令和５年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
令和５年２月25日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から１問選択．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から１問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から１問選択，$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ から１問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 3 辺の長さがそれぞれ 2，4，$2\sqrt{5}$ である三角形に内接する円の面積を求めよ．

(2) $\theta = \sqrt{5}+\sqrt{7}$ とする．有理数を係数とする 4 次の整式 $f(x)$ のうち，$f(\theta) = 0$ を満たし 4 次の項の係数が 1 となるものを 1 つ答えよ．

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げるとき，出る目の和が 7 以上である確率を求めよ．

$\boxed{2}$ 座標平面上の 2 点 A(0, 0)，B(0, $5k$) および放物線

$$C : y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$$

を考える．ただし，k は正の定数とする．

(1) 点 P が A，B からの距離の比が $3 : 2$ の点をすべて動くとき，P の軌跡を求めよ．

(2) (1) の軌跡と放物線 C の共有点の個数がちょうど 2 になるような k の値の範囲を求めよ．

3 自然数 n に対して，a_n，b_n を

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{5}$$

を満たす有理数とする．ただし，4 つの有理数 a, b, c, d が

$$a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$$

を満たせば $a = c$ かつ $b = d$ が成り立つので，a_n, b_n は各自然数 n に対し 1 通りに定まることに注意する．

(1) n が 3 の倍数であるとき，a_n, b_n がともに整数となることを示せ．

(2) 自然数 n が 3 の倍数であるとき，a_n, b_n のどちらか一方が偶数で他方が奇数となることを示せ．

(3) a_n, b_n がともに整数となるのは n が 3 の倍数のときに限ることを示せ．

4 空間に異なる 4 点 P，A，B，C があり，次の条件が満たされているとする．

- 三角形 PAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形である．
- 線分 PA と線分 PC は正六角形の隣り合う 2 辺である．この正六角形を α とおく．
- 線分 PB と線分 PC は α とは異なる正六角形の隣り合う 2 辺である．この正六角形を β とおく．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，および $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を求めよ．

さらに次の条件を満たすような異なる 3 点 H，Q，R を考える．

- H は線分 PA 上にある．
- Q は 3 点 P，A，B によって定まる平面を直線 PA で 2 分割した領域の B を含む側にあり，線分 HQ は長さ 1 で PA に垂直である．
- R は正六角形 α の内部にあり，線分 HR は長さ 1 で PA に垂直である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を用いてあらわせ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ のなす角を θ とするとき $\cos\theta$ を求めよ．

5 袋に赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている．無作為に玉を 1 個取り出して，それが赤玉であれば白玉と，白玉であれば赤玉と取り換えて袋に戻すという操作を考える．この操作を 2 回繰り返したあと袋にある赤玉の数を X とし，一方，3 回繰り返したあと袋にある白玉の数を Y とする．

(1) 確率 $P(X=4)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．

6 $x>0$ で定義された曲線

$$C : y = (\log x)^2$$

を考える．

(1) a を正の実数とするとき，点 $\mathrm{P}(a,\ (\log a)^2)$ における曲線 C の接線 L の方程式を求めよ．

(2) $a>1$ のとき，接線 L と x 軸の交点の x 座標が最大となる場合の a の値 a_0 を求めよ．

(3) a の値が (2) の a_0 に等しいとき，直線 L の $y \geqq 0$ の部分と曲線 C と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる図形の体積を求めよ．

7 次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) z_1，z_2 を異なる 2 つの複素数とするとき，$\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} \neq \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$ となることを示せ．ただし，$z_1 \neq -i$，$z_2 \neq -i$ とする．

(2) w を i 以外の複素数とするとき，$\dfrac{1+iz}{z+i} = w$ かつ $z \neq -i$ を満たす複素数 z が存在することを示せ．

(3) $-i$ 以外の複素数 z について，z の虚部が b となることと，$w = \dfrac{1+iz}{z+i}$ が $\left|w - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ を満たすことが同値になるように実数 b を定めよ．

8 実数全体で定義された関数 $f(x) = 2^x - 1$ を考える．

(1) 関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ を求めよ．またその定義域を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $2^2+4^2=(2\sqrt{5})^2$ より直角三角形である．直角を挟む 2 辺の長さが 2，4 であるから，三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$$

$s=\dfrac{1}{2}(2+4+2\sqrt{5})=3+\sqrt{5}$，内接円の半径を r とすると，$S=rs$ より

$$4=r(3+\sqrt{5})\quad ゆえに\quad r=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$$

よって，求める内接円の面積は

$$\pi r^2=\pi(3-\sqrt{5})^2=\boldsymbol{2(7-3\sqrt{5})\pi}$$

(2) $\theta=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ の両辺を平方すると

$$\theta^2=12+2\sqrt{35}\quad ゆえに\quad \theta^2-12=2\sqrt{35}$$

上の第 2 式をさらに平方すると

$$(\theta^2-12)^2=(2\sqrt{35})^2\quad 整理すると\quad \theta^4-24\theta^2+4=0$$

よって，条件を満たす 4 次式 $f(x)$ は　$\boldsymbol{f(x)=x^4-24x^2+4}$

(3) 起こりうる場合の総数は　6^3 (通り)

出た目の和が 6 以下の場合の数は　${}_6\mathrm{C}_3=20$ (通り)

これは，下の図のように ◯ と | が交互に 6 個並んだ 6 個のしきり (|) から，3 個のしきりを選び，それらのしきりによって区切られた ◯ の個数を左から順に，1 回目から 3 回目に出た目の数と考える．

◯|◯|◯|◯|◯|◯|

したがって，出た目の和が 6 以下である確率は　$\dfrac{20}{6^3}=\dfrac{5}{54}$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{5}{54}=\boldsymbol{\dfrac{49}{54}}$

補足 出た目の和が 6 となる場合の数は　${}_5\mathrm{C}_2=10$ (通り)

6 個の ◯ とその間の 5 個のしきり (|) から，2 個のしきりを選び，それらのしきりによって区切られた ◯ の個数を左から順に，1 回目から 3 回目に出た目の数と考える． ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする．Pに関する条件は　$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 3 : 2$

これより　$2\mathrm{AP} = 3\mathrm{BP}$　すなわち　$4\mathrm{AP}^2 = 9\mathrm{BP}^2$

$$\mathrm{AP}^2 = x^2 + y^2,\quad \mathrm{BP}^2 = x^2 + (y - 5k)^2$$

を代入すると　$4(x^2 + y^2) = 9\{x^2 + (y - 5k)^2\}$

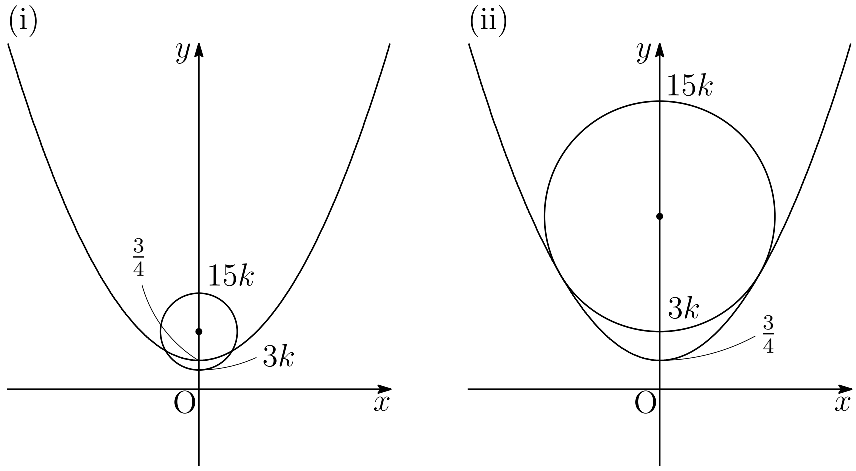
整理すると　$x^2 + y^2 - 18ky + 45k^2 = 0$

すなわち　$x^2 + (y - 9k)^2 = 36k^2$

よって，点Pの軌跡は　**中心 $(\mathbf{0},\ \boldsymbol{9k})$，半径 $\boldsymbol{6k}$ の円**

補足 点Pの軌跡は，$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 5k)$ を $3 : 2$ にそれぞれ内分および外分する2点 $(0,\ 3k)$，$(0,\ 15k)$ を直径の両端とする円である．

(2) (1) の軌跡と放物線 $C : y = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$ の共有点がちょうど2となるのは，下の図のように (i)，(ii) の場合がある．



(i) $3k < \dfrac{3}{4} < 15k$，すなわち，$\dfrac{1}{20} < k < \dfrac{1}{4}$

(ii) (1) の軌跡と C が接するとき，(1) と C の方程式から x を消去すると

$$3y - \frac{9}{4} + (y - 9k)^2 = 36k^2$$

整理すると　$y^2 - 3(6k - 1)y + 45k^2 - \dfrac{9}{4} = 0$　$\cdots(*)$

$(*)$ の判別式 D は　$D = 9(6k - 1)^2 - 4\left(45k^2 - \dfrac{9}{4}\right)$

$= 18(8k^2 - 6k + 1) = 18(2k - 1)(4k - 1)$

このとき，$3k > \dfrac{3}{4}$ に注意して，$D = 0$ を解くと　$k = \dfrac{1}{2}$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{20} < k < \dfrac{1}{4},\ k = \dfrac{1}{2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5}$ であるから，与えられた漸化式により

$$\begin{aligned} a_{n+3}+b_{n+3}\sqrt{5} &= (2+\sqrt{5})(a_n+b_n\sqrt{5}) \\ &= (2a_n+5b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

ゆえに　$a_3=2,\ \ b_3=1,\ \ a_{n+3}=2a_n+5b_n,\ \ b_{n+3}=a_n+2b_n$ $\quad(*)$

$(*)$ より，題意は成立する．

(2) $(*)$ より　$a_{n+3}+b_{n+3}=2(a_n+3b_n)+a_n+b_n$

n が 3 の倍数のとき，a_{n+3}，b_{n+3}，a_n，b_n は整数であるから，$a_{n+3}+b_{n+3}$ と a_n+b_n の偶奇が一致する．a_3+b_3 は奇数であるから，題意は成立する．

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\sqrt{5}$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ より

$$a_1=\frac{1}{2},\ b_1=\frac{5}{2},\ a_2=\frac{3}{2},\ b_2=\frac{1}{2} \qquad (\#)$$

$(*)$ より　$a_n=-2a_{n+3}+5b_{n+3},\ b_n=a_{n+3}-2b_{n+3}$ $\quad(**)$

a_N，b_N がともに整数となる $N\not\equiv 0 \pmod 3$ が存在すると仮定すると，$(*)$ および $(**)$ から，$k\equiv N \pmod 3$ について，a_k，b_k は整数となる．

これは $(\#)$ に反する．

よって，$k\not\equiv 0 \pmod 3$ のとき，a_k，b_k がともに整数となることはない．

したがって，このことと (1) の結論から，a_n，b_n がともに整数となるのは n が 3 の倍数のときに限る． ■

$\boxed{4}$ (1) 与えられた条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos\frac{\pi}{3} = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\frac{2}{3}\pi = 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\frac{2}{3}\pi = 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

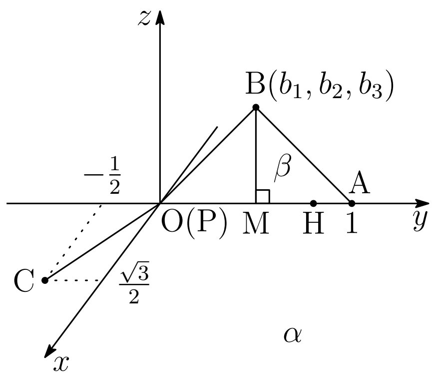
(2) 点Pを座標空間の原点Oとし，平面αをxy平面とし，A$(0,\ 1,\ 0)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，C$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\ 0\right)$とおき$(b_3>0)$，(1)の結果の第1・第3式および$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=1$に適用すると

$$b_2=\frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2=-\frac{1}{2},\quad {b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2=1$$

ゆえに　$b_1=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ b_3=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　すなわち　B$\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

Bからy軸に垂線BMを下ろすと，$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}$は$\overrightarrow{\mathrm{MB}}$と同じ向きの単位ベクトルであるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{HQ}} &= \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|}\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PM}})\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}}\end{aligned}$$



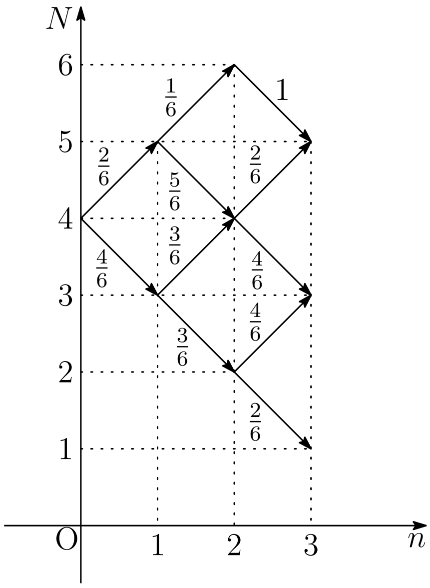
$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1,\ 0,\ 0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ より　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{HR}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{PC}}}$

(3) M$\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\ 0,\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，
$\overrightarrow{\mathrm{HR}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{HQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HR}}=|\overrightarrow{\mathrm{HQ}}||\overrightarrow{\mathrm{HR}}|\cos\theta$ より

$$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{1}{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) n 回繰り返した後の袋の中にある赤玉の個数が N である確率を $p_n(N)$ とすると



$$p_1(3)=\frac{4}{6},\ p_1(5)=\frac{2}{6}$$

$$p_2(2)=p_1(3)\cdot\frac{3}{6}=\frac{12}{36}$$

$$p_2(4)=p_1(3)\cdot\frac{3}{6}+p_1(5)\cdot\frac{5}{6}=\frac{22}{36}$$

$$p_2(6)=p_1(5)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$$

$$p_3(1)=p_2(2)\cdot\frac{2}{6}=\frac{24}{216}$$

$$p_3(3)=p_2(2)\cdot\frac{4}{6}+p_2(4)\cdot\frac{4}{6}=\frac{136}{216}$$

$$p_3(5)=p_2(4)\cdot\frac{2}{6}+p_2(6)\cdot 1=\frac{56}{216}$$

$P(X=4)=p_2(4)$ であるから　$P(X=4)=\dfrac{22}{36}=\mathbf{\dfrac{11}{18}}$

(2) $P(X=N)=p_2(N)$ であるから $(N=2,4,6)$

X	2	4	6	計
P	$\frac{6}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

したがって　$E(X)=2\cdot\dfrac{6}{18}+4\cdot\dfrac{11}{18}+6\cdot\dfrac{1}{18}=\mathbf{\dfrac{31}{9}}$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=2^2\cdot\frac{6}{18}+4^2\cdot\frac{11}{18}+6^2\cdot\frac{1}{18}-\left(\frac{31}{9}\right)^2=\mathbf{\frac{101}{81}}$$

(3) $E(Y=N)=p_3(6-N)$ であるから $(N=1,3,5)$

Y	1	3	5	計
P	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{3}{27}$	1

したがって　$E(Y)=1\cdot\dfrac{7}{27}+3\cdot\dfrac{17}{27}+5\cdot\dfrac{3}{27}=\mathbf{\dfrac{73}{27}}$ ■

6 (1) $C : y = (\log x)^2$ より　$y' = \dfrac{2\log x}{x}$

C 上の点 $(a,\ (\log a)^2)$ における接線の方程式は

$$y - (\log a)^2 = \frac{2\log a}{a}(x - a)$$

よって　$\boldsymbol{L : y = \dfrac{2x\log a}{a} - 2\log a + (\log a)^2}$

(2) L と x 軸の交点の x 座標は，(1) の結果に $y = 0$ を代入すると $(a > 1)$

$$x = -\frac{1}{2}a\log a + a \quad ゆえに \quad \frac{dx}{da} = \frac{1}{2}(1 - \log a)$$

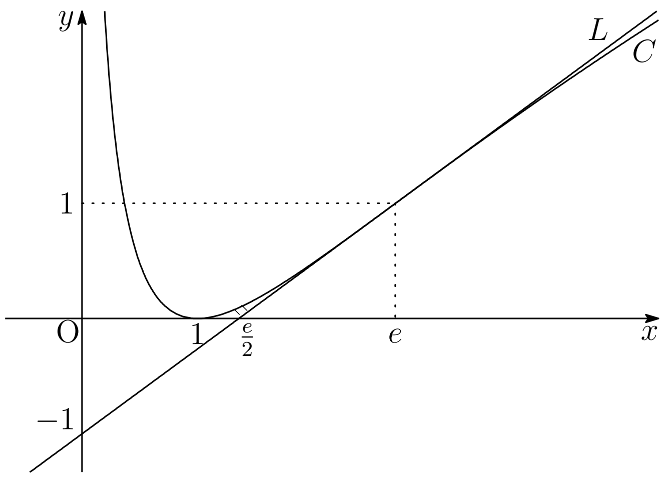
a	(1)	$\cdots$	e	$\cdots$
$\frac{dx}{da}$		$+$	0	$-$
x		$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$

よって，x 座標が最大となる a の値 a_0 は　$\boldsymbol{a_0 = e}$

(3) $a_0 = e$ のとき　$L : y = \dfrac{2x}{e} - 1$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^e \{(\log x)^2\}^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\left(e - \frac{e}{2}\right) \\ &= \pi\int_1^e (\log x)^4\,dx - \frac{\pi e}{6} \end{aligned}$$



補足 C 上の点 $(e,\ 1)$ は変曲点.

$t = \log x$ とおくと，$x = e^t$ より $\dfrac{dx}{dt} = e^t$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_1^e (\log x)^4\,dx &= \int_0^1 t^4 e^t\,dt = \Big[\,(t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 24t + 24)e^t\,\Big]_0^1 \\ &= 9e - 24\end{aligned}$$

よって　$V = \pi(9e - 24) - \dfrac{\pi e}{6} = \boldsymbol{\pi\left(\dfrac{53}{6}e - 24\right)}$

解説 $f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\varphi_k'(x) &= \frac{1}{k}\left\{f'(x) - \frac{f''(x)}{k} + \frac{f'''(x)}{k^2} - \cdots\right\} \\ &= -\left\{-\frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} \\ &= f(x) - \left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} \\ &= f(x) - k\varphi_k(x)\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\{\varphi_k(x)e^{kx}\}' &= \varphi_k'(x)e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx} \\ &= \{f(x) - k\varphi_k(x)\}e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx} \\ &= f(x)e^{kx}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int f(x)e^{kx}\,dx &= \varphi_k(x)e^{kx} + C \qquad (C\text{ は積分定数}) \\ &= \frac{1}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\}e^{kx} + C\end{aligned}$$

とくに，$k = \pm 1$ のとき

$$\int f(x)e^x\,dx = \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\}e^x + C$$
$$\int f(x)e^{-x}\,dx = -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\}e^{-x} + C$$

発展 前ページの結論から，$f(x)$ が何回でも微分可能であるとき

$$\int f(x)e^{kx}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{(-k)^{n+1}}e^{kx} + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

k を ki に置き換えると

$$\int f(x)e^{kxi}\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{(-ki)^{n+1}}e^{kxi} + C \tag{$*$}$$

このとき $\quad e^{kxi} = \cos kx + i\sin kx,$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-ki)^{n+1}} &= \frac{i^{n+1}}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\\ &= \frac{1}{k^{n+1}}\left(\cos\frac{n+1}{2}\pi + i\sin\frac{n+1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

$(*)$ の実部を比較すると

$$\begin{aligned}\int f(x)\cos kx\,dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\cos\left(kx + \frac{n+1}{2}\pi\right) + C\\ &= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n}}\sin\left(kx + \frac{n}{2}\pi\right) + C\end{aligned}$$

同様に，$(*)$ の虚部を比較すると

$$\begin{aligned}\int f(x)\sin kx\,dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\sin\left(kx + \frac{n+1}{2}\pi\right) + C\\ &= -\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{k^{n}}\cos\left(kx + \frac{n}{2}\pi\right) + C\end{aligned}$$

注意 $\sin\left(\theta + \frac{n}{2}\pi\right)$，$\cos\left(\theta + \frac{n}{2}\pi\right)$ は，$\sin\theta \to \cos\theta \to -\sin\theta \to -\cos\theta \to \sin\theta$ の順に巡回するから，例えば次のように計算する．

$$\begin{aligned}\int x^4\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\left\{x^4\sin 2x + \frac{4x^3}{2}\cos 2x + \frac{12x^2}{2^2}(-\sin 2x)\right.\\ &\qquad\left. + \frac{24x}{2^3}(-\cos 2x) + \frac{24}{2^4}\sin 2x\right\} + C\\ &= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}\right)\sin 2x + \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\cos 2x + C\end{aligned}$$

■

$\boxed{7}$ (1) $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq -i$, $z_2 \neq -i$ のとき

$$\frac{1+iz_1}{z_1+i} - \frac{1+iz_2}{z_2+i} = \frac{2(z_1-z_2)}{(z_1+i)(z_2+i)} \neq 0$$

このとき，$\dfrac{1+iz_1}{z_1+i} \neq \dfrac{1+iz_2}{z_2+i}$ となる．

(2) $\dfrac{1+iz}{z+i} = w$ $(w \neq -i)$ より　$1+iz = w(z+i)$

$$(w-i)z = 1-iw \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{1-iw}{w-i}$$

よって，与えられた条件を満たす z が存在する．

(3) $w = \dfrac{1+iz}{z+i}$ が $\left|w - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ を満たすとき　$\left|\dfrac{1+iz}{z+i} - \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$

$$\left|\frac{iz+3}{2(z+i)}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |z-3i| = |z+i|$$

z は 2 点 $3i, -i$ を結ぶ垂直に二等分線，すなわち，z は虚部が 1 の複素数である．よって　$\boldsymbol{b=1}$

解説 $f_1(z) = z+i$，$f_2(z) = \dfrac{1}{z}$，$f_3(z) = 2z$ とおくと，これは順に，平行移動，反転，拡縮 (回転) を表す (拡縮・回転は，c を複素数として cz で表される)．これらの合成変換をメビウス変換という [1]．

本題の $w = \dfrac{1+iz}{z+i} = \dfrac{2}{z+i} + i$ は，$w = f_1 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ で与えられる．

z の虚部が b であるとき，$z = (b+1)\tan\theta + bi$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{(b+1)(\tan\theta + i)} + i = \frac{2\cos\theta}{(b+1)(\sin\theta + i\cos\theta)} + i \\ &= \frac{2}{b+1}\cos\theta(\sin\theta - i\cos\theta) + i = \frac{1}{b+1}(\sin 2\theta - i\cos 2\theta) + \frac{b}{b+1}i \end{aligned}$$

$2\theta = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ とおくと $\left(-\dfrac{3}{2}\pi < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$w = \frac{1}{b+1}(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{b}{b+1}i$$

w $(w \neq i)$ は中心 $\dfrac{i}{2}$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円であるから　$\boldsymbol{b=1}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$ の解説を参照．

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = 2^x - 1$ のとき，$y = f(x)$ を x について解くと

$$y = 2^x - 1 \quad ゆえに \quad x = \log_2(y+1)$$

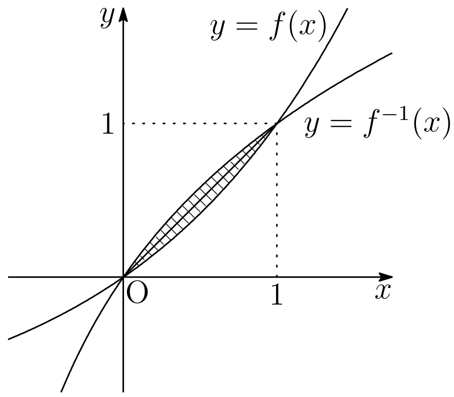
したがって　　$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \log_2(x+1) \quad (x > -1)}$

(2) $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ の共有点は，直線 $y = x$ 上にある．
$y = f(x)$ は下に凸の曲線であるから，直線 $y = x$ との共有点は高々2個である．$f(0) = 0,\ f(1) = 1$ より，求める共有点は　$\mathbf{(0,\ 0),\ (1,\ 1)}$

(3) 求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \int_0^1 (2^x - 1)\,dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{2^x}{\log 2} - x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{\log 2}$$

よって　$\boldsymbol{S = 3 - \dfrac{2}{\log 2}}$



■