

令和2年度 鹿児島大学2次試験前期日程(数学問題)  
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部  
令和2年2月25日

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部 ① ② ⑥ ⑦ 必答,  
③ ④ ⑤ から1問選択. 数I・II・III・A・B(120分)
- 理[生命化]・農・水産・共同獣医学部 ① ② 必答,  
③ ④ ⑤ から1問選択. 数I・II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育]学部 ① 必答, ③ ④ ⑤ から1問選択, ② ⑧ から1問選択. 数I・II・A・Bまたは数I・III・A・B(90分)

① 次の問いに答えよ.

- (1)  $a, b$  は自然数で,  $p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$  とする.  $p$  が素数となるような  $a, b$  をすべて求めよ.
- (2)  $-\pi \leq x < \pi$  のとき, 方程式  $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1$  を解け.
- (3)  $n$  を自然数とする. 1 から  $2n$  までの数字が1つずつ書かれた  $2n$  枚のカードがある. この中から1枚のカードを等確率で選ぶ試行において, 選ばれたカードに書かれた数が偶数であることがわかっているとき, その数が  $n$  以下である確率を求めよ.

②  $t$  を正の実数とする. 実数全体の集合の, 2つの部分集合  $A, B$  を次のように定める.

$$A = \{a \mid \text{すべての実数 } x \text{ に対して } x^2 + (a+1)x + 2a > 0 \text{ が成り立つ}\}$$

$$B = \{b \mid bx^2 + tx + (b+t) < 0 \text{ を満たす実数 } x \text{ が存在する}\}$$

- (1) 集合  $A$  に属する実数  $a$  の範囲を求めよ.
- (2) 集合  $B$  に属する実数  $b$  の範囲を,  $t$  を用いて表せ.
- (3)  $A \cap B$  が空集合でないような  $t$  の範囲を求めよ.

3 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を, 初項  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1$ , および次の漸化式で定める.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4$  を求めよ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して,  $a_{n+3} = -8a_n$ ,  $b_{n+3} = -8b_n$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $\sum_{n=1}^9 a_n$  を求めよ.
- (4) 次で定まる  $T$  の値を求めよ.

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020} + \sum_{n=1}^{2020} a_n$$

4 鋭角三角形 OAB の頂点 A から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB の交点を D, 頂点 B から辺 OA に下ろした垂線と辺 OA の交点を E とする. また, AD と BE の交点を H とする.  $OA = 1$ ,  $OB = k$  とし,  $\angle OAD = \theta$  とする.

- (1) OD と OE を  $k, \theta$  を用いて表せ.
- (2)  $\vec{OH}$  を  $k, \theta, \vec{OA}, \vec{OB}$  を用いて表せ.
- (3) H が三角形 OAB の重心 G と一致するとき,  $k, \theta$  を求めよ.

5 1 個のさいころを 3 回投げる.

- (1) 3 回とも偶数の目が出る事象を  $A$ , 出る目の数がすべて異なる事象を  $B$  とする. このとき,  $A$  と  $B$  は独立であるか, 独立でないか, 答えよ.
- (2) 出る目の数の和を  $X$  とし,  $Y = 2X$  とおく. 確率変数  $Y$  の期待値  $E(Y)$  と分散  $V(Y)$  を求めよ.
- (3) 出る目の数の最大値を  $Z_1$ , 最小値を  $Z_2$  とする. このとき,  $Z_1 = 5$  かつ  $Z_2 = 2$  となる確率  $P(Z_1 = 5, Z_2 = 2)$  を求めよ.

6  $xy$  平面上で双曲線  $H$  と放物線  $C$  が、次の方程式で与えられている。

$$H : x^2 - y^2 = 1, \quad C : y = \frac{a}{2}x^2 + b \quad (\text{ただし, } a, b \text{ は実数, } a > 0)$$

$H$  と  $C$  は、第 1 象限においてただ一つの共有点  $P$  をもち、点  $P$  で共通の接線  $l_1$  をもつとする。このとき、 $H$  と  $C$  が第 2 象限にただ一つもつ共有点を  $Q$  とし、 $H$  と  $C$  が点  $Q$  でもつ共通の接線を  $l_2$  とする。

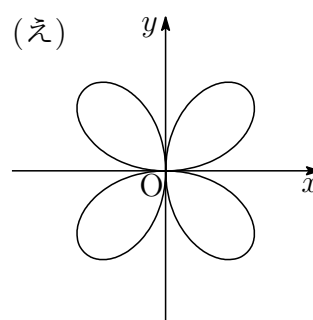
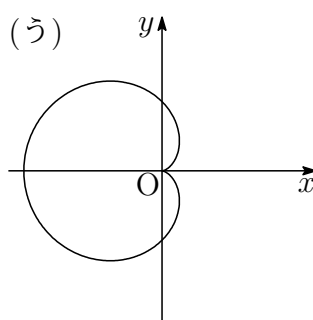
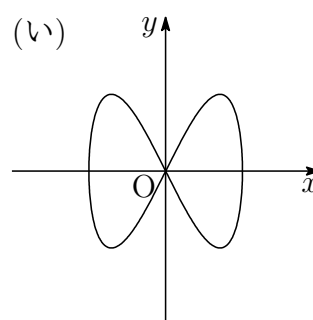
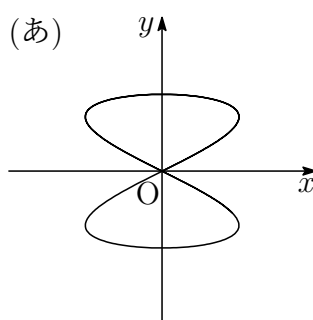
- (1) 点  $P$  の座標  $(s, t)$  と  $b$  を、 $a$  を用いて表せ。
- (2) 接線  $l_1$  の方程式を、 $a$  を用いて表せ。
- (3) 放物線  $C$  と接線  $l_1, l_2$  で囲まれた部分の面積  $S$  を、 $a$  を用いて表せ。
- (4)  $a$  が正の実数を動くとき、面積  $S$  の最小値を求めよ。

7  $xy$  平面上を運動する点  $P$  の描く曲線  $C$  が、時刻関数  $t$  によって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

と媒介変数表示されているとする。

- (1) 点  $P$  の速度ベクトル  $\vec{v}$  を、 $t$  を用いて表せ。
- (2)  $t$  が動くとき、点  $P$  の速さ  $|\vec{v}|$  の最小値を求めよ。ただし、最小値をとるとき  $t$  の値は求めなくてよい。
- (3)  $x, y$  で表した曲線  $C$  の方程式を求め、そのグラフの概形を下の図(あ)~(え)の中からひとつ選べ。
- (4) 曲線  $C$  で囲まれた部分の面積を求めよ。



8  $f(x) = \log x$  ( $x > 0$ ) とする.  $xy$  平面において, 曲線  $y = f(x)$  の接線で原点を通るものを  $y = g(x)$  とする.

(1)  $f'(x) = \frac{1}{x}$  となることを, 導関数の定義を用いて示せ.

ただし,  $e = \lim_{k \rightarrow 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}}$  とする.

(2)  $g(x)$  を求めよ.

(3)  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) (3) の部分を  $y$  軸のまわりで回転させてできる立体の体積を求めよ.

## 解答例

- 1 (1)  $p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$  より

$$p = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$$

$a, b$  は自然数より,  $a+b, a+b-1$  は整数である. これらの積が素数  $p$  であるから,  $1 \leq a+b-1 < a+b$  より, 次の (\*) を満たせばよい.

$$a+b-1=1 \quad \text{かつ} \quad a+b=p \quad \cdots (*)$$

$a+b=2$  ( $a \geq 1, b \geq 1$ ), すなわち,  $a=b=1$  は (\*) を満たす.

$$\text{よって} \quad \mathbf{a = b = 1}$$

- (2)  $\sqrt{2} \sin x - 1 = \sqrt{6} \cos x + 1$  より  $\sqrt{2} \sin x - \sqrt{6} \cos x = 2$   
 $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$  より, 上の第2式の両辺を  $2\sqrt{2}$  で割ると

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\pi \leq x < \pi$  より,  $-\pi - \frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \pi - \frac{\pi}{3}$  であるから

$$x - \frac{\pi}{3} = -\pi - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \quad \text{よって} \quad \mathbf{x = -\frac{11}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi}$$

- (3) 選ばれたカードが, 偶数である事象を  $A$ ,  $n$  以下である事象を  $B$  とする.

$$P(A) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n}$$

であるから ( $[x]$  は,  $x$  を超えない最大の整数), 求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n} \cdot 2 = \frac{1}{n} \left[\frac{n}{2}\right]$$

$n$  が偶数のとき  $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$ ,  $n$  が奇数のとき  $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$  であるから

$$P_A(B) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ \frac{n-1}{2n} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$



- 2 (1) すべての実数  $x$  に対して,  $x^2 + (a+1)x + 2a > 0$  を満たすから, 係数について

$$(a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - 6a + 1 < 0$$

$$\text{これを解いて} \quad 3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2}$$

- (2)  $bx^2 + tx + (b+t) < 0 \cdots (*)$  を満たす実数  $x$  が存在するとき,  $b$  について次の場合分けを行う.

- (i)  $b < 0$  のとき,  $(*)$  の 2 次の係数が負であるから, 条件を満たす.  
 (ii)  $b = 0$  のとき,  $(*)$  より

$$tx + t < 0 \quad (t > 0) \quad \text{ゆえに} \quad x < -1$$

したがって,  $(*)$  を満たす.

- (iii)  $b > 0$  のとき,  $(*)$  の係数について

$$t^2 - 4b(b+t) > 0 \quad \text{整理すると} \quad 4b^2 + 4tb - t^2 < 0$$

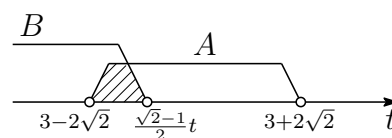
$$t > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}t < b < \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}t$$

$$b > 0 \text{ であるから} \quad 0 < b < \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}t$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より, } b \text{ の値の範囲は} \quad b < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}t$$

- (3)  $A \cap B \neq \phi$  のとき, (1), (2) の結果から

$$3 - 2\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}t$$



$$\text{これを解いて} \quad t > 2(\sqrt{2} - 1)$$



**3** (1) 与えられた漸化式

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \sqrt{3}b_1 & b_2 &= -\sqrt{3}a_1 + b_1 \\ &= 0 + \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}, & &= -\sqrt{3} \cdot 0 + 1 = 1, \\ a_3 &= a_2 + \sqrt{3}b_2 & b_3 &= -\sqrt{3}a_2 + b_2 \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}, & &= -\sqrt{3}\sqrt{3} + 1 = -2, \\ a_4 &= a_3 + \sqrt{3}b_3 & b_4 &= -\sqrt{3}a_3 + b_3 \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot (-2) = 0, & &= -\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + (-2) = -8 \end{aligned}$$

(2) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+2} + \sqrt{3}b_{n+2} \\ &= (a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= -2a_{n+1} + 2\sqrt{3}b_{n+1} \\ &= -2(a_n + \sqrt{3}b_n) + 2\sqrt{3}(-\sqrt{3}a_n + b_n) = -8a_n, \\ b_{n+3} &= -\sqrt{3}a_{n+2} + b_{n+2} \\ &= -\sqrt{3}(a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}) + (-\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= -2\sqrt{3}a_{n+1} - 2b_{n+1} \\ &= -2\sqrt{3}(a_n + \sqrt{3}b_n) - 2(-\sqrt{3}a_n + b_n) = -8b_n \end{aligned}$$

(3) (2) の結果により

$$\begin{aligned} a_4 &= -8a_1, & a_5 &= -8a_2, & a_6 &= -8a_3 \\ a_7 &= -8a_4 = 64a_1, & a_8 &= -8a_5 = 64a_2, & a_9 &= -8a_6 = 64a_3 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^9 a_n &= (a_1 + a_4 + a_7) + (a_2 + a_5 + a_8) + (a_3 + a_6 + a_9) \\ &= (a_1 - 8a_1 + 64a_1) + (a_2 - 8a_2 + 64a_2) + (a_3 - 8a_3 + 64a_3) \\ &= 57(a_1 + a_2 + a_3) = 57(0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 171\sqrt{3} \end{aligned}$$

(4) (2) の結果から,  $2020 = 673 \cdot 3 + 1$  に注意して

$$b_{2020} = b_1 \cdot (-8)^{673} = (-8)^{673}$$

$S_k = a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}$  とおくと ( $k$  は自然数)

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a_{3k+1} + a_{3k+2} + a_{3k+3} \\ &= -8a_{3k-2} - 8a_{3k-1} - 8a_{3k} = -8S_k \end{aligned}$$

数列  $\{S_k\}$  は, 初項  $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 3\sqrt{3}$ , 公比  $-8$  の等比数列である.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2020} a_n &= \sum_{k=1}^{673} S_k + a_{2020} \\ &= \frac{3\sqrt{3}\{1 - (-8)^{673}\}}{1 - (-8)} + a_1 \cdot (-8)^{673} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \{1 - (-8)^{673}\} + 0 \cdot (-8)^{673} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1 - (-8)^{673}\} \end{aligned}$$

$$\text{よって } T = \frac{1}{\sqrt{3}} b_{2020} + \sum_{n=1}^{2020} a_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-8)^{673} + \frac{1}{\sqrt{3}} \{1 - (-8)^{673}\} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

補足  $z_n = b_n + a_n i$  とおくと

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= b_{n+1} + a_{n+1}i = b_n - \sqrt{3}a_n + i(\sqrt{3}b_n + a_n) \\ &= (1 + \sqrt{3}i)(b_n + a_n i) = (1 + \sqrt{3}i)z_n \\ &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) z_n \end{aligned}$$

$$z_1 = 1 \text{ であるから } z_n = 2^{n-1} \left( \cos \frac{n-1}{3}\pi + i \sin \frac{n-1}{3}\pi \right)$$

$$\text{したがって } b_n = 2^{n-1} \cos \frac{n-1}{3}\pi, \quad a_n = 2^{n-1} \sin \frac{n-1}{3}\pi$$

$w = 1 + \sqrt{3}i$  とすると,  $\{z_n\}$  は初項 1, 公比  $w$  の等比数列であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n z_k &= \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{2^n(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}) - 1}{\sqrt{3}i} \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - 2^n \cos \frac{n\pi}{3} \right) i \end{aligned}$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^n b_k = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - 2^n \cos \frac{n\pi}{3} \right)$$

解説 数列

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - by_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

について  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{a}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{b}{r}$  とする.

$z_n = x_n + y_n i$  とおくと

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1}i = ax_n - by_n + i(bx_n + ay_n) \\ &= (a + bi)(x_n + y_n i) = r(\cos \theta + i \sin \theta)z_n \end{aligned}$$

したがって  $z_n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)z_0$

よって  $x_n + y_n i = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)(x_0 + y_0 i)$

$$\text{発展 } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

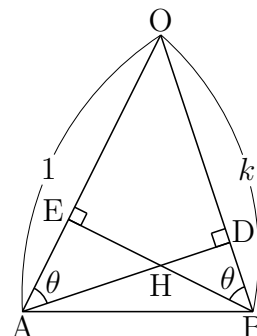


4 (1)  $\triangle OAD \sim \triangle OBE$  であるから

$$\angle OAD = \angle OBE$$

$$\text{よって } OD = OA \sin \theta = \mathbf{\sin \theta}$$

$$OE = OB \sin \theta = \mathbf{k \sin \theta}$$



(2) (1) の結果から

$$OE = k \sin \theta = (k \sin \theta) \cdot 1 = (k \sin \theta) OA,$$

$$OD = \sin \theta = \frac{\sin \theta}{k} \cdot k = \frac{\sin \theta}{k} OB$$

$$\overrightarrow{OE} = (k \sin \theta) \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{\sin \theta}{k} \overrightarrow{OB} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{k \sin \theta} \overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{k}{\sin \theta} \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OH} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} \text{ とおくと } (x, y \text{ は実数})$$

$$\overrightarrow{OH} = x \overrightarrow{OA} + \frac{ky}{\sin \theta} \overrightarrow{OD} = \frac{x}{k \sin \theta} \overrightarrow{OE} + y \overrightarrow{OB}$$

H は直線 AD および直線 BE 上の点であるから

$$x + \frac{ky}{\sin \theta} = 1, \quad \frac{x}{k \sin \theta} + y = 1 \quad \dots (*)$$

$$\text{上の 2 式から } x \sin \theta + ky = \sin \theta \quad \dots \textcircled{1} \quad (\text{第 1 式} \times \sin \theta)$$

$$x \sin \theta + ky \sin^2 \theta = k \sin^2 \theta \quad \dots \textcircled{2} \quad (\text{第 2 式} \times k \sin^2 \theta)$$

① - ② より

$$ky(1 - \sin^2 \theta) = (1 - k \sin \theta) \sin \theta \quad \text{ゆえに } y = \frac{(1 - k \sin \theta) \sin \theta}{k \cos^2 \theta}$$

$$\text{これを } (*) \text{ の第 1 式に代入すると } x + \frac{1 - k \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 1$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{\cos^2 \theta - 1 + k \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(k - \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OH} = \frac{(k - \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \overrightarrow{OA} + \frac{(1 - k \sin \theta) \sin \theta}{k \cos^2 \theta} \overrightarrow{OB}$$

別解  $\triangle OAD$  と直線  $BE$  について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AH}{HD} \cdot \frac{DB}{BO} \cdot \frac{OE}{EA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{AH}{HD} \cdot \frac{k - \sin \theta}{k} \cdot \frac{k \sin \theta}{1 - k \sin \theta} = 1$$

したがって  $AH : HD : AD = 1 - k \sin \theta : (k - \sin \theta) \sin \theta : \cos^2 \theta$

$$\vec{OH} = \frac{(k - \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \vec{OA} + \frac{1 - k \sin \theta}{\cos^2 \theta} \vec{OD}$$

$$\vec{OD} = \frac{\sin \theta}{k} \vec{OB} \quad \text{より} \quad \vec{OH} = \frac{(k - \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \vec{OA} + \frac{(1 - k \sin \theta) \sin \theta}{k \cos^2 \theta} \vec{OB}$$

(3)  $H$  が  $\triangle OAB$  の重心であるから

$$\frac{(k - \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(1 - k \sin \theta) \sin \theta}{k \cos^2 \theta} = \frac{1}{3} \quad \dots (*)$$

したがって  $k - \sin \theta = \frac{1 - k \sin \theta}{k}$  ゆえに  $k^2 = 1$  すなわち  $k = 1$

$$\frac{(1 - \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1}{3}$$

これを解いて  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  条件により  $\theta$  は鋭角であるから  $\theta = \frac{\pi}{6}$  ■

**5** (1)  $P(A) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$ ,  $P(B) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

したがって  $P(A)P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{72}$  ゆえに  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

よって、事象  $A$ ,  $B$  は独立ではない。

**補足** 事象  $A$ ,  $B$  が独立であるとは、 $A$  が起きたときの  $B$  が起きる確率、すなわち、条件付き確率  $P_A(B)$  (大学等では  $P(B|A)$  と表記することが多い) が、 $A$  に関係なく  $P(B)$  に等しいことである。

$$B \text{ が } A \text{ と独立} \iff P_A(B) = P(B)$$

また、 $A$  が  $B$  と独立であるとは、 $P_B(A) = P(A)$  が成立することであるが、これら 2 式の成立については、同値関係にある。実際、

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \iff \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = P(A)$$

このとき、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  が成立する。したがって、 $A$ ,  $B$  が独立であることを示すには、次のどれか 1 つを示せばよい。

$$P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A) \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

本題では、 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  により、事象  $A$ ,  $B$  は独立ではない。

(2)  $k$  回目に出た目を  $X_k$  とすると ( $k = 1, 2, 3$ )

$X_k$	1	2	3	4	5	6	計
$X_k^2$	1	4	9	16	25	36	
$P(X_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X_k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X_k^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$X = X_1 + X_2 + X_3$  より

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{7}{2} \times 3 = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = \frac{35}{12} \times 3 = \frac{35}{4} \end{aligned}$$

$Y = 2X$  より

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2X) = 2E(X) = 2 \times \frac{21}{2} = \mathbf{21} \\ V(Y) &= V(2X) = 2^2V(X) = 4 \times \frac{35}{4} = \mathbf{35} \end{aligned}$$

(3)  $Z_1 = 5$  かつ  $Z_2 = 2$  となる目の組合せは

$$\{2, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 5, 5\}$$

である.

(i)  $\{2, 2, 5\}, \{2, 5, 5\}$  である確率は, ともに

$$\frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

(ii)  $\{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}$  である確率は, ともに

$$\frac{3!}{1!1!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

よって, 求める確率は  $\frac{1}{72} \times 2 + \frac{1}{36} \times 2 = \frac{1}{12}$  ■

- 6 (1)  $H: x^2 - y^2 = 1$ ,  $C: y = \frac{a}{2}x^2 + b$  ( $a > 0$ )  
 点  $P(s, t)$  は  $H$  および  $C$  上の点であるから

$$(*) \quad s^2 - t^2 = 1, \quad t = \frac{a}{2}s^2 + b$$

$H$  上の点  $P(s, t)$  における接線  $l_1$  は

$$sx - ty = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{s}{t}x - \frac{1}{t}$$

$C$  を  $x$  で微分すると  $y' = ax$

$l_1$  は第 1 象限の点  $P(s, t)$  における  $C$  および  $H$  の共通接線であるから

$$\frac{s}{t} = as \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{a}$$

これを (\*) の第 1 式に代入すると,  $a > 0, s > 0$  に注意して

$$s^2 - \frac{1}{a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$$

したがって  $P\left(\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}, \frac{1}{a}\right)$  上の 2 式を (\*) の第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}\right)^2 + b \quad \text{よって} \quad b = \frac{1 - a^2}{2a}$$

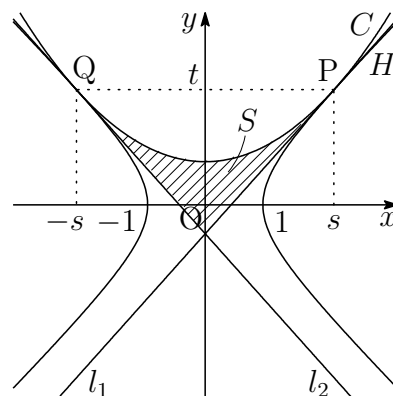
- (2) (1) で求めた  $s, t$  を  $l_1$  の方程式に代入すると

$$y = \sqrt{a^2 + 1}x - a$$

- (3) (1) の結果から  $C$  の方程式は  $y = \frac{a}{2}x^2 + \frac{1 - a^2}{2a}$

$H, C$  は,  $y$  軸に関して対称であるから, 第 2 象限の  $H$  と  $C$  の接点  $Q$  および共通接線  $l_2$  は, それぞれ,  $y$  軸に関して  $P$  および  $l_1$  と対称であるから

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^s \left\{ \frac{a}{2}x^2 + \frac{1 - a^2}{2a} - (\sqrt{a^2 + 1}x - a) \right\} dx \\ &= a \int_0^s \left( x^2 - 2\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}x + \frac{a^2 + 1}{a^2} \right) dx \\ &= a \int_0^s \left( x - \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \right)^2 dx = a \int_0^s (x - s)^2 dx \\ &= a \left[ \frac{1}{3}(x - s)^3 \right]_0^s = \frac{as^3}{3} = \frac{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} \end{aligned}$$



補足 一般に、放物線  $C$  上の2点  $P, Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  とすると、 $C$  上の2点  $P, Q$  におけるそれぞれの接線  $l_1, l_2$  の交点の  $x$  座標は、 $\frac{\alpha+\beta}{2}$  である。また、 $C, l_1, l_2$  で囲まれた部分の面積が  $S$  であるとき、 $C$  と直線  $PQ$  で囲まれた部分の面積は  $2S$  である<sup>1</sup>。

本題において、 $C$  の  $x^2$  の係数および2点  $P, Q$  の座標から、1/6 公式を用いて、次のように求めることもできる。

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2} \left\{ \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} - \left( -\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \right) \right\}^3 = \frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$$

(4) (3) の結果から、 $u = a^2$  とおくと  $S = \frac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$

$$f(u) = \frac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u} \quad (u > 0) \text{ とすると}$$

$$f'(u) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{3}{2}\sqrt{u+1} \cdot u - (u+1)^{\frac{3}{2}} \cdot 1}{u^2} = \frac{(u-2)\sqrt{u+1}}{6u^2}$$

$u$	(0)	...	2	...
$f'(u)$		-	0	+
$f(u)$		↘	極小	↗

よって、求める最小値は  $f(2) = \frac{(2+1)^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

別解  $S = \frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{a^2+1}{a^{\frac{4}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left( a^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$

$a > 0$  であるから、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{2} \cdot \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}} = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

したがって  $S \geq \frac{1}{3} \left( \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  よって 最小値  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

上式において、等号が成立するとき  $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}$  すなわち  $a = \sqrt{2}$  ■

<sup>1</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_bun-2009.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun-2009.pdf) (p.6 の補足)

- 7 (1)  $x = \sin t, y = \sin 2t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) より

$$\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (\cos t, 2 \cos 2t)$$

- (2)  $\vec{v} = (\cos t, 2(2 \cos^2 t - 1))$  であるから,  $u = \cos^2 t$  とおくと ( $0 \leq u \leq 1$ )

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= \cos^2 t + 4(2 \cos^2 t - 1)^2 = u + 4(2u - 1)^2 \\ &= 16u^2 - 15u + 4 = 16 \left( u - \frac{15}{32} \right)^2 + \frac{31}{64} \end{aligned}$$

よって,  $u = \frac{15}{32}$  のとき,  $|\vec{v}|$  は最小値  $\frac{\sqrt{31}}{8}$  をとる.

- (3)  $f(t) = \sin t, g(t) = \sin 2t$  とおくと ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )

$$f(2\pi - t) = -f(t), \quad g(2\pi - t) = -g(t)$$

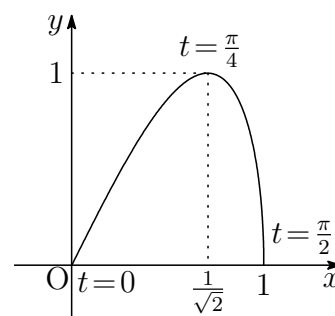
上式から, 点 P が  $0 \leq t \leq \pi$  で描く曲線と  $\pi \leq t \leq 2\pi$  で描く曲線は原点対称である. さらに

$$f(\pi - t) = f(t), \quad g(\pi - t) = -g(t)$$

であるから, 点 P の  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  で描く曲線と  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$  で描く曲線は  $y$  軸対称である. これから, 点 P の描く曲線  $C$  は  $x$  軸に対しても対称である. そこで,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  における  $C$  の概形を調べる.

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = g'(t) = 2 \cos 2t$$

$t$	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
$\vec{v}$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	
$(x, y)$	(0, 0)		$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$		(1, 0)



したがって,  $C$  の描く図形は, (い) である.

$C$  は,  $x$  軸および  $y$  軸に関して対称であるから,

$$y^2 = (\sin 2t)^2 = (2 \sin t \cos t)^2 = 4 \sin^2 t (1 - \sin^2 t) = 4x^2(1 - x^2)$$

よって,  $C$  の方程式は  $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$

補足 第1象限において  $f'(t) > 0$  より,  $x$  は単調増加であることや, 点  $(1, 0)$  を通ることから, (い) であることは明らか.

解説 必要があれば, 曲線  $C$  の凹凸なども調べることもできる.

本問では,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  において,  $\frac{dx}{dt} = f'(t) \neq 0$  であるから,  $\frac{dy}{dx}$  や  $\frac{d^2y}{dx^2}$  も求めることができる.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2 \cos 2t}{\cos t}$$

これをさらに  $x$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{g'(t)}{f'(t)} \right) = \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{g'(t)}{f'(t)} \right) \right\} \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} \\ &= \frac{-4 \sin 2t \cos t - 2 \cos 2t(-\sin t)}{\cos^3 t} \\ &= -\frac{2 \sin t(2 \cos^2 t + 1)}{\cos^3 t} \end{aligned}$$

曲線  $C$  は,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ , すなわち, 第1象限において, 上に凸である.

(4) (1) で求めた対称性により, 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) f'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos^2 t dt \\ &= \left[ -\frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって  $S = \frac{8}{3}$  ■

- 8 (1) 関数  $f(x) = \log x$  について、導関数の定義を適用すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

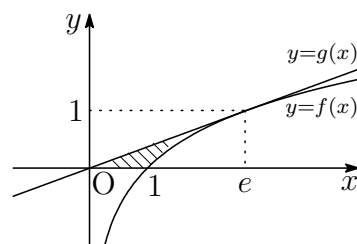
- (2)  $y = f(x)$  上の点  $(t, \log t)$  における接線は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが原点を通るから

$$-\log t = -1 \quad \text{ゆえに} \quad t = e$$

これを  $\textcircled{1}$  に代入して整理すると  $y = \frac{x}{e}$  よって  $g(x) = \frac{x}{e}$



- (3) 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 - \int_1^e \log x \, dx \\ &= \frac{e}{2} - \left[ x(\log x - 1) \right]_1^e = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

- (4)  $f^{-1}(y) = e^y$  であるから、求める体積を  $V$  とすると

$$V = \pi \int_0^1 (e^y)^2 \, dy - \frac{1}{3} \cdot \pi e^2 \cdot 1 = \pi \left[ \frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 - \frac{\pi e^2}{3} = \frac{\pi(e^2 - 3)}{6}$$

別解

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^e xg(x) \, dx - \int_1^e xf(x) \, dx = \int_0^e \frac{x^2}{e} \, dx - \int_1^e x \log x \, dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3e} \right]_0^e - \left[ \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 - 3}{12} \end{aligned}$$

よって  $S = \frac{\pi(e^2 - 3)}{6}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$  の範囲で  $f(x) \geq 0$  のとき、 $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および 2 直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた部分を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積  $V$  は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) \, dx$$