令和４年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
令和４年２月２５日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 9$，$\mathrm{CA} = 6$ である三角形 ABC を考える．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線 AH の長さを求めよ．

(2) $ab = 4a - b$ を満たす正の整数 a, b の組をすべて求めよ．

(3) 正 $2n$ 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_{2n-1}\mathrm{A}_{2n}$ の異なる 3 つの頂点を結んで三角形を作る．このような三角形の作り方は何通りあるか．なお，頂点が異なれば異なる三角形であるとする．またこのような三角形を任意に選ぶとき，それが直角三角形となる確率 p を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) a, b, c が 1 でない正の実数のとき，次の等式が成立することを証明せよ．

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) $s = \log_{10} 2$，$t = \log_{10} 3$ とするとき，$\log_{30} 600$ を s と t を用いて表せ．

(3) 次の関数の最大値と最小値を求めよ．またそのときの x の値を求めよ．

$$y = 2(\log_5 x)^2 - \log_5 x^8 + 6 \quad (1 \leqq x \leqq 125)$$

3 各項が正となる数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n \geqq 2)$$

を満たすとする．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) c を実数とする．3 以上のすべての自然数 n に対して

$$(a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} = a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2})$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 3 以上のすべての自然数 n に対して

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．

4 平行六面体 OAFB − CEGD を考える．t を正の実数とし，辺 OC を $1 : t$ に内分する点を M とする．また三角形 ABM と直線 OG の交点を P とする．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, t を用いて表せ．

(2) 四面体 OABE の体積を V_1 とし，四面体 OABP の体積を V_2 とするとき，これらの比 $V_1 : V_2$ を求めよ．

(3) 三角形 OAB の重心を Q とする．直線 FC と直線 QP が平行になるとき，t の値を求めよ．

5 大小 2 個のサイコロを同時に投げる．大きいサイコロの出る目を十の位，小さいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を X とし，小さいサイコロの出る目を十の位，大きいサイコロの出る目を一の位としてできる 2 桁の数を Y とする．

(1) 確率 $P(X - Y > 0)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 確率変数 $X - Y$ の標準偏差 $\sigma(X - Y)$ を求めよ．

$\boxed{6}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の関数の導関数を求めよ．

$$y = \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

(2) $a > 0$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx < \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(3) 次の不等式が成立することを示せ．

$$\frac{\pi}{4} < \log(1+\sqrt{2})$$

$\boxed{7}$ 曲線 C の媒介変数表示が

$$x = \cos^3 t, \quad y = 3\sin^3 t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられているとする．また曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ 3\sin^3 t)$ における接線を ℓ とする．さらに原点を中心とする半径 r の円が直線 ℓ と接しているとする．

(1) 直線 ℓ の方程式は

$$y = -3(\tan t)x + 3\sin t$$

と表されることを示せ．

(2) $\alpha = \cos^2 t$ とするとき，r^2 は

$$r^2 = \frac{9\alpha(\alpha-1)}{8\alpha-9}$$

と表されることを示せ．

(3) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ における r の最大値を求めよ．またそのときの t の値を求めよ．

$\boxed{8}$ 曲線 $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ を C とする．C の接線で点 $(0,\ 1)$ を通るものを ℓ とする．また C の法線で傾きが -2 のものを n とする．

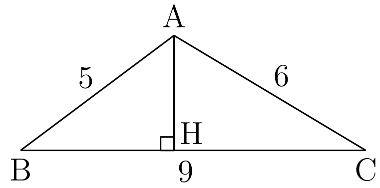
(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 直線 n の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C，直線 ℓ および直線 n で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 余弦定理を $\triangle$ABC に適用すると



$$\cos B = \frac{5^2+9^2-6^2}{2{\cdot}5{\cdot}9} = \frac{7}{9}$$

ゆえに　$\sin B = \sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

よって　$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin B = 5{\cdot}\frac{4\sqrt{2}}{9} = \boldsymbol{\frac{20\sqrt{2}}{9}}$

別解 $a=9$，$b=6$，$c=5$ であるから，$s=\frac{a+b+c}{2}=10$，$\triangle$ABC の面積を S とすると，ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{10(10-9)(10-6)(10-5)} = 10\sqrt{2}$$

$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}{\cdot}\mathrm{AH}$ より　$\frac{1}{2}{\cdot}9{\cdot}\mathrm{AH} = 10\sqrt{2}$　よって　$\mathrm{AH}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$

(2) $ab=4a-b$ より　$(a+1)(b-4)=-4$

a，b は正の整数であるから，$a+1 \geqq 2$，$b-4 \geqq -3$ に注意して

$$\begin{cases} a+1=2 \\ b-4=-2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a+1=4 \\ b-4=-1 \end{cases}$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ 2),\ (3,\ 3)}$

(3) $2n$ 個の頂点から異なる 3 つの頂点を結んでできる三角形の総数は

$$_{2n}\mathrm{C}_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \boldsymbol{\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}} \ (\text{個})$$

円周角が 90° となるのは，弦が直径であるときに限る．直径のとり方が $\frac{2n}{2}$ 通りあり，その円周角のとり方が直径の両端を除く $2n-2$ 個ある．したがって，直角三角形の総数は

$$\frac{2n}{2}(2n-2) = 2n(n-1) \ (\text{個})$$

よって，求める確率は　$2n(n-1)\Big/\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3} = \boldsymbol{\frac{3}{2n-1}}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 対数の定義から　$b = a^p \iff p = \log_a b$

$q = \log_c a$ とすると　$a = c^q$　ゆえに　$b = a^p = c^{pq}$

したがって，対数の定義により　$pq = \log_c b$　(条件から $pq \neq 0$)

$$\log_a b \log_c a = \log_c b \quad \text{よって} \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(2) (1) で示した等式を用いて

$$\begin{aligned}\log_{30} 600 &= \frac{\log_{10} 600}{\log_{10} 30} = \frac{\log_{10}(2{\cdot}3{\cdot}10^2)}{\log_{10}(3{\cdot}10)} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + 2}{\log_{10} 3 + 1} = \boldsymbol{\frac{s+t+2}{t+1}}\end{aligned}$$

(3) 与えられた関数

$$y = 2(\log_5 x)^2 - \log_5 x^8 + 6 \quad (1 \leqq x \leqq 125)$$

について，$t = \log x$ とおくと　$y = 2t^2 - 8t + 6 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

$$y = 2(t-2)^2 - 2$$

よって　$t = 0$，すなわち，$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき最大値 6**

$t = 2$，すなわち，$\boldsymbol{x = 25}$ **のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$**

補足 $p = \log_a b$ より，$b = a^p$ の両辺を c を底とする対数をとると

$$\begin{aligned}\log_c b &= \log_c a^p \\ &= p \log_c a\end{aligned}$$

の式変形を別途証明 (省略) した上で，次に続く．

$$p = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{よって} \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{(証終)}$$

さらに，p の底 a を c，d に変換すると　$\dfrac{\log_c b}{\log_c a} = \dfrac{\log_d b}{\log_d a}$

$$\log_c a \log_d b = \log_d a \log_c b$$

これらの積は底 (真数) について互換性が成立する．

例えば　$\log_3 8 \log_2 9 = \log_2 8 \log_3 9 = 3{\cdot}2 = 6$　■

3 (1) $a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1 > 0$ より，すべての自然数 n で，$a_n \neq 0$ であるから [1]

$$a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 + 1}{a_{n-1}} \quad (n \geqq 2)$$

$a_1 = 1$，$a_2 = 2$ であるから，$n = 2,\ 3,\ 4$ を上式に順次代入すると

$$a_3 = \frac{{a_2}^2 + 1}{a_1} = \frac{2^2 + 1}{1} = \mathbf{5},$$
$$a_4 = \frac{{a_3}^2 + 1}{a_2} = \frac{5^2 + 1}{2} = \mathbf{13},$$
$$a_5 = \frac{{a_4}^2 + 1}{a_3} = \frac{13^2 + 1}{5} = \mathbf{34}$$

(2) $a_{n+1}a_{n-1} = {a_n}^2 + 1$ より $({a_{n-1}}^2 = a_n a_{n-2} - 1)$

$$\begin{aligned}(a_{n+1} + ca_n + a_{n-1})a_{n-1} &= a_{n+1}a_{n-1} + ca_na_{n-1} + {a_{n-1}}^2 \\ &= ({a_n}^2 + 1) + ca_na_{n-1} + (a_na_{n-2} - 1) \\ &= a_n(a_n + ca_{n-1} + a_{n-2})\end{aligned}$$

(3) すべての n について，$a_n \neq 0$ であるから，(2) の結果より

$$\frac{a_{n+1} + ca_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + ca_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

したがって $\quad \dfrac{a_n + ca_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \dfrac{a_3 + ca_2 + a_1}{a_1}$

$c = -3$ のとき，$a_3 + ca_2 + a_1 = 5 - 3{\cdot}2 + 1 = 0$ より

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

補足 フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ の特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$f_n - (\alpha + \beta)f_{n-1} + \alpha\beta f_{n-2} = 0$$

$f_1 = 1,\ f_2 = 1$ であるから $\qquad f_n = \dfrac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$

$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$ より，$\alpha^2 + \beta^2 = 3,\ \alpha^2\beta^2 = 1$ であるから

$$a_n - (\alpha^2 + \beta^2)a_{n-1} + \alpha^2\beta^2 a_{n-2} = 0$$

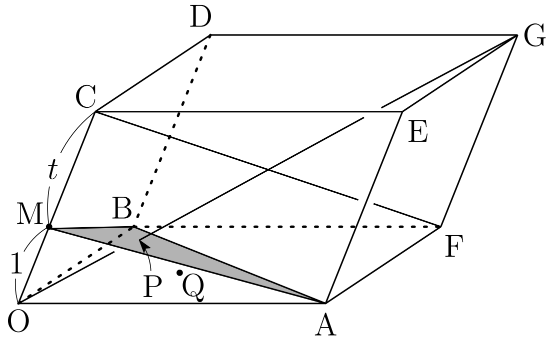
$a_1 = 1,\ a_2 = 2$ より $\qquad a_n = \dfrac{\beta^{2n-1} - \alpha^{2n-1}}{\beta - \alpha} = f_{2n-1}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2015.pdf [4] を参照.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=(3+t)\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{1+1+(1+t)}=(3+t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3+t}}$



(2) 四面体OABEの体積と四面体OAGBの体積は等しいから，(1) の結果より

$$\boldsymbol{V_1 : V_2 = 3+t : 1}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\\\overrightarrow{\mathrm{QP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3+t}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})\\&=\frac{1}{3+t}\left(-\frac{t}{3}\vec{a}-\frac{t}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{FC}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であるから　$-\dfrac{t}{3}=-1$　よって　$\boldsymbol{t=3}$ ■

$\boxed{5}$ (1) 大きいサイコロ，小さいサイコロの目をそれぞれ，A, B とすると

$$X = 10A + B, \quad Y = 10B + A \quad (A, B = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$X - Y = 9(A - B)$ より，$X - Y = 0$ のとき，$A = B$ であるから

$$P(X - Y = 0) = P(A = B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$P(X - Y > 0) + P(X - Y = 0) + P(X - Y < 0) = 1$,
$P(X - Y > 0) = P(X - Y < 0)$ であるから

$$P(X - Y > 0) = \frac{1}{2}\{1 - P(X - Y = 0)\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

(2) $E(A) = E(B)$, $V(A) = V(B)$ により (A, B は独立変数)

$$E(X) = E(10A + B) = 10E(A) + E(B) = 11E(A),$$
$$V(X) = V(10A + B) = 10^2V(A) + V(B) = 101V(A)$$

このとき　$E(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot7 = \frac{7}{2}$,

$$V(A) = E(A^2) - E(A)^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

よって　$E(X) = 11\cdot\frac{7}{2} = \mathbf{\frac{77}{2}}$,　$V(X) = 101\cdot\frac{35}{12} = \mathbf{\frac{3535}{12}}$

(3) (2) の $V(A)$, $V(B)$ を用いると

$$V(A - B) = V(A + (-B)) = V(A) + V(-B)$$
$$= V(A) + (-1)^2V(B) = 2V(A) = 2\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{6},$$
$$V(X - Y) = V(9(A - B)) = 9^2V(A - B) = 9^2\cdot\frac{35}{6}$$

よって　$\sigma(X - Y) = \sqrt{V(X - Y)} = 9\sqrt{\frac{35}{6}} = \mathbf{\frac{3}{2}\sqrt{210}}$

補足 A, B は独立変数であるから　$V(A - B) = V(A) + V(B)$
X, Y は独立変数ではないから　$V(X - Y) \neq V(X) + V(Y)$ ■

6 (1) $y=\log|x+\sqrt{x^2+1}|$ を微分すると

$$y'=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(2) $x\neq 0$ のとき $\quad \dfrac{1}{1+x^2}<\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

したがって，$a>0$ のとき，次式が成立する．

$$\int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad (*)$$

(3) $a=1$ を $(*)$ に代入すると

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx<\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad (**)$$

$(**)$ の左辺について，$x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{dx}{d\theta}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$(**)$ の右辺について，(1) の結果を用いると

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\Big[\ \log|x+\sqrt{x^2+1}|\ \Big]_0^1=\log(1+\sqrt{2})$$

以上の結果を $(**)$ に代入すると

$$\frac{\pi}{4}<\log(1+\sqrt{2})$$

■

$\boxed{7}$ (1) $C : x = \cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t\cos^2 t,\quad \frac{dy}{dt} = 9\sin^2 t\cos t$$

このとき，$0 < \sin t < 1$，$0 < \cos t < 1$ に注意して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{9\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t} = -\frac{3\sin t}{\cos t} = -3\tan t$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{P}(\cos^3 t,\ 3\sin^3 t)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - 3\sin^3 t = -3(\tan t)(x - \cos^3 t)$$

したがって　$y = -(3\tan t)x + 3\sin t(\sin^2 t + \cos^2 t)$

よって　$y = -3(\tan t)x + 3\sin t$

(2) r は $\ell : 3(\tan t)x + y - 3\sin t = 0$ と原点の距離 r により　$r = \dfrac{|-3\sin t|}{\sqrt{9\tan^2 t + 1}}$

$\alpha = \cos^2 t$ とすると

$$r^2 = \frac{9\sin^2 t}{9\tan^2 t + 1} = \frac{9(1-\cos^2 t)}{9\left(\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1\right) + 1} = \frac{9(1-\alpha)}{9\left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right) + 1}$$
$$= \frac{9\alpha(1-\alpha)}{9(1-\alpha) + \alpha} = \frac{9\alpha(\alpha - 1)}{8\alpha - 9}$$

(3) (2) の結果から

$$r^2 = \frac{(8\alpha - 9)\left(\dfrac{9}{8}\alpha + \dfrac{9}{64}\right) + \dfrac{81}{64}}{8\alpha - 9} = \frac{9}{8}\alpha + \frac{9}{64} + \frac{81}{64}\cdot\frac{1}{8\alpha - 9}$$
$$= \frac{9}{64}(8\alpha - 9 + 9) + \frac{9}{64} + \frac{81}{64}\cdot\frac{1}{8\alpha - 9} = \frac{45}{32} - \frac{9}{64}\left(9 - 8\alpha + \frac{9}{9 - 8\alpha}\right)$$

$9 - 8\alpha > 0$ であるから $(0 < \alpha < 1)$，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$9 - 8\alpha + \frac{9}{9 - 8\alpha} \geqq 2\sqrt{(9 - 8\alpha)\cdot\frac{9}{9 - 8\alpha}} = 6 \quad ゆえに \quad r^2 \leqq \frac{9}{16}$$

上式で等号が成立するとき　$9 - 8\alpha = \dfrac{9}{9 - 8\alpha}$　すなわち　$\alpha = \dfrac{3}{4}$

$\cos^2 t = \dfrac{3}{4}\ \left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\boldsymbol{t = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき，r は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$ をとる．■

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=\sqrt{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線は

$$y-\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad y=\frac{x}{2\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{t}}{2} \qquad (*)$$

これが点 $(0,\ 1)$ を通るから　$1=\dfrac{\sqrt{t}}{2}$　これを解いて　$t=4$

ℓ は，$t=4$ を $(*)$ に代入して　　$\boldsymbol{y=\dfrac{x}{4}+1}$

(2) C 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線 n の傾きが -2 であるとき

$$-2f'(a)=-1\quad \text{ゆえに}\quad f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\quad \text{これを解いて}\quad a=1$$

したがって，法線 n は点 $(1,\ 1)$ を通り，傾き -2 の直線であるから

$$y-1=-2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-2x+3}$$

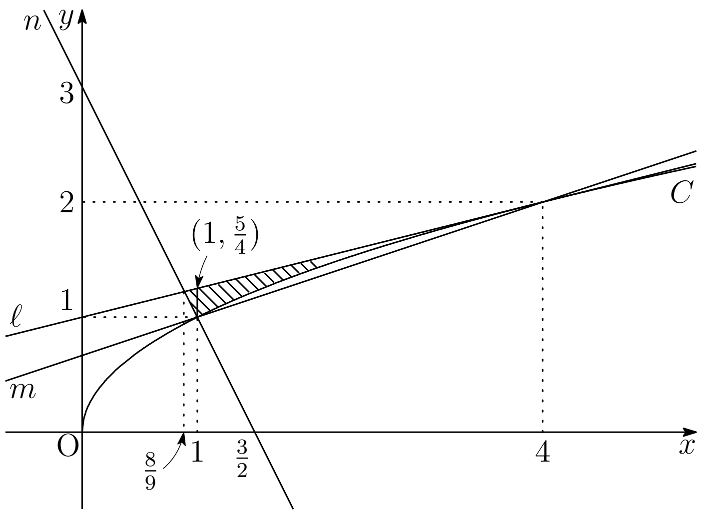
(3) 2 点 $(1,\ 1)$，$(4,\ 2)$ を通る直線を m とすると　$m: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

3 直線 $\ell,\ m,\ n$ で囲まれた三角形の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}-1\right)\left(4-\frac{8}{9}\right)=\frac{7}{18}$$

$C: x=y^2 (y \geqq 0)$ と $m: x=3y-2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\int_1^2\{(3y-2)-y^2\}\,dy=\int_1^2(y-1)(2-y)\,dy=\frac{1}{6}(2-1)^3=\frac{1}{6}$$



よって，求める面積は　　$S_1-S_2=\dfrac{7}{18}-\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$ ■