令和３年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
令和３年２月25日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から１問選択．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から１問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から１問選択，$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ から１問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) p，q を実数とする．2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が異なる解 α，β をもつとき，$\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}$ を p，q を用いて表せ．

(2) 斜辺の長さが一定の直角三角形のうち，面積が最大のものは，直角二等辺三角形であることを示せ．

(3) $\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$，$\cos 1$ という 4 つの数値を小さい方から順に並べよ．ただし，1，2，3 は，それぞれ 1 ラジアン，2 ラジアン，3 ラジアンを表す．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $0<a<1$ とする．このとき，次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x)=x^3+3(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a}+\log_{\frac{1}{8}}4)x^2-4(\log_{\frac{1}{4}}a)x-4(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a})^3$$

(1) $b=\log_{\frac{1}{4}}a$ とおく．関数 $f(x)$ を，対数が現れない形で，b を用いて表せ．

(2) $f'(x)=0$ となる x を求めよ．

(3) $f(x)$ の極大値が $\dfrac{9}{2}$ であるとする．このとき，a の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2, \quad (n+1)a_{n+1} = (n+3)a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ とするとき，$b_{n+1} - b_n$ を n を用いて表せ．

(2) 次の等式が k についての恒等式となるように，定数 p の値を定めよ．

$$\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)} = \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)} - \frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{4}$ 平面上の三角形 ABC は $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ の三角形で，$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{AC} = 8$ とする．$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし，$\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線と辺 AC の交点を E とする．

(1) 辺 BC の長さを求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(3) 線分 AD と線分 BE の交点を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

$\boxed{5}$ 1，2，3，4，5，6 の数字が 1 つずつ記入された 6 枚のカードを袋の中に入れる．この袋の中から 2 枚のカードを同時に抜き出し，それらのカードの数の大きい方を X，小さい方を Y とする．

(1) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X と Y は互いに独立であるか，独立でないか，答えよ．

(3) 確率変数 XY の期待値 $E(XY)$ を求めよ．

$\boxed{6}$ 実数全体で微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \int_0^x e^t f(t)\,dt\right)$$

を満たすとする．ただし，e は自然対数の底とし，以下では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよいものとする．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．また，$f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，グラフの概形をかけ．

(3) $a > 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 1$，$x = 0$ および $x = a$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．

$\boxed{7}$ α は複素数，A は実数で $|\alpha|^2 - A > 0$ を満たすものとする．複素数 z に関する方程式

$$|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + A = 0$$

を (★) とする．ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{z}$ はそれぞれ α，z の共役複素数とする．

(1) (★) は円を表す方程式であることを示せ．また，この円の中心および半径を α と A を用いて表せ．

(2) 複素数平面上の 0 でない異なる 2 点 z_1，z_2 が $z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0$ を満たすならば，3 点 0，z_1，z_2 は同一直線上にあることを示せ．ただし，$\overline{z_1}$，$\overline{z_2}$ はそれぞれ z_1，z_2 の共役複素数とする．

(3) 複素数平面上の異なる 3 点 0，z_1，z_2 は同一直線上にないものとする．3 点 0，z_1，z_2 を通る円が (★) で表されるとき，A の値を求め，さらに α を z_1 と z_2 を用いて表せ．

$\boxed{8}$ 曲線 $y = \tan x \ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする．

また，C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$ における法線を n とする．

(1) 法線 n の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C，法線 n および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

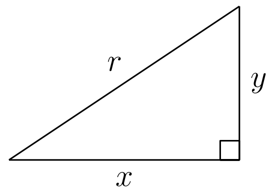
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 2次方程式 $x^2+px+q=0$ の解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \neq \beta)$ と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p, \quad \alpha\beta=q$$

したがって
$$\begin{aligned}\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta} &= \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha-\beta} \\ &= (\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\} \\ &= -p\{(-p)^2-2q\} = \boldsymbol{-p^3+2pq}\end{aligned}$$

(2) 直角をはさむ2辺の長さを $x,\ y$，斜辺を r とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}xy &= \frac{1}{4}\{x^2+y^2-(x-y)^2\} \\ &= \frac{1}{4}r^2-\frac{1}{4}(x-y)^2\end{aligned}$$



r は定数であるから，三角形の面積 $\frac{1}{2}xy$ は，$x=y$ のとき最大となる．

よって，斜辺の長さが一定の直角三角形のうち，面積が最大のものは，直角二等辺三角形である．

(3) $\sin 2=\sin(\pi-2)$，$\sin 3=\sin(\pi-3)$，$\cos 1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ について

$$\begin{aligned}&\pi-3>0, \quad \left(\frac{\pi}{2}-1\right)-(\pi-3)=\frac{4-\pi}{2}>0, \\ &1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{4-\pi}{2}>0, \quad (\pi-2)-1=\pi-3>0, \\ &\frac{\pi}{2}-(\pi-2)=\frac{4-\pi}{2}>0\end{aligned}$$

ゆえに　$0<\pi-3<\frac{\pi}{2}-1<1<\pi-2<\frac{\pi}{2}$

したがって　$\sin(\pi-3)<\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)<\sin 1<\sin(\pi-2)$

よって　$\boldsymbol{\sin 3<\cos 1<\sin 1<\sin 2}$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$f(x) = x^3 + 3(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a} + \log_{\frac{1}{8}} 4)x^2 - 4(\log_{\frac{1}{4}} a)x - 4(\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a})^3$$

$b = \log_{\frac{1}{4}} a$ より　$\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{a} = \dfrac{b}{2}$，$\log_{\frac{1}{8}} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 \frac{1}{8}} = \dfrac{2}{-3}$

したがって　$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3\left(\frac{b}{2} - \frac{2}{3}\right)x^2 - 4bx - 4\left(\frac{b}{2}\right)^3 \\ &= \boldsymbol{x^3 + \left(\frac{3}{2}b - 2\right)x^2 - 4bx - \frac{b^3}{2}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から　$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + (3b-4)x - 4b \\ &= (3x-4)(x+b) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ を解くと　$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{3}, -b}$

(3) $0 < a < 1$ より，$b = \log_{\frac{1}{4}} a > 0$ であるから

x	$\cdots$	$-b$	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

極大値が $\dfrac{9}{2}$ であるから　$f(-b) = 2b^2 = \dfrac{9}{2}$

$b > 0$ に注意して　$b = \dfrac{3}{2}$　これを $b = \log_{\frac{1}{4}} a$ に代入して

$$\log_{\frac{1}{4}} a = \frac{3}{2}\quad \text{ゆえに}\quad a = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた漸化式から　$(n+1)a_{n+1}-(n+3)a_n=2$

上式の両辺を $(n+3)(n+2)(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+3)(n+2)}-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ より　$\boldsymbol{b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{(n+3)(n+2)(n+1)}}$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+3)(k+2)(k+1)}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{(k+3)-(k+1)}{(k+3)(k+2)(k+1)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p=2}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{2}{(k+3)(k+2)(k+1)}=\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}$$

上式と (1) の結果により

$$b_{k+1}-b_k=\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}$$

$b_1=\dfrac{a_1}{3\cdot2}=\dfrac{2}{3\cdot2}=\dfrac{1}{3}$ により，$n>1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(k+2)(k+1)}-\frac{1}{(k+3)(k+2)}\right\}$$

ゆえに　$b_n-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$

$$b_n=\frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+1)}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}=\frac{n(n+3)}{2(n+2)(n+1)}$$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{n(n+3)}{2}}$

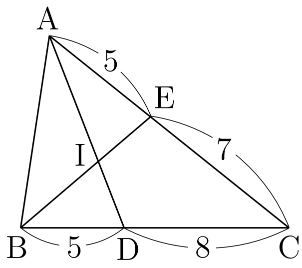
■

$\boxed{4}$ (1) $b=8$, $c=5$, $A=60^\circ$ を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 8^2+5^2-2{\cdot}8{\cdot}5\cos 60^\circ = 49 \end{aligned}$$

$a=\mathrm{BC}>0$ であるから $\quad \mathbf{BC=7}$

(2) AD は $\angle$BAC を二等分線であるから



$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=5:8$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\frac{8}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

BE は $\angle$ABC の二等分線であるから

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=5:7$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\boldsymbol{-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(3) $\triangle$ADC と直線 BE についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{7}{5}=1$$

したがって $\quad \mathrm{AI}:\mathrm{ID}=13:7$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{13}{20}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{13}{20}\cdot\frac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{13}=\boldsymbol{\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $P(X=k)=\dfrac{k-1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\dfrac{k-1}{15}$ $(1 \leqq k \leqq 6)$ より，求める期待値は

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{6} kP(X=k)=\frac{1}{15}\sum_{k=1}^{6} k(k-1)\\&=\frac{1}{45}\sum_{k=1}^{6}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}=\frac{5\cdot6\cdot7}{45}=\mathbf{\frac{14}{3}}\end{aligned}$$

(2) $P(Y=j)=\dfrac{6-j}{15}$，$P(X=k,\ Y=j)=\begin{cases}\frac{1}{15} & (k>j)\\ 0 & (k \leqq j)\end{cases}$ $\quad(1 \leqq j, k \leqq 6)$

$1<k \leqq j<6$ とすると

$$P(X=k)P(Y=j)>0, \quad P(X=k,\ Y=j)=0$$

ゆえに　$P(X=k)P(Y=j) \neq P(X=k,\ Y=j)$

よって　確率変数 X と Y は互いに独立ではない.

(3) 確率変数 XY の期待値は

$$\begin{aligned}E(XY)&=\sum_{1 \leqq j,k \leqq 6} P(X=k,Y=j)jk=\sum_{1 \leqq j<k \leqq 6}\frac{1}{15}jk\\&=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots+6)^2-(1^2+2^2+\cdots+6^2)\}\\&=\frac{1}{30}(21^2-91)=\mathbf{\frac{35}{3}}\end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (1) $(*)$ $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}+e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^tf(t)\,dt$ を微分すると

$$f'(x)=xe^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-x}-e^{-x}\int_0^x e^tf(t)\,dt+f(x)$$

$(*)$ を上式に代入して整理すると　　$\boldsymbol{f'(x)=xe^{-x}}$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$f(0)=0$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int xe^{-x}\,dx=-(x+1)e^{-x}+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

したがって　$f(0)=-1+C=0$　すなわち　$C=1$

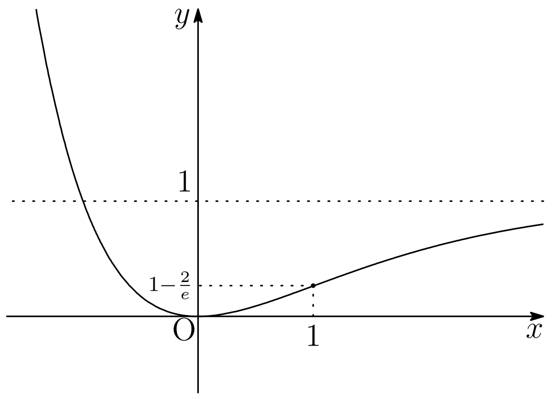
よって　　$\boldsymbol{f(x)=-(x+1)e^{-x}+1}$

(2) $f'(x)$ を微分して　　$f''(x)=(1-x)e^{-x}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$1-\frac{2}{e}$	↗

したがって　極小値 $f(0)=\boldsymbol{0}$，変曲点 $\left(\boldsymbol{1,\ 1-\dfrac{2}{e}}\right)$

$(**)$　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=0$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$



(3) よって　$S(a)=\displaystyle\int_0^a\{1-f(x)\}\,dx=\int_0^a(x+1)e^{-x}\,dx$

$$=-\Big[(x+2)e^{-x}\Big]_0^a=\boldsymbol{2-(a+2)e^{-a}}$$

また，$(**)$ より　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\boldsymbol{S(a)=2}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $|z|^2+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+A=0$ より (A は実数)

$$|z+\alpha|^2=|\alpha|^2-A$$

よって，中心 $\boldsymbol{-\alpha}$，半径 $\boldsymbol{\sqrt{|\alpha|^2-A}}$ の円を表す.

(2) $z_1\neq 0,\ z_2\neq 0,\ z_1\neq z_2$ のとき

$$\begin{aligned}
&3\text{ 点 } 0,\ z_1,\ z_2 \text{ が同一直線上にある}\\
\iff& z_2=kz_1\ (k\text{ は実数}) \iff \frac{z_2}{z_1}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}=k\ (k\text{ は実数})\\
\iff& \frac{z_2}{z_1}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \iff z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0
\end{aligned}$$

(3) 点 0 は (★) 上の点であるから　$\boldsymbol{A=0}$

z_1，z_2 は (★) 上の点であるから

$$|z_1|^2+\overline{\alpha}z_1+\alpha\overline{z_1}=0,\quad |z_2|^2+\overline{\alpha}z_2+\alpha\overline{z_2}=0$$

上の 2 式から $\overline{\alpha}$ を消去すると

$$|z_1|^2z_2-|z_2|^2z_1-\alpha(z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2)=0$$

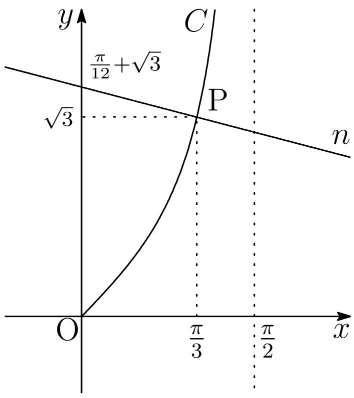
このとき，(2) の結論より，$z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{|z_1|^2z_2-|z_2|^2z_1}{z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2}}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=\tan x$ とおくと　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$$



$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$ における法線 n の方程式は

$$y-\sqrt{3}=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

よって　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{\pi}{12}+\sqrt{3}}$

(2) 求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\left\{\left(\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\right\}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx\\
&=\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{12}+2\sqrt{3}\right)+\Big[\ \log\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{72}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\log 2}
\end{aligned}$$

■