令和２年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
令和２年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a，b は自然数で，$p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$ とする．p が素数となるような a，b をすべて求めよ．

(2) $-\pi \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1$ を解け．

(3) n を自然数とする．1 から $2n$ までの数字が 1 つずつ書かれた $2n$ 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを等確率で選ぶ試行において，選ばれたカードに書かれた数が偶数であることがわかっているとき，その数が n 以下である確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ t を正の実数とする．実数全体の集合の，2 つの部分集合 A，B を次のように定める．

$$A = \{a \mid \text{すべての実数 } x \text{ に対して } x^2 + (a+1)x + 2a > 0 \text{ が成り立つ}\}$$
$$B = \{b \mid bx^2 + tx + (b+t) < 0 \text{ を満たす実数 } x \text{ が存在する}\}$$

(1) 集合 A に属する実数 a の範囲を求めよ．

(2) 集合 B に属する実数 b の範囲を，t を用いて表せ．

(3) $A \cap B$ が空集合でないような t の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1 = 0$，$b_1 = 1$，および次の漸化式で定める．

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+3} = -8a_n$，$b_{n+3} = -8b_n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} a_n$ を求めよ．

(4) 次で定まる T の値を求めよ．

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020} + \sum_{n=1}^{2020} a_n$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 鋭角三角形 OAB の頂点 A から辺 OB に下ろした垂線と辺 OB の交点を D，頂点 B から辺 OA に下ろした垂線と辺 OA の交点を E とする．また，AD と BE の交点を H とする．OA $= 1$，OB $= k$ とし，$\angle$OAD $= \theta$ とする．

(1) OD と OE を k，θ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を k，θ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) H が三角形 OAB の重心 G と一致するとき，k，θ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 個のさいころを 3 回投げる．

(1) 3 回とも偶数の目が出る事象を A，出る目の数がすべて異なる事象を B とする．このとき，A と B は独立であるか，独立でないか，答えよ．

(2) 出る目の数の和を X とし，$Y = 2X$ とおく．確率変数 Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ．

(3) 出る目の数の最大値を Z_1，最小値を Z_2 とする．このとき，$Z_1 = 5$ かつ $Z_2 = 2$ となる確率 $P(Z_1 = 5,\ Z_2 = 2)$ を求めよ．

$\boxed{6}$ xy 平面上で双曲線 H と放物線 C が，次の方程式で与えられている．

$$H : x^2 - y^2 = 1, \quad C : y = \frac{a}{2}x^2 + b \quad (\text{ただし}, a, b \text{ は実数}, a > 0)$$

H と C は，第 1 象限においてただ一つの共有点 P をもち，点 P で共通の接線 l_1 をもつとする．このとき，H と C が第 2 象限にただ一つもつ共有点を Q とし，H と C が点 Q でもつ共通の接線を l_2 とする．

(1) 点 P の座標 $(s,\ t)$ と b を，a を用いて表せ．

(2) 接線 l_1 の方程式を，a を用いて表せ．

(3) 放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S を，a を用いて表せ．

(4) a が正の実数を動くとき，面積 S の最小値を求めよ．

$\boxed{7}$ xy 平面上を運動する点 P の描く曲線 C が，時刻関数 t によって

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

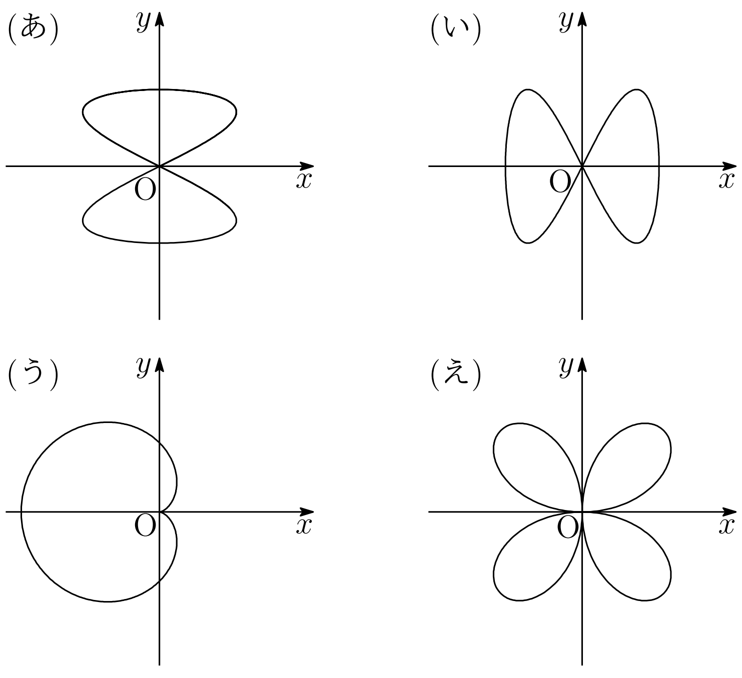
と媒介変数表示されているとする．

(1) 点 P の速度ベクトル $\vec{v}$ を，t を用いて表せ．

(2) t が動くとき，点 P の速さ $|\vec{v}|$ の最小値を求めよ．ただし，最小値をとるときの t の値は求めなくてよい．

(3) x，y で表した曲線 C の方程式を求め，そのグラフの概形を下の図 (あ)〜(え) の中からひとつ選べ．

(4) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．



$\boxed{\mathbf{8}}$ $f(x) = \log x \ (x > 0)$ とする．xy 平面において，曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものを $y = g(x)$ とする．

(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ となることを，導関数の定義を用いて示せ．
ただし，$e = \displaystyle\lim_{k \to 0}(1 + k)^{\frac{1}{k}}$ とする．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) $y = f(x)$，$y = g(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(4) (3) の部分を y 軸のまわりで回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $p = a^2 - a + 2ab + b^2 - b$ より

$$p = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$$

a，b は自然数より，$a+b$，$a+b-1$ は整数である．これらの積が素数 p であるから，$1 \leqq a+b-1 < a+b$ より，次の $(*)$ を満たせばよい．

$$a+b-1 = 1 \quad \text{かつ} \quad a+b = p \quad \cdots (*)$$

$a+b=2$ $(a \geqq 1,\ b \geqq 1)$，すなわち，$a=b=1$ は $(*)$ を満たす．
よって　　$\boldsymbol{a = b = 1}$

(2) $\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{6}\cos x + 1$ より　$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x = 2$
$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$ より，上の第 2 式の両辺を $2\sqrt{2}$ で割ると

$$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\pi \leqq x < \pi$ より，$-\pi - \dfrac{\pi}{3} \leqq x - \dfrac{\pi}{3} < \pi - \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$x - \frac{\pi}{3} = -\pi - \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = -\frac{11}{12}\pi,\ \frac{7}{12}\pi}$$

(3) 選ばれたカードが，偶数である事象を A，n 以下である事象を B とする．

$$P(A) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n}$$

であるから ($[x]$ は，x を超えない最大の整数)，求める確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n}\cdot 2 = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]$$

n が偶数のとき $\left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n}{2}$，$n$ が奇数のとき $\left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n-1}{2}$ であるから

$$P_A(B) = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{2}} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\,\textbf{が偶数)} \\[2ex] \boldsymbol{\dfrac{n-1}{2n}} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\,\textbf{が奇数)} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) すべての実数 x に対して，$x^2+(a+1)x+2a>0$ を満たすから，係数について

$$(a+1)^2-4\cdot1\cdot2a<0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2-6a+1<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}}$

(2) $bx^2+tx+(b+t)<0\cdots(*)$ を満たす実数 x が存在するとき，b について次の場合分けを行う．

(i) $b<0$ のとき，$(*)$ の 2 次の係数が負であるから，条件を満たす．

(ii) $b=0$ のとき，$(*)$ より

$$tx+t<0\ (t>0) \quad \text{ゆえに} \quad x<-1$$

したがって，$(*)$ を満たす．

(iii) $b>0$ のとき，$(*)$ の係数について

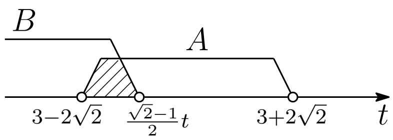
$$t^2-4b(b+t)>0 \quad \text{整理すると} \quad 4b^2+4tb-t^2<0$$

$t>0$ に注意してこれを解くと　$\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}t<b<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}t$

$b>0$ であるから　$0<b<\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}t$

(i)〜(iii) より，b の値の範囲は　$\boldsymbol{b<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}t}$

(3) $A\cap B\neq\phi$ のとき，(1)，(2) の結果から



$$3-2\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}-1}{2}t$$

これを解いて　$\boldsymbol{t>2(\sqrt{2}-1)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた漸化式

$$a_1 = 0,\quad b_1 = 1,\quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = -\sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \sqrt{3}b_1 \\ &= 0 + \sqrt{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\sqrt{3}}, \\ a_3 &= a_2 + \sqrt{3}b_2 \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot 1 = \boldsymbol{2\sqrt{3}}, \\ a_4 &= a_3 + \sqrt{3}b_3 \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\cdot(-2) = \mathbf{0}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_2 &= -\sqrt{3}a_1 + b_1 \\ &= -\sqrt{3}\cdot 0 + 1 = \mathbf{1}, \\ b_3 &= -\sqrt{3}a_2 + b_2 \\ &= -\sqrt{3}\sqrt{3} + 1 = \boldsymbol{-2}, \\ b_4 &= -\sqrt{3}a_3 + b_3 \\ &= -\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} + (-2) = \boldsymbol{-8} \end{aligned}$$

(2) 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+2} + \sqrt{3}b_{n+2} \\ &= (a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= -2a_{n+1} + 2\sqrt{3}b_{n+1} \\ &= -2(a_n + \sqrt{3}b_n) + 2\sqrt{3}(-\sqrt{3}a_n + b_n) = -8a_n, \\ b_{n+3} &= -\sqrt{3}a_{n+2} + b_{n+2} \\ &= -\sqrt{3}(a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1}) + (-\sqrt{3}a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= -2\sqrt{3}a_{n+1} - 2b_{n+1} \\ &= -2\sqrt{3}(a_n + \sqrt{3}b_n) - 2(-\sqrt{3}a_n + b_n) = -8b_n \end{aligned}$$

(3) (2) の結果により

$$\begin{array}{lll} a_4 = -8a_1, & a_5 = -8a_2, & a_6 = -8a_3 \\ a_7 = -8a_4 = 64a_1, & a_8 = -8a_5 = 64a_2, & a_9 = -8a_6 = 64a_3 \end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{9} a_n &= (a_1 + a_4 + a_7) + (a_2 + a_5 + a_8) + (a_3 + a_6 + a_9) \\ &= (a_1 - 8a_1 + 64a_1) + (a_2 - 8a_2 + 64a_2) + (a_3 - 8a_3 + 64a_3) \\ &= 57(a_1 + a_2 + a_3) = 57(0 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \boldsymbol{171\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(4) (2) の結果から，$2020 = 673{\cdot}3 + 1$ に注意して

$$b_{2020} = b_1{\cdot}(-8)^{673} = (-8)^{673}$$

$S_k = a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}$ とおくと (k は自然数)

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a_{3k+1} + a_{3k+2} + a_{3k+3} \\ &= -8a_{3k-2} - 8a_{3k-1} - 8a_{3k} = -8S_k \end{aligned}$$

数列 $\{S_k\}$ は，初項 $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 3\sqrt{3}$，公比 -8 の等比数列である．

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2020} a_n &= \sum_{k=1}^{673} S_k + a_{2020} \\ &= \frac{3\sqrt{3}\{1-(-8)^{673}\}}{1-(-8)} + a_1{\cdot}(-8)^{673} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-(-8)^{673}\right\} + 0{\cdot}(-8)^{673} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-(-8)^{673}\right\} \end{aligned}$$

よって　$T = \dfrac{1}{\sqrt{3}}b_{2020} + \displaystyle\sum_{n=1}^{2020} a_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}{\cdot}(-8)^{673} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left\{1-(-8)^{673}\right\} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

補足 $z_n = b_n + a_n i$ とおくと

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= b_{n+1} + a_{n+1} i = b_n - \sqrt{3} a_n + i(\sqrt{3} b_n + a_n) \\ &= (1+\sqrt{3}i)(b_n + a_n i) = (1+\sqrt{3}i) z_n \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) z_n \end{aligned}$$

$z_1 = 1$ であるから　$z_n = 2^{n-1}\left(\cos\dfrac{n-1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n-1}{3}\pi\right)$

したがって　$b_n = 2^{n-1}\cos\dfrac{n-1}{3}\pi,\ a_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{n-1}{3}\pi$

$w = 1+\sqrt{3}i$ とすると，$\{z_n\}$ は初項 1，公比 w の等比数列であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} z_k = \frac{w^n - 1}{w-1} &= \frac{2^n(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}) - 1}{\sqrt{3}i} \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - 2^n\cos\frac{n\pi}{3}\right) i \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3},\quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - 2^n\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

解説 数列

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n - b y_n \\ y_{n+1} = b x_n + a y_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

について $r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\theta = \dfrac{a}{r},\ \sin\theta = \dfrac{b}{r}$ とする．

$z_n = x_n + y_n i$ とおくと

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= x_{n+1} + y_{n+1} i = a x_n - b y_n + i(b x_n + a y_n) \\ &= (a+bi)(x_n + y_n i) = r(\cos\theta + i\sin\theta) z_n \end{aligned}$$

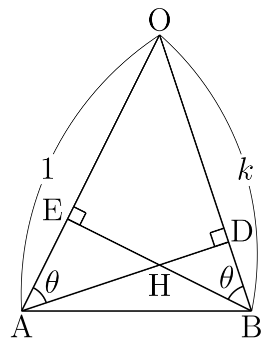
したがって　$z_n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) z_0$

よって　$x_n + y_n i = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)(x_0 + y_0 i)$

発展 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\triangle$OAD $\backsim$ $\triangle$OBE であるから



$$\angle\mathrm{OAD} = \angle\mathrm{OBE}$$

よって　$\mathrm{OD} = \mathrm{OA}\sin\theta = \boldsymbol{\sin\theta}$

$\mathrm{OE} = \mathrm{OB}\sin\theta = \boldsymbol{k\sin\theta}$

(2) (1) の結果から

$$\mathrm{OE} = k\sin\theta = (k\sin\theta)\cdot 1 = (k\sin\theta)\mathrm{OA},$$
$$\mathrm{OD} = \sin\theta = \frac{\sin\theta}{k}\cdot k = \frac{\sin\theta}{k}\mathrm{OB}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (k\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\sin\theta}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{k\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{k}{\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと ($x,\ y$ は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{ky}{\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{x}{k\sin\theta}\overrightarrow{\mathrm{OE}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

H は直線 AD および直線 BE 上の点であるから

$$x + \frac{ky}{\sin\theta} = 1, \quad \frac{x}{k\sin\theta} + y = 1 \quad \cdots(*)$$

上の 2 式から　$x\sin\theta + ky = \sin\theta$　$\cdots$①　(第 1 式 $\times \sin\theta$)

$x\sin\theta + ky\sin^2\theta = k\sin^2\theta$　$\cdots$②　(第 2 式 $\times k\sin^2\theta$)

① − ② より

$$ky(1-\sin^2\theta) = (1-k\sin\theta)\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると　$x + \dfrac{1-k\sin\theta}{\cos^2\theta} = 1$

ゆえに　$x = \dfrac{\cos^2\theta - 1 + k\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

別解 $\triangle$OAD と直線 BE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EA}}=1 \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HD}}\cdot\frac{k-\sin\theta}{k}\cdot\frac{k\sin\theta}{1-k\sin\theta}=1$$

したがって　$\mathrm{AH}:\mathrm{HD}:\mathrm{AD}=1-k\sin\theta:(k-\sin\theta)\sin\theta:\cos^2\theta$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1-k\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\sin\theta}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) H が $\triangle$OAB の重心であるから

$$\frac{(k-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{(1-k\sin\theta)\sin\theta}{k\cos^2\theta}=\frac{1}{3} \qquad \cdots(*)$$

したがって　$k-\sin\theta=\dfrac{1-k\sin\theta}{k}$　ゆえに　$k^2=1$　すなわち　$\boldsymbol{k=1}$

$$\frac{(1-\sin\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3} \quad ゆえに \quad \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1}{3}$$

これを解いて　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　条件により θ は鋭角であるから　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$

5 (1) $P(A)=\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(B)=\dfrac{6}{6}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{9}$，$P(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

したがって　$P(A)P(B)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{72}$　ゆえに　$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

よって，事象 A，B は独立ではない．

補足 事象 A，B が独立であるとは，A が起きたときの B が起きる確率，すなわち，条件付き確率 $P_A(B)$ (大学等では $P(B|A)$ と表記することが多い) が，A に関係なく $P(B)$ に等しいことである．

$$B が A と独立 \iff P_A(B)=P(B)$$

また，A が B と独立であるとは，$P_B(A)=P(A)$ が成立することであるが，これら 2 式の成立については，同値関係にある．実際，

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B) \iff \frac{P(B\cap A)}{P(B)}=P(A)$$

このとき，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成立する．したがって，A，B が独立であることを示すには，次のどれか 1 つを示せばよい．

$$P_A(B)=P(B) \iff P_B(A)=P(A) \iff P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

本題では，$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ により，事象 A，B は独立ではない．

(2) k 回目に出た目を X_k とすると $(k=1,2,3)$

X_k	1	2	3	4	5	6	計
${X_k}^2$	1	4	9	16	25	36	
$P(X_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X_k)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$
$$E({X_k}^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$
$$V(X_k)=E({X_k}^2)-E(X_k)^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

$X=X_1+X_2+X_3$ より

$$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1+X_2+X_3)\\&=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{7}{2}\times 3=\frac{21}{2}\\V(X)&=V(X_1+X_2+X_3)\\&=V(X_1)+V(X_2)+V(X_3)=\frac{35}{12}\times 3=\frac{35}{4}\end{aligned}$$

$Y=2X$ より

$$E(Y)=E(2X)=2E(X)=2\times\frac{21}{2}=\mathbf{21}$$
$$V(Y)=V(2X)=2^2V(X)=4\times\frac{35}{4}=\mathbf{35}$$

(3) $Z_1=5$ かつ $Z_2=2$ となる目の組合せは

$$\{2,2,5\}，\{2,\ 3,\ 5\}，\{2,\ 4,\ 5\}，\{2,\ 5,\ 5\}$$

である．

(i) $\{2,2,5\}$，$\{2,\ 5,\ 5\}$ である確率は，ともに

$$\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{72}$$

(ii) $\{2,3,5\}$，$\{2,\ 4,\ 5\}$ である確率は，ともに

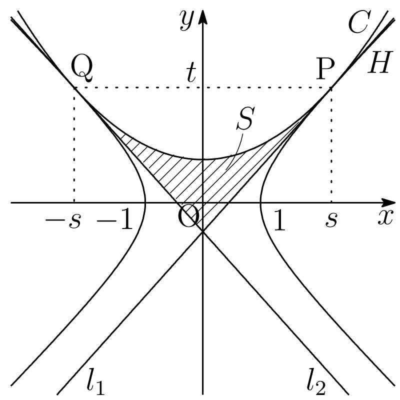
$$\frac{3!}{1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{72}\times 2+\dfrac{1}{36}\times 2=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$

6 (1) $H: x^2-y^2=1$，$C: y=\dfrac{a}{2}x^2+b\ (a>0)$

点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H および C 上の点であるから

$$(*)\quad s^2-t^2=1,\quad t=\frac{a}{2}s^2+b$$



H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l_1 は

$$sx-ty=1\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{s}{t}x-\frac{1}{t}$$

C を x で微分すると　$y'=ax$

l_1 は第 1 象限の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C および H の共通接線であるから

$$\frac{s}{t}=as\quad \text{ゆえに}\quad t=\frac{1}{a}$$

これを $(*)$ の第 1 式に代入すると，$a>0,\ s>0$ に注意して

$$s^2-\frac{1}{a^2}=1\quad \text{ゆえに}\quad s=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$

したがって　$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a},\ \dfrac{1}{a}\right)}$　上の 2 式を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2+b\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{b=\frac{1-a^2}{2a}}$$

(2) (1) で求めた s，t を l_1 の方程式に代入すると

$$\boldsymbol{y=\sqrt{a^2+1}x-a}$$

(3) (1) の結果から C の方程式は　$y=\dfrac{a}{2}x^2+\dfrac{1-a^2}{2a}$

H，C は，y 軸に関して対称であるから，第 2 象限の H と C の接点 Q および共通接線 l_2 は，それぞれ，y 軸に関して P および l_1 と対称であるから

$$\begin{aligned}
S&=2\int_0^s\left\{\frac{a}{2}x^2+\frac{1-a^2}{2a}-(\sqrt{a^2+1}x-a)\right\}dx\\
&=a\int_0^s\left(x^2-2\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}x+\frac{a^2+1}{a^2}\right)dx\\
&=a\int_0^s\left(x-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2dx=a\int_0^s(x-s)^2\,dx\\
&=a\left[\ \frac{1}{3}(x-s)^3\ \right]_0^s=\frac{as^3}{3}=\boldsymbol{\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}}
\end{aligned}$$

補足 一般に，放物線 C 上の 2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると，C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線 l_1，l_2 の交点の x 座標は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．また，C，l_1，l_2 で囲まれた部分の面積が S であるとき，C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2S$ である [1].

本題において，C の x^2 の係数および 2 点 P，Q の座標から，1/6 公式を用いて，次のように求めることもできる．

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\cdot\frac{a}{2}\left\{\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}-\left(-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right)\right\}^3=\frac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}$$

(4) (3) の結果から，$u=a^2$ とおくと　$S=\dfrac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$

$f(u)=\dfrac{(u+1)^{\frac{3}{2}}}{3u}$ $(u>0)$ とすると

$$f'(u)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{2}\sqrt{u+1}\cdot u-(u+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{u^2}=\frac{(u-2)\sqrt{u+1}}{6u^2}$$

u	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(u)$		$-$	0	$+$
$f(u)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，求める最小値は　$f(2)=\dfrac{(2+1)^{\frac{3}{2}}}{3\cdot 2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

別解 $S=\dfrac{(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2+1}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\left(a^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$a>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}}{2}\cdot\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}}}=\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

したがって　　$S\geqq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

上式において，等号が成立するとき　$\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{2}=\dfrac{1}{a^{\frac{4}{3}}}$　すなわち　$a=\sqrt{2}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 の補足)

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $x=\sin t,\ \ y=\sin 2t\ \ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ より

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\boldsymbol{(\cos t,\ 2\cos 2t)}$$

(2) $\vec{v}=(\cos t,\ 2(2\cos^2 t-1))$ であるから，$u=\cos^2 t$ とおくと $(0 \leqq u \leqq 1)$

$$|\vec{v}|^2=\cos^2 t+4(2\cos^2 t-1)^2=u+4(2u-1)^2$$
$$=16u^2-15u+4=16\left(u-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{31}{64}$$

よって，$u=\dfrac{15}{32}$ のとき，$|v|$ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{31}}{8}}$ **をとる．**

(3) $f(t)=\sin t$，$g(t)=\sin 2t$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$f(2\pi-t)=-f(t),\quad g(2\pi-t)=-g(t)$$

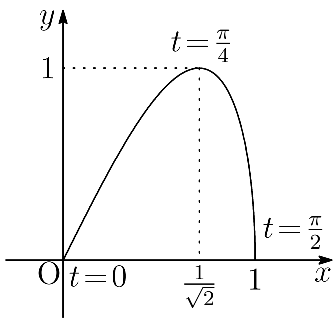
上式から，点 P が $0 \leqq t \leqq \pi$ で描く曲線と $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ で描く曲線は原点対称である．さらに

$$f(\pi-t)=f(t),\quad g(\pi-t)=-g(t)$$

であるから，点 P の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で描く曲線と $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ で描く曲線は y 軸対称である．これから，点 P の描く曲線 C は x 軸に関しても対称である．そこで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における C の概形を調べる．

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=g'(t)=2\cos 2t$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\vec{v}$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	
(x,y)	$(0,0)$		$(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$		$(1,0)$



したがって，C の描く図形は，(い) である．
C は，x 軸および y 軸に関して対称であるから，

$$y^2=(\sin 2t)^2=(2\sin t\cos t)^2=4\sin^2 t(1-\sin^2 t)=4x^2(1-x^2)$$

よって，C の方程式は　$\boldsymbol{y^2=4x^2(1-x^2)}$

補足　第 1 象限において $f'(t)>0$ より，x は単調増加であることや，点 $(1,\ 0)$ を通ることから，(い) であることは明らか．

解説 必要があれば，曲線 C の凹凸なども調べることもできる．

本問では，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} = f'(t) \neq 0$ であるから，$\dfrac{dy}{dx}$ や $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ も求めることができる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2\cos 2t}{\cos t}$$

これをさらに x について微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right) = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\right\}\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{f'(t)^3} \\ &= \frac{-4\sin 2t\cos t - 2\cos 2t(-\sin t)}{\cos^3 t} \\ &= -\frac{2\sin t(2\cos^2 t + 1)}{\cos^3 t}\end{aligned}$$

曲線 C は，$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$，すなわち，第 1 象限において，上に凸である．

(4) (1) で求めた対称性により，求める面積を S とすると

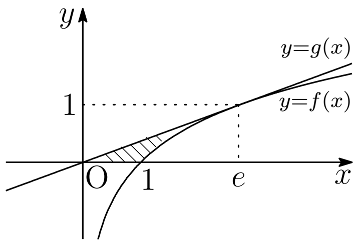
$$\begin{aligned}\frac{S}{4} &= \int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos^2 t\,dt \\ &= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって　　$S = \boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$

$\boxed{8}$ (1) 関数 $f(x)=\log x$ について，導関数の定義を適用すると

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線は



$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad\cdots①$$

これが原点を通るから

$$-\log t=-1\quad ゆえに\quad t=e$$

これを ① に代入して整理すると　$y=\dfrac{x}{e}$　よって　$\boldsymbol{g(x)=\dfrac{x}{e}}$

(3) 求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot e\cdot 1-\int_1^e \log x\,dx$$
$$=\frac{e}{2}-\Big[\ x(\log x-1)\ \Big]_1^e=\boldsymbol{\frac{e}{2}-1}$$

(4) $f^{-1}(y)=e^y$ であるから，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1(e^y)^2\,dy-\frac{1}{3}\cdot\pi e^2\cdot 1=\pi\left[\ \frac{e^{2y}}{2}\ \right]_0^1-\frac{\pi e^2}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi(e^2-3)}{6}}$$

別解

$$\frac{V}{2\pi}=\int_0^e xg(x)\,dx-\int_1^e xf(x)\,dx=\int_0^e\frac{x^2}{e}\,dx-\int_1^e x\log x\,dx$$
$$=\left[\ \frac{x^3}{3e}\ \right]_0^e-\left[\ \frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\ \right]_1^e=\frac{e^2-3}{12}$$

よって　$\boldsymbol{S=\dfrac{\pi(e^2-3)}{6}}$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$