平成29年度　九州工業大学２次試験後期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　平成29年3月12日

- 数 I・II・III・A・B (120分)

1 空間の4点 O，A，B，C は，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$ および $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$ をみたすとし，$\vec{a} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．実数 t に対して，$\vec{p} = t\vec{a} + (t^2 - 3t + 3)\vec{b}$ を点 O に関する位置ベクトルとする点を P とおく．また，3点 O，A，C の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 PH と α が垂直になるように選ぶ．次に答えよ．

(1) 点 P が直線 AB 上にあるときの t の値を求めよ．

(2) 点 P が三角形 OAB の周上および内部にあるときの t の値の範囲を求めよ．

(3) $s = t^2 - 3t + 3$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および s を用いて表せ．

(4) t が (2) で求めた範囲を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$ の最大値および最小値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2,\quad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．次に答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 自然数 m に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\{(a_{k+1})^2 - a_k a_{k+2}\}$ を求めよ．

3 t を実数とする．座標空間に3点 A(3, 0, 0)，B(−1, 2, 0)，C(0, 0, t) がある．3点 A，B，C の定める平面において，三角形 ABC の外接円を E とし，円 E の中心および半径をそれぞれ P，r とする．次に答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{ACB}$ を t を用いて表せ．

(2) $(\sin\angle\mathrm{ACB})^2$ を t の関数と考え，その関数を $f(t)$ とおく．$f(t)$ の極値を求めよ．

(3) t が $0 \leqq t \leqq 3$ の範囲で変化する．

　(a) r の最大値 r_1 を求めよ．また，r が最大になるときの P の座標を求めよ．

　(b) r の最小値 r_2 を求めよ．また，r が最小になるときの P の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を実数とする．曲線 $C_1 : y = |\log x|$ と曲線 $C_2 : y = \log(2x+a)$ について次に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $p > 0$，q を定数とする．

$$\int \log(px+q)\,dx = -x + \frac{1}{p}(px+q)\log(px+q) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

および

$$\int \frac{\log(px+q)}{px+q}\,dx = \frac{1}{2p}\{\log(px+q)\}^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を示せ．

(2) 曲線 C_1 と直線 $y = \log 2$ との交点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C_1 と直線 $y = \log 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(4) (2) で求めた交点の中で，x 座標が最も小さい交点を P とする．曲線 C_2 が点 P を通るとき，a の値を求めよ．

(5) x_0 を (4) で定めた点 P の x 座標，a を (4) で求めた値とする．曲線 C_2，直線 $x = x_0$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\vec{a}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{p}=t\vec{a}+(t^2-3t+3)\vec{b}$ より

$$\vec{p}=\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}(t^2-3t+3)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots ①$$

P が直線 AB 上にあるとき

$$\frac{t}{4}+\frac{1}{4}(t^2-3t+3)=1 \quad \text{整理すると} \quad t^2-2t-1=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{t=1\pm\sqrt{2}}$

(2) ① から

$$\vec{p}=\frac{t^2-2t+3}{4}\left(\frac{t}{t^2-2t+3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t^2-3t+3}{t^2-2t+3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \quad \cdots ②$$

このとき，ベクトル

$$\frac{t}{t^2-2t+3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t^2-3t+3}{t^2-2t+3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

は直線 AB 上の位置ベクトルであるから，② より

$$0\leqq\frac{t^2-2t+3}{4}\leqq 1 \quad \text{かつ} \quad 0\leqq\frac{t}{t^2-2t+3}\leqq 1$$

すなわち　$1-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1+\sqrt{2}$　かつ　$t\geqq 0$

よって，求める t の値の範囲は　$\boldsymbol{0\leqq t\leqq 1+\sqrt{2}}$

(3) 条件より　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$,　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$,　$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　$\cdots(*)$

このとき，α 上のベクトル

$$\vec{c}-\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{1}{2}(2\vec{c}-\vec{a})$$

は，$\vec{a}$ と垂直である．また

$$|2\vec{c}-\vec{a}|^2=4|\vec{c}|^2-4\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=3$$

ここで，$\vec{a}$ に垂直な α 上の単位ベクトルを

$$\vec{e}=\frac{2\vec{c}-\vec{a}}{|2\vec{c}-\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(2\vec{c}-\vec{a})$$

とおく．

$\vec{a}$ と $\vec{e}$ は α 上の直交する単位ベクトルであるから，$(*)$ および $\vec{p}=t\vec{a}+s\vec{b}$ により

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{p}\cdot\vec{e})\vec{e}=(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{a}+\frac{1}{3}\{\vec{p}\cdot(2\vec{c}-\vec{a})\}(2\vec{c}-\vec{a})\\ &= \{(t\vec{a}+s\vec{b})\cdot\vec{a}\}\vec{a}+\frac{1}{3}\{(t\vec{a}+s\vec{b})\cdot(2\vec{c}-\vec{a})\}(2\vec{c}-\vec{a})\\ &= \left(t|\vec{a}|^2+s\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}+\frac{1}{3}\{t(2\vec{c}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2)+s(2\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b})\}(2\vec{c}-\vec{a})\\ &= \left(t+\frac{s}{2}\right)\vec{a}-\frac{s}{6}(2\vec{c}-\vec{a})=\left(t+\frac{2s}{3}\right)\vec{a}-\frac{s}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

したがって　$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \left(t+\frac{2s}{3}\right)\vec{a}-\frac{s}{3}\vec{c}-(t\vec{a}+s\vec{b})\\ &= \boldsymbol{\frac{s}{3}\left(2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}\right)}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果および $(*)$ により

$$\begin{aligned}|2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}|^2 &= 4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{b}\cdot\vec{c}-4\vec{c}\cdot\vec{a}\\ &= 4+9+1-6+0-2=6,\end{aligned}$$

$$s=t^2-3t+3=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\quad\cdots③$$

$s>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}s$

関数 ③ の定義域 $0\leqq t\leqq 1+\sqrt{2}$ の中央 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ について　$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}<\dfrac{3}{2}$

したがって，s は　$t=0$ のとき最大値 3,

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$ は　$t=0$ のとき最大値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$,

$t=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{4}}$

補足 下に凸の 2 次関数の最大値は，定義域の中央が放物線の軸より右側にあるときは，定義域の右端で最大値をとり，定義域の中央が放物線の軸より左側にあるときは，定義域の左端で最大値をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_1=1$, $a_2=2$ より　$b_1=a_2-a_1=1$

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=1$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}-2(a_{n+1}-a_n)=1 \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項が b_1+1，公比が 2 の等比数列であるから

$$b_n+1=(b_1+1)\cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b_n=2^n-1}$$

(2) (1) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)\\ a_n-1 &= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)\\ a_n &= 2^n-n\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=2^n-n}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}(a_{k+1})^2-a_ka_{k+2} &= (2^{k+1}-k-1)^2-(2^k-k)(2^{k+2}-k-2)\\ &= (k-2)\cdot 2^k+1\end{aligned}$$

$(k+1)\cdot 2^{k+1}-k\cdot 2^k=(k+2)\cdot 2^k$ であることに注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}\{(a_{k+1})^2-a_ka_{k+2}\} &= \sum_{k=1}^{m}\{(k-2)\cdot 2^k+1\}\\ &= \sum_{k=1}^{m}\{(k+2)\cdot 2^k-2^{k+2}+1\}\\ &= \sum_{k=1}^{m}\{(k+1)\cdot 2^{k+1}-k\cdot 2^k\}+\sum_{k=1}^{m}(-2^{k+2}+1)\\ &=(m+1)\cdot 2^{m+1}-2-\frac{2^3(2^m-1)}{2-1}+m\\ &=\boldsymbol{(m-3)\cdot 2^{m+1}+m+6}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A(3, 0, 0)，B$(-1,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ t)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (3,\ 0, -t), \quad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-1,\ 2, -t)$$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \sqrt{t^2+9}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \sqrt{t^2+5}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = t^2-3$

よって　$\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|} = \boldsymbol{\dfrac{t^2-3}{\sqrt{t^2+9}\sqrt{t^2+5}}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sin\angle\mathrm{ACB})^2 = 1-(\cos\angle\mathrm{ACB})^2 \\ &= 1-\left(\frac{t^2-3}{\sqrt{t^2+9}\sqrt{t^2+5}}\right)^2 = \frac{20(t^2+\frac{9}{5})}{(t^2+9)(t^2+5)} \end{aligned}$$

ゆえに
$$\begin{aligned} \frac{20}{f(t)} &= \frac{(t^2+9)(t^2+5)}{t^2+\frac{9}{5}} = \frac{\{(t^2+\frac{9}{5})+\frac{36}{5}\}\{(t^2+\frac{9}{5})+\frac{16}{5}\}}{t^2+\frac{9}{5}} \\ &= \frac{52}{5}+\left(t^2+\frac{9}{5}+\frac{\frac{36\cdot 16}{25}}{t^2+\frac{9}{5}}\right) \end{aligned}$$

ここで，$a=\dfrac{24}{5}$，$s=t^2+\dfrac{9}{5}$ とし，$g(s)=s+\dfrac{a^2}{s}$ $\left(s \geqq \dfrac{9}{5}\right)$ とおくと

$$g'(s) = 1-\frac{a^2}{s^2} = \frac{(s+a)(s-a)}{s^2} = \frac{1}{s^2}\left(t^2+\frac{33}{5}\right)(t^2-3)$$

$\dfrac{20}{f(t)} = \dfrac{52}{5}+g(s)$ であるから，これを t について微分すると

$$-\frac{20f'(t)}{\{f(t)\}^2} = \frac{ds}{dt}g'(s) = 2t\cdot\frac{1}{s^2}\left(t^2+\frac{33}{5}\right)(t^2-3)$$

したがって　$f'(t) = -\dfrac{\{f(t)\}^2(5t^2+33)}{50s^2}\cdot t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$

t	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって　極大値 $\boldsymbol{f(\pm\sqrt{3})=1}$，極小値 $\boldsymbol{f(0)=\dfrac{4}{5}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-4,\ 2,\ 0)$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 20$ であるから，正弦定理および (2) の結果から

$$2r = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{\sin\angle\mathrm{ACB}} \quad \text{ゆえに} \quad r^2 = \frac{5}{f(t)}$$

上式および (2) の結果から，$0 \leqq t \leqq 3$ における $f(t)$ および r の増減は

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$f(t)$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{6}{7}$
r	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{35}{6}}$

(a) 増減表から，$t = 0$ のとき $\boldsymbol{r_1 = \frac{5}{2}}$

3 点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 0)$ を通る円の中心 P は xy 平面上にあるから，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおくと，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2 = \mathrm{CP}^2$ より

$$(x-3)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2$$

したがって $\quad -6x + 9 = 2x - 4y + 5 = 0$

これを解いて $\quad x = \frac{3}{2},\ y = 2 \quad$ よって $\quad \mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{3}{2},\ 2,\ 0}\right)$

(b) 増減表から，$t = \sqrt{3}$ のとき $\boldsymbol{r_2 = \sqrt{5}}$

$t = \sqrt{3}$ を (1) の結果に代入すると

$$\cos\angle\mathrm{ACB} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$$

AB は球の直径 (P は線分 AB の中点) であるから $\mathrm{P}\boldsymbol{(1,\ 1,\ 0)}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 次の2式を微分すると ($p>0$，q は定数)

$$\frac{d}{dx}\left\{-x+\frac{1}{p}(px+q)\log(px+q)\right\}$$
$$=-1+\frac{1}{p}p\log(px+q)+\frac{1}{p}(px+q)\cdot\frac{p}{px+q}=\log(px+q),$$

$$\frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{dx}\{\log(px+q)\}^2=\frac{1}{2p}\cdot 2\log(px+q)\cdot\frac{p}{px+q}=\frac{\log(px+q)}{px+q}$$

したがって

$$\int\log(px+q)\,dx=-x+\frac{1}{p}(px+q)\log(px+q)+C\quad(C\text{ は積分定数}),$$

$$\int\frac{\log(px+q)}{px+q}\,dx=\frac{1}{2p}\{\log(px+q)\}^2+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

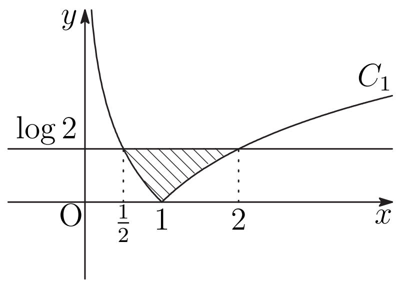
(2) $y=|\log x|$ と $y=\log 2$ から，y を消去すると

$$|\log x|=\log 2\quad\text{ゆえに}\quad\log x=\pm\log 2\quad\text{すなわち}\quad x=\frac{1}{2},\ 2$$

よって，求める交点の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ \log 2\right)}$，$\boldsymbol{(2,\ \log 2)}$

(3) (2) の結果から

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\log 2-|\log x|)\,dx=\frac{3}{2}\log 2+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log x\,dx-\int_{1}^{2}\log x\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\log 2+\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}-\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_{1}^{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$



(4) $C_2: y=\log(2x+a)$ が点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \log 2\right)$ を通るから

$$\log 2=\log\left(2\cdot\frac{1}{2}+a\right)\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{a=1}$$

(5) (1) の結果に注意して

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{1}{2}}\{\log(2x+1)\}^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(2x+1)'\{\log(2x+1)\}^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ (2x+1)\{\log(2x+1)\}^2\ \Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

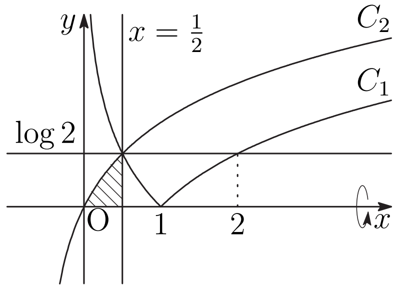
$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(2x+1)\cdot 2\log(2x+1)\cdot\frac{2}{2x+1}\,dx$$

$$=(\log 2)^2-2\int_0^{\frac{1}{2}}\log(2x+1)\,dx$$

$$=(\log 2)^2-2\Big[-x+\frac{1}{2}(2x+1)\log(2x+1)\ \Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=(\log 2)^2-2\log 2+1=(1-\log 2)^2$$

よって　　$\boldsymbol{V=\pi(1-\log 2)^2}$



別解 $t=\log(2x+1)$ とおくと　$x=\dfrac{1}{2}(e^t-1)$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}e^t$

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
t	$0\longrightarrow\log 2$

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{1}{2}}\{\log(2x+1)\}^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\log 2}e^t t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\ e^t(t^2-2t+2)\ \Big]_0^{\log 2}=(1-\log 2)^2$$

解説 部分積分法により，次式が得られる．

$$\int e^{kx}f(x)\,dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$

$k=1$ を上式に代入すると，次の結果を得る．

$$\int e^x f(x)\,dx=e^x\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}+C$$