令和６年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
令和６年２月25日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 4 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 3 個のさいころの出る目が同じになる確率を求めよ．

(2) 次の不等式を解け．

$$|x^2+6x-1| \leqq 7-x$$

(3) 次の数の大小関係を調べ，小さい順に並べよ．ただし，$3.1 < \pi < 3.2$ を用いてよい．

$$\frac{1}{2}, \quad \log_{11}\pi, \quad \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の関数を考える．

$$y = 4\sin^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

また，$x = \sin\theta - \cos\theta$ とする．

(1) x のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) y を x の関数で表せ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

3 $c \geqq 3$ である実数 c に対して，x の 2 次方程式

$$x^2 - 2(c+1)x + c^2 - 2c + 9 = 0 \quad \cdots ①$$

を考える．

(1) 2 次方程式 ① は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ．

(1) の結果を用いて，次のように数列 $\{a_n\}$ を定める．$a_1 = 3$ とする．$c = a_1$ のときの方程式 ① の実数解のうち，a_1 より大きい方を a_2 とおく．次に $a_2 > 3$ が成り立つことに注意して，$c = a_2$ のときの方程式 ① の実数解のうち，a_2 より大きい方を a_3 とおく．これを繰り返す．すなわち，$3 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ が成り立ち，2 次方程式

$$x^2 - 2(a_n+1)x + {a_n}^2 - 2a_n + 9 = 0 \quad \cdots ②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} である．

(2) $n \geqq 2$ とする．2 次方程式 ② の実数解のうち，小さい方は a_{n-1} であることを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

(4) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めるとき，数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4 座標空間において，点 A(2, 0, 4)，点 B(3, −2, 5) を通る直線を l，点 C(3, 2, 2)，点 D(4, 3, 0) を通る直線を m とする．

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を，0° と 180° の間の範囲で答えよ．

(2) 直線 l，m が交わるか交わらないか調べよ．

(3) 直線 l，m の両方と交わり，両方と直交する直線を n とする．n と l の交点，および n と m の交点を求めよ．

$\boxed{5}$ 袋の中に $-1,\ 0,\ 1$ が書かれたカードがそれぞれ 1 枚，1 枚，m 枚ずつ入っている．ただし，m は自然数である．この袋の中から無作為に 2 枚同時に取り出す．取り出されたカードに書かれた数字をそれぞれ X，Y とする．ただし，$X \leqq Y$ とする．

(1) $m=2$ のとき，確率 $P(X \geqq 0)$ を求めよ．

(2) $m=9$ のとき，確率 $P(Y=1)$ を求めよ．

(3) XY の期待値 $E(XY)$ が正となるような m のうち，最小のものを求めよ．

$\boxed{6}$ 座標平面上で，放物線 C が次の方程式で与えられている．

$$C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$$

原点 O から放物線 C に引いた接線で，傾きが正のものを l とする．また，直線 l と放物線 C との共有点を A とする．

(1) 直線 l の方程式，および A の座標を求めよ．

(2) 直線 l と点 A で接する円で，放物線 C との共有点が 2 個であるものを求めよ．

(3) 放物線 C，直線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{7}$ n を自然数とし，次の整式を考える．

$$f(x) = x^{6n} + x^{3n} - 2,$$
$$g(x) = x^2 + x + 1, \qquad h(x) = x^2 - x + 1$$

(1) 方程式 $g(x) = 0$ の解は $x^3 - 1 = 0$ を満たし，方程式 $h(x) = 0$ の解は $x^3 + 1 = 0$ を満たすことを示せ．

ここで，$f(x)$ を 2 次式で割ると，商が $(6n-2)$ 次式，余りが 1 次以下の整式になることに注意すると

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad q(x) \text{ は } (6n-2) \text{ 次式},$$
$$r(x) \text{ は 1 次以下の整式}$$

と書ける．

(2) $r(x) = 0$，つまり $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

(3) $f(x)$ が $h(x)$ で割り切れるならば，n は偶数であることを示せ．

(4) $n = 1$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ のすべての虚数解を極形式で答えよ．

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ を考える．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，凹凸は調べなくてよい．

(2) 曲線 $y=f(x)$，直線 $x=\log 2$，x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) (2) で定めた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 4 個のさいころのうち，3 個の同じ目を A，残りの 1 個の目を B とする $(A \neq B)$．A，B の選び方が ${}_6\mathrm{P}_2$ 通りあるから，求める確率は

$$ {}_6\mathrm{P}_2 \times \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 = 6\cdot 5 \times 4 \times \frac{1}{6^4} = \boldsymbol{\frac{5}{54}} $$

(2) $|x^2+6x-1| \leqq 7-x$ より

$$ -(7-x) \leqq x^2+6x-1 \leqq 7-x $$

したがって

$$ \begin{cases} x^2+7x-8 \leqq 0 \\ x^2+5x+6 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -8 \leqq x \leqq 1 \\ x \leqq -3, \ -2 \leqq x \end{cases} $$

よって　　$\boldsymbol{-8 \leqq x \leqq -3, \ -2 \leqq x \leqq 1}$

補足 $|X| = \max(X, -X)$ であるから，不等式 $|X| \leqq Y$ について

$$ X \leqq Y \ \text{かつ} \ -X \leqq Y \quad \text{すなわち} \quad -Y \leqq X \leqq Y $$

(3) $3.1 < \pi < 3.2$ より　$9.61 < \pi^2 < 10.24 < 11$

$\pi < \sqrt{11}$ であるから　$\log_{11}\pi < \log_{11}\sqrt{11} = \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

また　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} > \dfrac{1}{2}$　$\cdots$②

①，② より　　$\boldsymbol{\log_{11}\pi < \frac{1}{2} < \sqrt[4]{\frac{1}{8}}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$ であるから　　$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}}$

(2) $x^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ より　$\sin\theta\cos\theta = \frac{1 - x^2}{2}$

$$\begin{aligned} y &= 4\sin^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \\ &= 4(\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta) + 3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta \\ &= 4x\left(1 + \frac{1 - x^2}{2}\right) + 3\sqrt{2}\cdot\frac{1 - x^2}{2} \\ &= \boldsymbol{-2x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 6x + \frac{3\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$y' = -6x^2 - 3\sqrt{2}x + 6 = -3(x + \sqrt{2})(2x - \sqrt{2})$$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{7\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{13\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\theta = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi$

$x = -\sqrt{2}$ のとき　$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$　すなわち　$\theta = \frac{7}{4}\pi$

よって　　$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\frac{13}{4}\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{\theta = \frac{7}{4}\pi}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-\frac{7}{2}\sqrt{2}}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=x^2-2(c+1)x+c^2-2c+9$ とおくと $(c \geqq 3)$

$$f(c)=-4c+9=-4(c-3)-3<0$$

$f(x)$ の x^2 の係数が正であるから，$f(x)=0$ は，c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつ．

(2) 2次方程式

$$x^2-2(a_n+1)x+{a_n}^2-2a_n+9=0 \quad \cdots ②$$

の実数解のうち，大きい方が a_{n+1} であるから，2次方程式

$$x^2-2(a_{n-1}+1)x+{a_{n-1}}^2-2a_{n-1}+9=0 \qquad (n \geqq 2)$$

の解が a_n であるから

$${a_n}^2-2(a_{n-1}+1)a_n+{a_{n-1}}^2-2a_{n-1}+9=0$$

上式を変形すると

$${a_{n-1}}^2-2(a_n+1)a_{n-1}+{a_n}^2-2a_n+9=0 \quad \cdots ③$$

③ から，a_{n-1} は2次方程式 ② の解である．

2次方程式 ② の2つの解 a_{n+1}，a_{n-1} は，(1) の結論から　$a_{n-1}<a_n<a_{n+1}$

(3) 2次方程式 ② の解と係数の関係により

$$a_{n+1}+a_{n-1}=2(a_n+1) \quad \text{よって} \quad a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$$

(4) $a_1=3$ を ② に代入すると　$x^2-8x+12=0$

これを解いて　$x=2,\ 6$　ゆえに　$a_2=6$

(3) の結果から　$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}+2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ をこれに適用すると　$b_n=b_{n-1}+2$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-a_1=6-3=3$，公差2の等差数列であるから

$$b_n=3+2(n-1)=\boldsymbol{2n+1}$$

$n>1$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2+2$

上式は $n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n=n^2+2}$　■

$\boxed{4}$ (1) A(2, 0, 4)，B(3, −2, 5)，C(3, 2, 2)，D(4, 3, 0) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, -2,\ 1),\quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (1,\ 1, -2) \qquad (*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のなす角を θ とすると $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|} = \frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = -\frac{1}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$

(2) $(*)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 3(1,\ 1,\ 1)$

l 上の点 A(2, 0, 4)，m 上の点 C(3, 2, 2) について　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,\ 2, -2)$

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3 \neq 0$$

したがって，直線 l，m は**交わらない．**

(3) n と l，n と m の交点をそれぞれ P，Q とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおけるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (2,\ 0,\ 4) + s(1, -2.\ 1) = (2 + s, -2s,\ 4 + s)\\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (3,\ 2,\ 2) + t(1,\ 1, -2) = (3 + t,\ 2 + t,\ 2 - 2t)\\
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (-s + t + 1,\ 2s + t + 2,\ -s - 2t - 2)
\end{aligned}$$

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{CD}}) /\!/ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから

$$-s + t + 1 = 2s + t + 2 = -s - 2t - 2$$

これを解いて　$s = -\dfrac{1}{3}$，$t = -1$

したがって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$，$\mathrm{Q}(2,\ 1,\ 4)$

よって　n と l の交点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)}$

n と m の交点は　$\boldsymbol{(2,\ 1,\ 4)}$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $m=2$ より，$-1,\ 0,\ 1,\ 1$ の 4 枚のカードから 2 枚取り出すとき，$X \geqq 0$ となるのは，$0,\ 1,\ 1$ の 3 枚のうち 2 枚を取り出す確率であるから

$$P(X \geqq 0) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2} = \frac{3}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) $m=9$ より，$-1,\ 0,\ \overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{9\,枚}$ の 11 枚のカードから 2 枚取り出すとき，$Y=0$ となるのは，$-1,\ 0$ の 2 枚のうち 2 枚を取り出す確率で

$$P(Y=0) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2} = \frac{1}{55}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{1}{55} = \boldsymbol{\frac{54}{55}}$$

(3) $-1,\ 0,\ \overbrace{1,\ \cdots,\ 1}^{m\,枚}$ の $m+2$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき，XY が正となるのは，$m \geqq 2$ であることが必要であるから

$$\begin{aligned}
P(X=Y=1) &= \frac{{}_m\mathrm{C}_2}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} \\
P(X=0,\ Y=1) &= \frac{1 \cdot {}_m\mathrm{C}_1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)} \\
P(X=-1,\ Y=1) &= \frac{1 \cdot {}_m\mathrm{C}_1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2m}{(m+2)(m+1)} \\
P(X=-1,\ Y=0) &= \frac{1 \cdot 1}{{}_{m+2}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{(m+2)(m+1)}
\end{aligned}$$

上の結果から，XY の確率分布表は次のようになる．

XY	-1	0	1	計
確率	$\frac{2m}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{2m+2}{(m+2)(m+1)}$	$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)}$	1

したがって

$$\begin{aligned}
E(XY) &= -1 \cdot \frac{2m}{(m+2)(m+1)} + 1 \cdot \frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} \\
&= \frac{m(m-3)}{(m+2)(m+1)}
\end{aligned}$$

よって，$E(XY) > 0$ となる最小の整数 m は　　$\boldsymbol{m=4}$ ■

$\boxed{6}$ (1) $C : 4x - 4y^2 - 3 = 0$ より　$x = y^2 + \dfrac{3}{4}$　ゆえに　$\dfrac{dx}{dy} = 2y$

逆関数定理により　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{2y}$

点Aの座標を $\left(a^2 + \dfrac{3}{4},\ a\right)$ とおくと，点Aにおける接線 l の方程式は，

その傾き $\dfrac{1}{2a}$ が正であることに注意して

$$l : y - a = \frac{1}{2a}\left\{x - \left(a^2 + \frac{3}{4}\right)\right\} \qquad (a > 0)$$

l は原点Oを通るから

$$-a = -\frac{1}{2a}\left(a^2 + \frac{3}{4}\right) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = \frac{3}{4}$$

$a > 0$ より，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　$\boldsymbol{l : y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}}$，　$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

(2) C 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における法線の方程式は

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -\sqrt{3}(x - 2)$$

この法線上に接する円の中心があるから，その中心を $\mathrm{T}(t + 2, -\sqrt{3}t)$ とし，C 上の点 $\mathrm{P}\left(y^2 + \dfrac{3}{4},\ y\right)$ とし，次の関数を考える．

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= \mathrm{TP}^2 - \mathrm{TA}^2 \\
&= \left(y^2 - t - \frac{5}{4}\right)^2 + (y + \sqrt{3}t)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= \left(y^2 - \frac{3}{4}\right)\left(y^2 - 2t - \frac{7}{4}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y + 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y^2 - 2t - \frac{7}{4}\right) + \left(y + 2\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left\{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{4}\right) - 2t\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \\
&= \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left\{\left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2t\right\}
\end{aligned}$$

$\varphi(y)=0$ が異なる 2 つの解をもてばよいから

$$\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2t=0$$

が重解 $\left(y\neq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ または $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解にもつときであるから

$$t=0\quad\text{または}\quad t=\frac{3}{2}$$

求める円の半径を r とすると

$$r^2=\mathrm{TA}^2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

中心 $\mathrm{T}(t+2,-\sqrt{3}t)$ より，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+y^2=1,\quad \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=16}$$

補足 $\frac{\sqrt{3}}{2}=a<s<t$ とし，C 上に 3 点

$$\mathrm{A}\left(a^2+\frac{3}{4},\ a\right),\ \mathrm{S}\left(s^2+\frac{3}{4},\ s\right),\ \mathrm{T}\left(t^2+\frac{3}{4},\ t\right)$$

をとる．3 点 A，S，T を通る円を考え，その中心を $(p,\ q)$，半径を r とし，関数

$$f(y)=\left(y^2+\frac{3}{4}-p\right)^2+(y-q)^2-r^2$$

を考えると，次式が成立する．

$$f(a)=f(s)=f(t)=0 \tag{$*$}$$

$f(y)$ の第 1 次導関数および第 2 次導関数を求めると

$$\begin{aligned}f'(y)&=4y\left(y^2+\frac{3}{4}-p\right)+2(y-q),\\ f''(y)&=4\left(y^2+\frac{3}{4}-p\right)+4y\cdot 2y+2\\ &=12y^2+5-4p\end{aligned}$$

$(*)$ にロルの定理を適用すると (ロルの定理は平均値の定理の一部)

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0 \qquad (a < c_1 < s < c_2 < t)$$

を満たす c_1，c_2 が存在する．上式にさらにロルの定理を適用すると

$$f''(c_3) = 0 \qquad (c_1 < c_3 < c_2)$$

を満たす c_3 が存在する．ここで，$t \to a$ とすると，次式が成立する．

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) = 0$$

したがって

$$4a\left(a^2 + \frac{3}{4} - p\right) + 2(a - q) = 0, \quad 12a^2 + 5 - 4p = 0$$

これを解いて

$$p = 3a^2 + \frac{5}{4}, \quad q = -4a^3 \quad \cdots ①$$

$f(a) = 0$ であるから

$$\left(a^2 + \frac{3}{4} - 3a^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (a + 4a^3) - r^2 = 0$$

整理すると

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^2 + a^2(1 + 4a^2)^2 \quad \cdots ② \\ &= \frac{1}{4}(1 + 4a^2)^3 \end{aligned}$$

これから，C 上の点 A における接触円 S_1 の中心および半径は

$$\text{中心}\left(3a^2 + \frac{5}{4}, -4a^3\right)，\text{半径}\ \frac{1}{2}(1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}}$$

補足 接触円 (曲率円) の中心を曲率中心といい，半径を曲率半径という．また，曲率中心は，C の A における法線上の点である．点 A で接する円の半径が曲率半径よりも大きいとき，円と C の共有点の個数は 3 個ある．また，点 A で接する円の半径が曲率半径よりも小さいときは，距離 2 乗関数を用いて確認する必要がある．

①，② により，$f(y)$ は

$$\begin{aligned}
f(y) &= \left(y^2+\frac{3}{4}-3a^2-\frac{5}{4}\right)^2+(y+4a^3)^2-\frac{1}{4}(1+4a^2)^2-a^2(1+4a^2)^2 \\
&= \left(y^2-3a^2-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}+2a^2\right)^2+(y+4a^3)^2-(a+4a^3)^2 \\
&= (y^2-a^2)(y^2-5a^2-1)+(y+8a^3+a)(y-a) \\
&= (y-a)\{(y+a)(y^2-5a^2-1)+(y+8a^3+a)\} \\
&= (y-a)(y^3+ay^2-5a^2y+3a^3) \\
&= (y-a)^3(y+3a)
\end{aligned}$$

$f(y)=0$ の解は 2 個であるから，S_1 は C と異なる 2 点を共有する．C の y 座標が $y<-3a,\ a<y$ のとき，C は S_1 の外部にあり，C の y 座標が $-3a<y<a$ のとき，C は S_1 の内部にある．

また，C の A における法線と x 軸の交点を B とすると　B$(2,\ 0)$
C の x 軸に関する対称性から，B を中心とする半径 BA の円 S_2 も異なる接点を 2 個もつこが分かるが，これ以外に共有点を持たないことを距離 2 乗関数を使って示す必要がある．

$$\mathrm{BA}^2=\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2=1$$

C 上の点 $\mathrm{P}\left(y^2+\frac{3}{4},\ y\right)$ をとり，次の関数 $g(y)$ を考える．

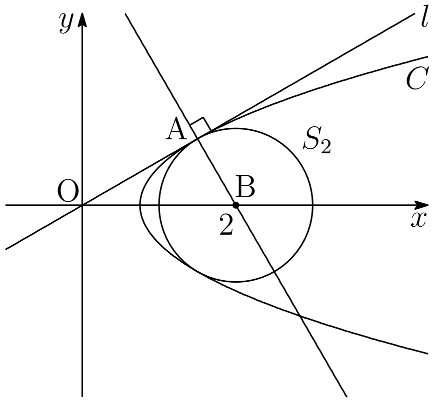
$$\begin{aligned}
g(y)=\mathrm{BP}^2-\mathrm{BA}^2 &= \left(y^2+\frac{3}{4}-2\right)^2+y^2-1 \\
&= \left(y^2-\frac{5}{4}\right)^2+y^2-1=y^4-\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{16} \\
&= \left(y^2-\frac{3}{4}\right)^2=\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

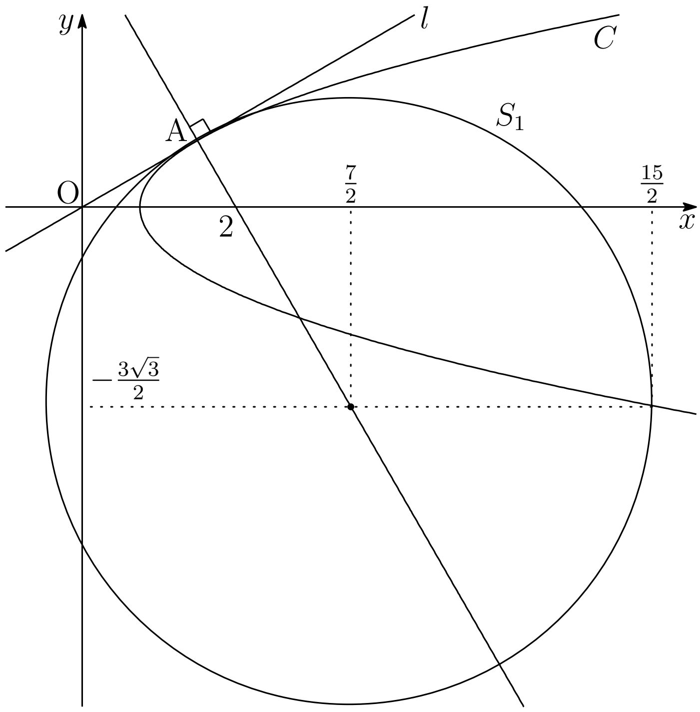
$g(y)=0$ の解は 2 個であるから，S_2 と C は異なる 2 点を共有する．
よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=16,\quad (x-2)^2+y^2=1}$$

(3) $C : x = y^2 + \dfrac{3}{4}$, $l : x = \sqrt{3}y$ の方程式から，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y^2 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}y \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 dy$$
$$= \frac{1}{3} \left[\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{8}}$$





$\boxed{7}$ (1) $g(x)=0,\ h(x)=0$ の解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると

$$g(\alpha)=0, \quad h(\beta)=0$$

$x^3-1=(x-1)g(x),\ x^3+1=(x+1)h(x)$ であるから

$$\alpha^3-1=(\alpha-1)g(\alpha)=0, \quad \beta^3+1=(\beta+1)h(\beta)=0$$

よって，方程式 $g(x)=0$ の解は $x^3-1=0$ を満たし，方程式 $h(x)=0$ の解は $x^3+1=0$ を満たす．

(2) (1) の結論から，$\alpha^3=1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^{6n}+\alpha^{3n}-2 \\ &= (\alpha^3)^{2n}+(\alpha^3)^n-2=1^{2n}+1^n-2=0 \end{aligned}$$

因数定理により，$f(x)$ は $g(x)$ を因数にもつ，すなわち，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．

別解 $f(x)$ が x^2+x+1 を因数にもつことを示す．

$$\begin{aligned} x^{6n}+x^{3n}-2 &= (x^{3n}+2)(x^{3n}-1) \\ &= (x^{3n}+2)(x^3-1)\sum_{k=1}^{n} x^{3(k-1)} \\ &= (x^{3n}+2)(x-1)(x^2+x+1)\sum_{k=1}^{n} x^{3(k-1)} \end{aligned}$$

(3) (1) の結論より，$\beta^3=-1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta^{6n}+\beta^{3n}-2=(\beta^3)^{2n}+(\beta^3)^n-2 \\ &= (-1)^{2n}+(-1)^n-2=(-1)^n-1 \end{aligned}$$

上式より，$f(\beta)=0$ となるのは，n が偶数のときであり，このとき，$f(x)$ は $h(x)$ を因数にもつ．

(4) $n=1$ のとき　$f(x)=x^6+x^3-2=(x^3+2)(x^3-1)$

$f(x)=0$ のとき　$x^3=-2$　または　$x^3=1$

$f(x)=0$ の解を次式で表す.

$$x=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad (r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

(i) $x^3=-2$ のとき，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=2(\cos\pi+i\sin\pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3=2,\quad 3\theta=\pi+2k\pi\quad (k \text{ は整数})$$

したがって　$r=\sqrt[3]{2},\quad \theta=\dfrac{2k+1}{3}\pi\quad (k=0,1,2)$

(ii) $x^3=1$ のとき，方程式は

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1(\cos 0+i\sin 0)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3=1,\quad 3\theta=2k\pi\quad (k \text{ は整数})$$

したがって　$r=1,\quad \theta=\dfrac{2k}{3}\pi\quad (k=0,1,2)$

(i)，(ii) から，$f(x)=0$ のすべての虚数解を表記すると

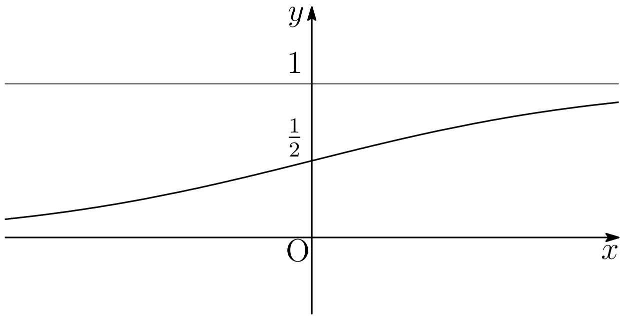
$$\boldsymbol{\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k+1}{3}\pi+i\sin\frac{2k+1}{3}\pi\right)\quad (k=0,2)},$$
$$\boldsymbol{\cos\frac{2k}{3}\pi+i\sin\frac{2k}{3}\pi\quad (k=1,2)}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{e^x+1}$ より　$f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$f(x)$ は単調増加で，グラフの概形は次のようになる．



(2) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\log 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \Big[\ \log(e^x+1)\ \Big]_0^{\log 2} = \boldsymbol{\log\frac{3}{2}}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\log 2} \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)^2 dx$$

$t = e^x + 1$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = e^x = t-1$

x	$0 \longrightarrow \log 2$
t	$2 \longrightarrow \quad 3$

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_2^3 \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 \frac{1}{t-1}\,dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \Big[\ \log t + \frac{1}{t}\ \Big]_2^3 = \log\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left(\log\frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)}$

■