{x} - \vec{a}|^2 + |\vec{x} - \vec{b}|^2 \\ &= 3|\vec{x}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{x} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\ &= 3 \left| \vec{x} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right|^2 + \frac{2}{3}(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= 3 \left| \vec{x} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right|^2 + \frac{2}{3}(1 - t \cos \theta + t^2) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

よって, $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ のとき, 最小値 $\frac{2}{3}(1 - t \cos \theta + t^2)$

(4) $\frac{4\sqrt{3}}{3}S = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}t \sin \theta$ であるから, (*) より

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}S \\ &= 3 \left| \vec{x} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right|^2 + \frac{2}{3}(1 - t \cos \theta + t^2) - \frac{2\sqrt{3}}{3}t \sin \theta \\ &= 3 \left| \vec{x} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right|^2 + \frac{2}{3}(t^2 - 2t + 1) + \frac{2}{3}t(2 - \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta) \\ &= 3 \left| \vec{x} - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \right|^2 + \frac{2}{3}(t-1)^2 + \frac{4}{3}t \left\{ 1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

よって $|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 \geq \frac{4\sqrt{3}}{3}S$

等号が成立する場合は $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$, $t = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ■

- 4 質問に対して A 社製ロボットが正しい答え、間違った答えを返す確率をそれぞれ a, \bar{a} とし、同様に B 社製ロボットが正しい答え、間違った答えを返す確率をそれぞれ b, \bar{b} とする ($a = \frac{8}{10}, \bar{a} = \frac{2}{10}, b = \frac{1}{10}, \bar{b} = \frac{9}{10}$).

- (1) 案内役ロボットが A 社製, B 社製である確率は、ともに $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
案内役ロボットが「はい」と答える確率は

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\bar{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{10} + \frac{9}{10} \right) = \frac{17}{20}$$

- (2) 案内役ロボットが「はい」と答えたとき、ロボットが A 社製である確率は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\bar{b}} = \frac{a}{a + \bar{b}} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{8}{10} + \frac{9}{10}} = \frac{8}{17}$$

- (3) 案内役ロボットがどちらか、指した道がどちらであるかにより、次の 4 つの場合がある.

- (i) A 社製ロボットに A 社への道を指した
- (ii) B 社製ロボットに A 社への道を指した
- (iii) A 社製ロボットに B 社への道を指した
- (iv) B 社製ロボットに B 社への道を指した

これらの確率は、すべて $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

したがって、案内ロボットが「はい」と答える確率は

$$(i) \text{ のとき } \frac{1}{4}a, \quad (ii) \text{ のとき } \frac{1}{4}\bar{b}, \quad (iii) \text{ のとき } \frac{1}{4}\bar{a}, \quad (iv) \text{ のとき } \frac{1}{4}b$$

よって、指した道が A 社へ続く道である確率は

$$\frac{\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\bar{b}}{\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{4}\bar{a} + \frac{1}{4}b} = \frac{a + \bar{b}}{(a + \bar{a}) + (b + \bar{b})} = \frac{\frac{8}{10} + \frac{9}{10}}{1 + 1} = \frac{17}{20}$$

- (4) 前問と同様に、(2), (3) どちらの質問に対しても「はい」と答える確率は

$$(i) \text{ のとき } \frac{1}{4}a^2, \quad (ii) \text{ のとき } \frac{1}{4}\bar{b}^2, \quad (iii) \text{ のとき } \frac{1}{4}a\bar{a}, \quad (iv) \text{ のとき } \frac{1}{4}\bar{b}b$$

よって、指した道が A 社へ続く道である確率は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\bar{b}^2}{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\bar{b}^2 + \frac{1}{4}a\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b}b} &= \frac{a^2 + \bar{b}^2}{a(a + \bar{a}) + \bar{b}(b + \bar{b})} = \frac{a^2 + \bar{b}^2}{a + \bar{b}} \\ &= \frac{\left(\frac{8}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^2}{\frac{8}{10} + \frac{9}{10}} = \frac{8^2 + 9^2}{10(8 + 9)} = \frac{29}{34} \end{aligned}$$

(5) 案内役ロボットとあとから来たロボットの組合せとその確率は、次のようになる。

- ① 案内役が A 社製，後からきたのも A 社製のとき $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$
 ② 案内役が A 社製，後からきたのが B 社製のとき $\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$
 ③ 案内役が B 社製，後からきたのが A 社製のとき $\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$
 ④ 案内役が B 社製，後からきたのも B 社製のとき $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

案内役ロボットは「はい」，あとから来たロボットが「いいえ」と答える確率は

$$\text{①のとき } \frac{1}{5}a\bar{a}, \quad \text{②のとき } \frac{3}{10}\bar{a}b, \quad \text{③のとき } \frac{3}{10}\bar{b}a, \quad \text{④のとき } \frac{1}{5}b\bar{b}$$

したがって，2体とも A 社製のロボットである確率は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{5}a\bar{a}}{\frac{1}{5}a\bar{a} + \frac{3}{10}\bar{a}b + \frac{3}{10}\bar{b}a + \frac{1}{5}b\bar{b}} &= \frac{2a\bar{a}}{2a\bar{a} + 3\bar{a}b + 3\bar{b}a + 2b\bar{b}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10}}{2 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} \\ &= \frac{2 \cdot 8 \cdot 2}{2 \cdot 8 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 9 \cdot 8 + 2 \cdot 1 \cdot 9} \\ &= \frac{32}{272} = \frac{2}{17} \end{aligned}$$

