平成 29 年度　九州工業大学２次試験前期日程 (数学問題)
工学部・情報工学部　平成 29 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = x(x^2+1)e^{-x^2}$ について，次に答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $g(t) = t^2 e^{-t}$ の増減を調べ，$t > 1$ のとき $g(t) < 1$ であることを示せ．

(2) $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対して，$x > 1$ のとき $x^k e^{-x^2} < \dfrac{1}{x^{4-k}}$ が成立することを示し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x^2} = 0$ を示せ．

(3) 関数 $y = f(x)$ について，増減および漸近線に注意して，そのグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(4) $s \geqq 0$ に対して，定積分 $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(x)\,dx$ を計算し，$\displaystyle\lim_{s\to\infty} F(s)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上で，曲線

$$x = \theta - \sin\theta,\quad y = 1 + \cos\theta \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

を C とする．次に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 $(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C は下に凸であることを示せ．

(3) $0 < \theta < \pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(\theta - \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ における曲線 C の接線と，点 $\mathrm{Q}(\theta + \pi - \sin(\theta + \pi),\ 1 + \cos(\theta + \pi))$ における曲線 C の接線が，垂直に交わることを示せ．

(4) (3) の 2 点を結んだ線分 PQ の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(5) (4) で求めた θ に対応する点 P，Q の x 座標を，それぞれ α，β とする．曲線 C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を実数とする．関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x) = \sin 2x + \left(\int_0^a g(t)\,dt\right)\sin x$$
$$g(x) = e^{-x}\left(-x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt\right)$$

をみたすとき，次に答えよ．

(1) $A = \displaystyle\int_0^a g(t)\,dt$，$B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくとき，B を A を用いて表せ．

(2) $f(x)$，$g(x)$ を a を用いて表せ．

(3) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = 0$ となるときの $\cos x$ の値を a を用いて表せ．

(4) $-2 \leqq a \leqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|\,dx$ を最小にする a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数 1 と数 2 の並びを考える．たとえば，1，2，1 の順の並びを $(1,\ 2,\ 1)$ で表す．和が自然数 n となるような数 1 と数 2 の並びの集合を S_n と表し，S_n の要素の個数を a_n とする．たとえば，$n = 3$ のとき，$3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$ となるので，$S_3 = \{(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1)\}$，$a_3 = 3$ となる．次に答えよ．

(1) a_4 および a_5 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n で表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n+2} - 2$ となることを示せ．

(4) S_{n+3} から並びを一つ選ぶとき，その並びの 1 番目の数が 1 となる確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ．

(5) S_{n+3} から並びを一つ選ぶとき，その並びの 2 番目の数が 2 となる確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ．

(6) S_{n+4} から並びを一つ選ぶ．選んだ並びの 2 番目の数が 2 であるとき，その並びの 1 番目の数が 1 である確率を a_{n+1} と a_{n+2} を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $g(t)=t^2e^{-t}$ を微分すると

$$g'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{2}{e}\right)^2$	$\searrow$

$g(2)<1$ であるから，上の増減表より，$t>1$ のとき，$g(t)<1$

(2) $x>1$ のとき，$t=x^2$ とおくと，$t>1$ であるから，(1) の結果により

$$x>1 \text{ のとき}\quad (x^2)^2e^{-x^2}<1 \quad \text{ゆえに}\quad x^ke^{-x^2}<\frac{1}{x^{4-k}}$$

$x>1$ のとき，$0<x^ke^{-x^2}<\dfrac{1}{x^{4-k}}$ であるから

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ に対して}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{4-k}}=0$$

したがって，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^ke^{-x^2}=0$

(3) $f(x)=x(x^2+1)e^{-x^2}=(x^3+x)e^{-x^2}$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=(3x^2+1)e^{-x^2}+(x^3+x)e^{-x^2}(-2x)\\&=(-2x^4+x^2+1)e^{-x^2}\\&=-(x+1)(x-1)(2x^2+1)e^{-x^2}\end{aligned}$$

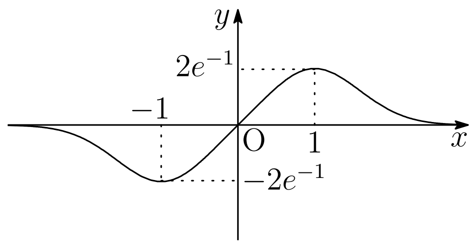
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-2e^{-1}$	$\nearrow$	極大 $2e^{-1}$	$\searrow$

(2) の結果から $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(-x)$

$\displaystyle\qquad=\lim_{x\to\infty}\{-f(x)\}=0$

漸近線は $y=0$



(4) $t = x^2$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = 2x$

x	$0 \longrightarrow s$
t	$0 \longrightarrow s^2$

したがって　$F(s) = \displaystyle\int_0^s f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^s (x^2+1)e^{-x^2}\cdot 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{s^2} (t+1)e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}\Big[\ (t+2)e^{-t}\ \Big]_0^{s^2}$$

$$= \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}(s^2+2)e^{-s^2}}$$

上式および (2) の結果から　$\displaystyle\lim_{s\to\infty} \boldsymbol{F(s) = 1}$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $x = \theta - \sin\theta$，$y = 1 + \cos\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta$$

C 上の点 $(\theta - \sin\theta,\ 1+\cos\theta)$ における接線の方程式は

$$-\frac{dy}{d\theta}\{x - (\theta - \sin\theta)\} + \frac{dx}{d\theta}\{y - (1+\cos\theta)\} = 0$$

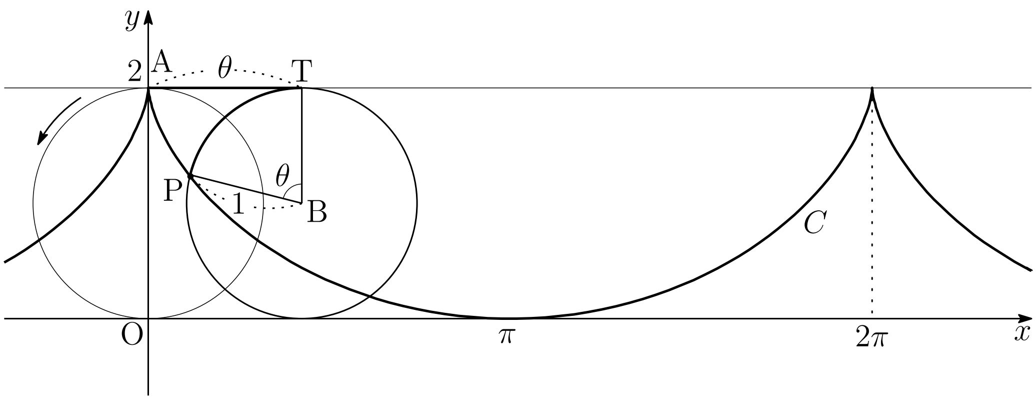
$$\sin\theta\cdot(x - \theta + \sin\theta) + (1-\cos\theta)(y - 1 - \cos\theta) = 0$$

$$\boldsymbol{(\sin\theta)x + (1-\cos\theta)y - \theta\sin\theta = 0}$$

補足　下の図の半径 1 の円上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，円が角 θ だけ回転したとき，円の中心を B，直線 $y=2$ との接点を T とする．このとき，$\mathrm{AT} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}} = \theta$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ を θ だけ回転させたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}$



(2) $x = f(\theta) = \theta - \sin\theta$，$y = g(\theta) = 1 + \cos\theta$ とおくと $(0 < \theta < 2\pi)$

さらに，$\theta = f^{-1}(x) = h(x)$ とおくと　$y = g(h(x))$

したがって　$(*)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g'(h(x))h'(x), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = g''(h(x))\{h'(x)\}^2 + g'(h(x))h''(x) \end{cases}$

ここで，$x = f(h(x))$ であるから

$$\begin{cases} 1 = f'(h(x))h'(x) \\ 0 = f''(h(x))\{h'(x)\}^2 + f'(h(x))h''(x) \end{cases}$$

ゆえに　$(**)\begin{cases} 1 = f'(\theta)h'(x) \\ 0 = f''(\theta)\{h'(x)\}^2 + f'(\theta)h''(x) \end{cases}$

$(**)$ の第 1 式から　$h'(x) = \dfrac{1}{f'(\theta)}$　$\cdots$①

① を $(**)$ の第 2 式に代入することにより　$h''(x) = -\dfrac{f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$　$\cdots$②

$h(x) = \theta$ および ①，② を $(*)$ の第 2 式に代入して整理すると

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

このとき　$f'(\theta) = 1 - \cos\theta$　$g'(\theta) = -\sin\theta$

$f''(\theta) = \sin\theta$　$g''(\theta) = -\cos\theta$

$g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta) = 1 - \cos\theta$

したがって　$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1 - \cos\theta}{(1 - \cos\theta)^3} = \dfrac{1}{(1 - \cos\theta)^2} > 0$

よって，曲線 C は下に凸である．

別解 C 上の点 $(x,\ y) = (f(\theta),\ g(\theta))$ における接ベクトルは $(f'(\theta),\ g'(\theta))$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(\theta)}{f'(\theta)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}\right\}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

逆関数定理により，$\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{1}{f'(\theta)}$ であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^2}\cdot\frac{1}{f'(\theta)} = \frac{g''(\theta)f'(\theta) - g'(\theta)f''(\theta)}{\{f'(\theta)\}^3}$$

(3) C 上の 2 点 $\mathrm{P}(f(\theta),\ g(\theta))$，$\mathrm{Q}(f(\theta+\pi),\ g(\theta+\pi))$ における接ベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ とすると

$$\vec{u}=(f'(\theta),\ g'(\theta))=(1-\cos\theta, -\sin\theta)$$
$$\vec{v}=(f'(\theta+\pi),\ g'(\theta+\pi))=(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$$

このとき　$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)+(-\sin\theta)\sin\theta=0$

よって，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線は垂直に交わる．

(4) $\mathrm{P}(\theta-\sin\theta,\ 1+\cos\theta)$，$\mathrm{Q}(\theta+\pi+\sin\theta, 1-\cos\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(\pi+2\sin\theta)^2+(-2\cos\theta)^2\\&=4\pi\sin\theta+\pi^2+4\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ において，PQ は $\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2}}$ のとき，最大値 $\sqrt{\pi^2+4\pi+4}=\boldsymbol{\pi+2}$

(5) (4) の結果から，$\alpha=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta=f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$．求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}y\,\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^2\theta\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta=\left[\ \frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が

$$f(x)=\sin2x+\left(\int_0^a g(t)\,dt\right)\sin x$$
$$g(x)=e^{-x}\left(-x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt\right)$$

をみたすとき，$A=\displaystyle\int_0^a g(t)\,dt$，$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$ より (a は実数)

$$f(x)=\sin2x+A\sin x,\quad g(x)=e^{-x}(-x+B)$$

したがって　$B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin2t+A\sin t)\,dt$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos2t-A\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{A+1}$$

(2) (1) と同様に　$A=\int_0^a g(t)\,dt=\int_0^a e^{-t}(-t+B)\,dt$

$$=\Big[\ e^{-t}(t-B+1)\ \Big]_0^a=e^{-a}(a-B+1)+B-1$$

上式に (1) の結果を代入すると

$$A=e^{-a}(a-A)+A\quad \text{ゆえに}\quad A=a,\ B=a+1$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=\sin 2x+a\sin x,\quad g(x)=e^{-x}(-x+a+1)}$

(3) (2) の結果から

$$f(x)=2\sin x\cos x+a\sin x=2\sin x\left(\cos x+\frac{a}{2}\right)$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x)=0$ となる $\cos x$ の値は

$$\boldsymbol{-2<a<0}\ \textbf{のとき}\qquad \boldsymbol{\cos x=-\frac{a}{2}}$$
$$\boldsymbol{a\leqq -2,\ 0\leqq a}\ \textbf{のとき}\quad \boldsymbol{\cos x}\ \textbf{はない}$$

(4) $-2\leqq a\leqq 0$ に対して，$\cos\theta=-\dfrac{a}{2}\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$0\leqq x\leqq\theta\text{のとき } f(x)\geqq 0,\qquad \theta\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\text{のとき } f(x)\leqq 0$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x-a\cos x$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_0^a|f(x)|\,dx&=\Big[\ F(x)\ \Big]_0^\theta-\Big[\ F(x)\ \Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}}\\&=2F(\theta)-F(0)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta-a\cos\theta\right)-\left(-\frac{1}{2}-a\right)-\frac{1}{2}\\&=-\cos 2\theta-2a\cos\theta+a\\&=-2\cos^2\theta-2a\cos\theta+a+1\\&=-2\left(-\frac{a}{2}\right)^2-2a\left(-\frac{a}{2}\right)+a+1\\&=\frac{a^2}{2}+a+1=\frac{1}{2}(a+1)^2+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，上式を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a=-1}$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $S_1=\{(1)\}$，$S_2=\{(1,\ 1),\ (2)\}$ より　$a_1=1$，$a_2=2$

S_{n+2} は S_{n+1} の要素の並びの先頭に 1 を付け加えた集合と S_n の要素の先頭に 2 を付け加えた集合の和集合であるから

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad \cdots(*)$$

したがって
$$a_3=a_2+a_1=2+1=3$$
$$a_4=a_3+a_2=3+2=\mathbf{5}$$
$$a_5=a_4+a_3=5+3=\mathbf{8}$$

(2) $(*)$ より　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

(3) (2) の結果より　$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

よって　$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}(a_{i+2}-a_{i+1})=a_{n+2}-a_2=a_{n+2}-2$$

(4) S_{n+3} の要素のうち，その並びの 1 番目が 1，2 である個数はそれぞれ a_{n+2}，a_{n+1} であるから，求める確率は

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+3}}=\boldsymbol{\frac{a_{n+2}}{a_{n+2}+a_{n+1}}}$$

(5) S_{n+3} の並びの 2 番目が 2 である個数は S_{n+1} の要素の並びの 2 番目に 2 を付け加えた集合の個数に等しいから，求める確率は

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+3}}=\boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}+a_{n+1}}}$$

(6) S_{n+4} から並びを一つ選ぶとき，選んだ並びの 2 番目の数が 2 である事象を A とすると，その確率 $P(A)$ は，(5) の結果から

$$P(A)=\frac{a_{n+2}}{a_{n+4}}$$

S_{n+4} から並びを一つ選ぶとき，選んだ並びの 1 番目の数が 1 である事象を B とすると，事象 $A\cap B$ の個数は，S_{n+1} の要素の先頭に 1，2 を付け加えたものであるから，a_{n+1} に等しい．したがって

$$P(A\cap B)=\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$$

よって，求める確率は　$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}\cdot\frac{a_{n+4}}{a_{n+2}}=\boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}}$$