令和７年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
令和７年２月25日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B・C(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B・C または数 I・III・A・B・C(90 分)

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos 2\theta > \sin\theta$ を解け．

(2) x，y，z を正の実数とする．

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)$$

のとりうる値の最小値を求めよ．また，最小値をとるときの x，y，z の条件を求めよ．

(3) 次の $\boxed{\text{（ア）}}$，$\boxed{\text{（イ）}}$ に当てはまるものを，下の選択肢 (あ)〜(え) のうちから一つずつ選び，その理由を説明せよ．ただし，選択肢については，同じものを繰り返し選んでもよい．

- 実数 a，b について，「$a+b=2$ かつ $a-b=0$」であることは，「$(a-1)(b-1)=0$」であるための $\boxed{\text{（ア）}}$.
- 実数 a，b，c について，「$ax^2+bx+c=0$ を満たす実数 x が存在する」ことは，「$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である」ための $\boxed{\text{（イ）}}$.

(あ) 必要条件であるが十分条件ではない

(い) 十分条件であるが必要条件ではない

(う) 必要十分条件である

(え) 必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の方程式を解け．

$$3\log_8(3x+7)=2\log_2(x+1)$$

(2) x に関する方程式

$$\log_8(3x+a-2)=\log_2(x-2)$$

が異なる実数解をちょうど2つもつとき，実数 a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 初項を $a_1=1$，$b_1=3$ とし，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える．

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=(1-2\cdot3^{n-1})a_n+3^{n-1}b_n & \quad (n=1,2,3,\cdots)\\ b_{n+1}&=-4\cdot3^{n-1}a_n+(2\cdot3^{n-1}+1)b_n & \quad (n=1,2,3,\cdots)\end{aligned}$$

(1) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=-2a_n+b_n$ で定める．このとき，$c_{n+1}=c_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $d_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標空間において，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径1の球 S と，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を通り z 軸に垂直な平面 α と，点 $\mathrm{F}(0,\ 1,\ 0)$ がある．

(1) 点 A を球 S 上の点とする．直線 FA と平面 α との交点を A' とする．A の z 座標が k であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{FA}'}=\dfrac{2}{k}\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ となることを示せ．ただし，$k\neq0$ とする．

(2) 球 S 上に2点 $\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 1)$ をとる．直線 FB と平面 α との交点を B'，直線 FC と平面 α との交点を C' とする．B'，C' の座標を求めよ．

(3) 2点 B'，C' を (2) で定めた点とする．点 P は平面 α 上を動き，$\overrightarrow{\mathrm{PB}'}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}'}$ が垂直になるとき，点 P の軌跡を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PB}'}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}'}\neq\vec{0}$ とする．

5 AとBがあるゲームを繰り返し行い，先に3回勝った方を優勝とする．第1ゲームではAが先攻とし，それ以降は先攻と後攻を交互に入れかえてゲームを行う．各ゲームでは引き分けはなく，必ず勝敗がつくとする．各ゲームでAがBに勝つ確率は，Aが先攻のとき $\dfrac{2}{3}$，後攻のとき $\dfrac{1}{2}$ とする．

(1) 第3ゲームで優勝が決まる確率を求めよ．

(2) 第5ゲームで優勝が決まる確率を求めよ．

(3) Bが優勝する確率を求めよ．

6 3つの複素数 $\alpha = 4 + 3i$，$\beta = x + i$，$\gamma = 8i$ および複素数平面上の対応する点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を考える．ただし，x は実数で，i は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が実数となるような x の値を求めよ．

(2) 直線ABと直線ACが垂直に交わるような x の値を求めよ．

(3) x が実数全体を動くとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の虚部の最大値および最小値を求めよ．

7 e を自然対数の底とし，

$$f(x) = \frac{e^x - 2e^{-2x}}{e^x + e^{-2x}}$$

とおく．座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l とする．また，l と直線 $y = 1$ の交点を $(a,\ 1)$ とする．

(1) 接線 l の方程式と，a の値を求めよ．

(2) (1) で求めた接線 l の方程式を $y = g(x)$ とおく．$x > 0$ のとき，$f(x) < g(x)$ であることを示せ．

(3) 曲線 C，接線 l および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ．

(4) 実数 r は $r > a$ を満たすとする．曲線 C，直線 $y = 1$，$x = a$ および $x = r$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．(3) で定めた S_1 を用いて $S(r) = S_1 + S_2$ と定めるとき，$S(r)$ を求めよ．さらに，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} S(r)$ を求めよ．

8 座標平面において，曲線 $y = \dfrac{2}{x}$ $(x > 0)$ を C とする．C の接線で点 $\mathrm{P}(4,\ 0)$ を通るものを l とし，曲線 C と直線 l の接点を Q とする．

(1) 直線 l の方程式および点 Q の座標を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 PQ および直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) (2) で定めた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\cos 2\theta > \sin\theta$ より　$1 - 2\sin^2\theta > \sin\theta$

$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) < 0$$

$-1 < \sin\theta < \dfrac{1}{2}$ であるから $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$$

(2)

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) = 3 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}$$

x，y，z は正の実数であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}} = 2$$
$$\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geqq 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}} = 2$$
$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqq 2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}} = 2$$

上の 3 式について等号が成立するのは，それぞれ $x = y$，$y = z$，$z = x$ のときである．したがって

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geqq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

上式において，等号が成立するのは $x = y = z$ のときである．

よって，$\boldsymbol{x = y = z}$ **のとき最小値 9** をとる．

(3)

- 「$a + b = 2$ かつ $a - b = 0$」$\Longleftrightarrow$「$a = b = 1$」$\Longrightarrow$「$(a - 1)(b - 1) = 0$」
  したがって，十分条件であるが必要条件ではない．　(ア) **(い)**
- 「$ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式である」$\Longleftrightarrow$ 「$a = b = c = 0$」
  $\Longrightarrow$ 「$ax^2 + bx + c = 0$ を満たす実数 x が存在する」
  反例として，「$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$」のとき，「$ax^2 + bx + c = 0$ を満たす実数 0 が存在する」
  したがって，必要条件であるが十分条件ではない．　(イ) **(あ)**　■

2 (1) 真数は正であるから

$$3x+7>0 \text{ かつ } x+1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>-1 \quad \cdots ①$$

与式を変形すると　$\log_2(3x+7)=\log_2(x+1)^2$

$$3x+7=(x+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-3)(x+2)=0$$

① に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{x=3}$

(2) 真数は正であるから

$$3x+a-2>0 \text{ かつ } x-2>0 \quad \text{ゆえに} \quad x>2 \quad \cdots ②$$

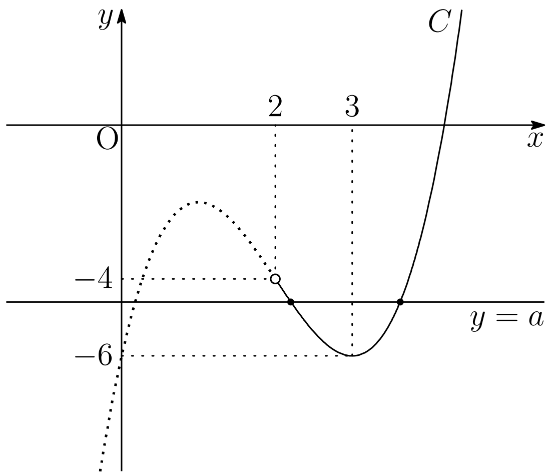
与式を変形すると　$\log_2(3x+a-3)=\log_2(x-2)^3$

$$3x+a-3=(x-2)^3 \quad \text{ゆえに} \quad a=x^3-6x^2+9x-6 \qquad (*)$$

方程式 $(*)$ の実数解は，直線 $y=a$ と曲線 $C: y=x^3-6x^2+9x-6$ の共有点の x 座標である．
$y=x^3-6x^2+9x-6$ を微分すると

$$y'=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

x	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	(-4)	$\searrow$	-6	$\nearrow$



曲線 C と直線 $y=a$ が $x>2$ において，共有点が 2 個あればよいから

$$\boldsymbol{-6<a<-4}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $c_n = -2a_n + b_n$ より

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= -2a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= -2\{(1 - 2{\cdot}3^{n-1})a_n + 3^{n-1}b_n\} + \{-4{\cdot}3^{n-1}a_n + (2{\cdot}3^{n-1} + 1)b_n\} \\ &= -2a_n + b_n = c_n \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，$c_1 = -2a_1 + b_1 = -2{\cdot}1 + 3 = 1$，$c_{n+1} = c_n$ より

$$c_n = c_1 = 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$d_n = a_{n+1} - a_n$ より

$$\begin{aligned} d_n &= (1 - 2{\cdot}3^{n-1})a_n + 3^{n-1}b_n - a_n \\ &= 3^{n-1}(-2a_n + b_n) = 3^{n-1}c_n = 3^{n-1} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{d_n = 3^{n-1}}$

(3) (2) の結果から，$a_{n+1} - a_n = 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_l) = \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$

$$a_n - a_1 = \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから

$$a_n - 1 = \frac{3^{n-1} - 1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2}}$$

$-2a_n + b_n = c_n = 1$ より

$$b_n = 2a_n + 1 = 2{\cdot}\frac{3^{n-1} + 1}{2} + 1 = 3^{n-1} + 2$$

よって　　$\boldsymbol{b_n = 3^{n-1} + 2}$ ■

4 (1) $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ k)$，$\mathrm{A}'(a_1',\ a_2',\ 2)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{FA}'}/\!/\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ より，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{FA}'}=t\overrightarrow{\mathrm{FA}}\quad \text{ゆえに}\quad (a_1',\ a_2'-1,\ 2)=t(a_1,\ a_2-1,\ k)$$

上の第 2 式の z 成分に注目すると　$2=tk$

$k\neq 0$ であるから，$t=\dfrac{2}{k}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{FA}'}=\dfrac{2}{k}\overrightarrow{\mathrm{FA}}$

(2) (1) の結論から，B，C の z 座標により　$\overrightarrow{\mathrm{FB}'}=6\overrightarrow{\mathrm{FB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FC}'}=2\overrightarrow{\mathrm{FC}}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}'}&=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+6\overrightarrow{\mathrm{FB}}\\&=(0,\ 1,\ 0)+6\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)=(-2,-1,\ 2),\\\overrightarrow{\mathrm{OC}'}&=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+2\overrightarrow{\mathrm{FC}}\\&=(0,\ 1,\ 0)+2\,(1,-1,\ 1)=(2,-1,\ 2)\end{aligned}$$

よって　**$\mathbf{B}'(-2,-1,\ 2)$，$\mathbf{C}'(2,-1,\ 2)$**

(3) 点 P は α 上の点であるから，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 2)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{B'P}}=(x+2,\ y+1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{C'P}}=(x-2,\ y+1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{B'P}}\perp\overrightarrow{\mathrm{C'P}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{B'P}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C'P}}=0$ であるから

$$(x+2)(x-2)+(y+1)^2=0\quad \text{ゆえに}\quad x^2+(y+1)^2=4$$

$\overrightarrow{\mathrm{B'P}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{C'P}}\neq\vec{0}$ であるから

$$(x+2,\ y+1,\ 0)\neq\vec{0},\quad (x-2,\ y+1,\ 0)\neq\vec{0}$$

したがって，点 P の軌跡は

円 $\boldsymbol{x^2+(y+1)^2=4,\ z=2}$

ただし，2 点 $(-2,-1,\ 2)$，$(2,-1,\ 2)$ を除く． ■

$\boxed{5}$ (1) A が 3 連勝する確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{18}$

B が 3 連勝する確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$

よって，求める確率は $\dfrac{4}{18}+\dfrac{1}{18}=\boldsymbol{\dfrac{5}{18}}$

(2) 第 1 ゲームと第 2 ゲームの 2 試合で A が 2 勝，A が 1 勝 1 敗，B が 2 勝する確率をそれぞれ $P\{2,0\}$，$P\{1,1\}$，$P\{0,2\}$ とすると

$$P\{2,0\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$
$$P\{1,1\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$P\{0,2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

第 3 ゲームと第 4 ゲームの 2 試合で A が 2 勝，A が 1 勝 1 敗，B が 2 勝する確率もそれぞれ $P\{2,0\}$，$P\{1,1\}$，$P\{0,2\}$ である．

第 5 ゲームで優勝が決まる確率は，第 4 ゲーム終了時点で 2 勝 2 敗となる確率であるから

$$P\{2,0\}P\{0,2\}+P\{1,1\}P\{1,1\}+P\{0,2\}P\{2,0\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{13}{36}}$$

(3) (i) 第 3 ゲームで B が優勝する確率は

$$P\{0,\ 2\}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

(ii) 第 4 ゲームで B が優勝する確率は

$$P\{1,1\}P\{0,2\}+P\{0,\ 2\}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{36}$$

(iii) 第 5 ゲームで B が優勝する確率は，(2) の結果から

$$\frac{13}{36}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{108}$$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$\frac{1}{18}+\frac{5}{36}+\frac{13}{108}=\boldsymbol{\frac{17}{54}}$$

■

6 (1)

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4+3i}{x+i}=\frac{(4+3i)(x-i)}{(x+i)(x-i)}=\frac{4x+3+(3x-4)i}{x^2+1} \qquad (*)$$

上式が実数となるとき，実数 x は

$$3x-4=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=\frac{4}{3}}$$

(2)

$$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{(x+i)-(4+3i)}{8i-(4+3i)}=\frac{x-4-2i}{-4+5i}$$
$$=\frac{(x-4-2i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)}=\frac{-4x+6+(-5x+28)i}{41}$$

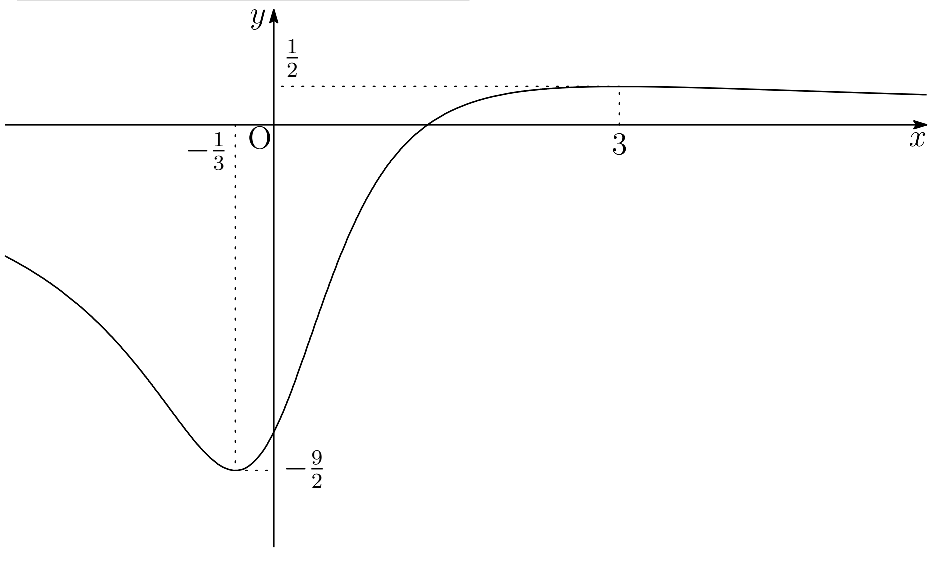
直線 AB と直線 AC が垂直に交わるとき，上式は純虚数である．実数 x は

$$-4x+6=0 \ \text{かつ} \ -5x+28\neq 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$$

(3) $(*)$ より，$f(x)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\dfrac{3x-4}{x^2+1}$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{-(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{x+\frac{1}{x}}=0$$



よって　**最大値 $\boldsymbol{f(3)=\frac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{9}{2}}$** ■

$\boxed{7}$ (1) $f(x)=\dfrac{e^x-2e^{-2x}}{e^x+e^{-2x}}=\dfrac{e^{3x}-2}{e^{3x}+1}=1-\dfrac{3}{e^{3x}+1}$ より $f'(x)=\dfrac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

$f'(0)=\dfrac{9}{4}$ であるから，点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}}$$

l と直線 $y=1$ の交点の x 座標 a は

$$\frac{9}{4}a-\frac{1}{2}=1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$$

(2) $g(x)=f(0)+xf'(0)$ であるから，$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$h(x)=f(0)+xf'(0)-f(x)$$

$h(0)=0$，$h'(x)=f'(0)-f'(x)$ より

$$h'(x)=\frac{9}{4}-\frac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}=\frac{9(e^{3x}-1)^2}{4(e^{3x}+1)^2}>0$$

$h(x)$ は単調増加であるから，$x>0$ のとき，$h(x)>h(0)=0$

$$x>0 \text{ のとき} \quad g(x)-f(x)>0 \quad \text{すなわち} \quad g(x)>f(x)$$

(3) $f(x)=\dfrac{e^x-2e^{-2x}}{e^x+e^{-2x}}=\dfrac{(e^x+e^{-2x})'}{e^x+e^{-2x}}$ に注意して

$$\begin{aligned}
S_1&=\int_0^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}-f(x)\right\}dx\\
&=\left[\frac{9}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\log(e^x+e^{-2x})\right]_0^{\frac{2}{3}}\\
&=\frac{1}{6}-\log\frac{e^{\frac{2}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}}{2}\\
&=\boldsymbol{\frac{3}{2}-\log\frac{e^2+1}{2}}
\end{aligned}$$

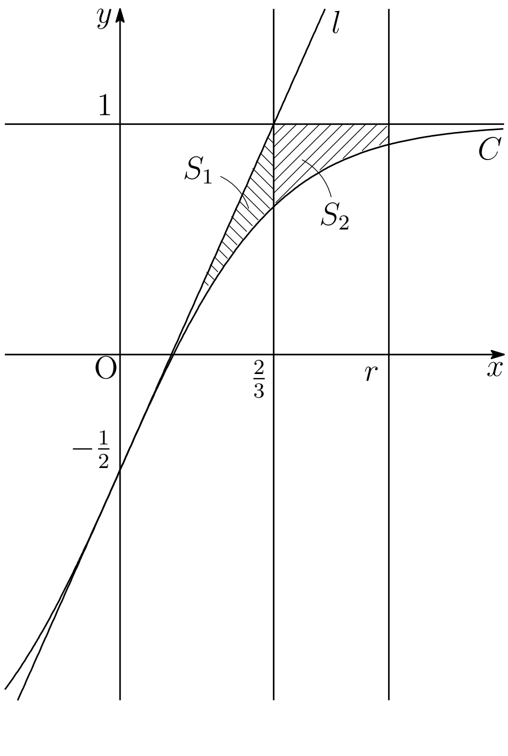
(4) $1 - f(x) = 1 - \left(1 - \dfrac{3}{e^{3x}+1}\right) = \dfrac{3}{e^{3x}+1} > 0$ より

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_{\frac{2}{3}}^{r} \{1 - f(x)\}\,dx = \Big[\ x - \log(e^x + e^{-2x})\ \Big]_{\frac{2}{3}}^{r} \\
&= r - \frac{2}{3} - \log(e^r + e^{-2r}) + \log(e^{\frac{2}{3}} + e^{-\frac{4}{3}}) \\
&= r - \frac{2}{3} - \log e^r(1 + e^{-3r}) + \log e^{\frac{2}{3}}(1 + e^{-2}) \\
&= -\log(1 + e^{-3r}) + \log(1 + e^{-2})
\end{aligned}$$

上式および (3) の結果から

$$\begin{aligned}
S(r) &= S_1 + S_2 \\
&= \frac{3}{2} - \log\frac{e^2+1}{2} - \log(1 + e^{-3r}) + \log(1 + e^{-2}) \\
&= \frac{3}{2} + \log\frac{2(1+e^{-2})}{e^2+1} + \log(1 + e^{-3r}) \\
&= \boldsymbol{\log 2 - \frac{1}{2} + \log(1 + e^{-3r})}
\end{aligned}$$

$\lim_{r\to\infty} e^{-3r} = 0$ であるから　$\boldsymbol{\lim_{r\to\infty} S(r) = \log 2 - \frac{1}{2}}$ ■



8 (1) $C: y=\dfrac{2}{x}$ より　$y'=-\dfrac{2}{x^2}$

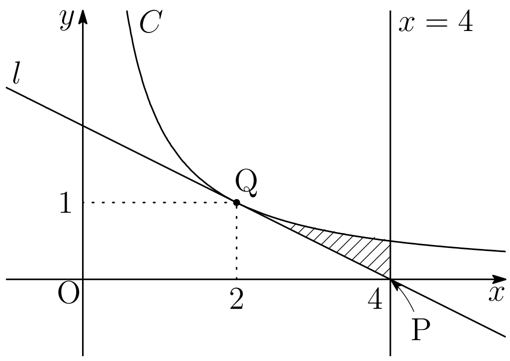
C 上の点 $\left(t,\ \dfrac{2}{t}\right)$ における接線の方程式は

$$y=-\frac{2}{t^2}(x-t)+\frac{2}{t}\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{2x}{t^2}+\frac{4}{t}\qquad \cdots①$$

これが点 $(4,\ 0)$ を通るとき $(t>0)$

$$0=-\frac{2\cdot 4}{t^2}+\frac{4}{t}\quad \text{これを解いて}\quad t=2$$

よって　$\mathbf{Q(2,\ 1)}$　① より　$\boldsymbol{l : y=-\dfrac{1}{2}x+2}$



(2) 求める面積を S とすると

$$S=\int_2^4 \frac{2}{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=\Big[\,2\log x\,\Big]_2^4-1=\mathbf{2\log 2-1}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_2^4\left(\frac{2}{x}\right)^2 dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 2\\&=4\pi\int_2^4\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{2}{3}\pi\\&=4\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4-\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

■