平成 31 年度　鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成 31 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 平面上で 2 点 A(3, 1)，B(1, 4) から等距離にある点全体のなす直線 l の方程式を求めよ．さらに，点 P(2, 2) は，直線 l が分ける 2 つの領域のうち，点 A のある領域，点 B のある領域のどちらに属するかを調べよ．

(2) 有限集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにする．全体集合 U は有限集合で $n(U) = 100$ とし，A，B は U の部分集合で $n(A) = 30$，$n(B) = 80$ とする．$n(A \cap B)$ のとり得る値の最大値および最小値を求めよ．

(3) 方程式 $5x + 8y = 139$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 実数 α，β に対して，整式

$$f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 - \beta^2 + 2)x^2 + 2\alpha x + 1$$

を考える．

(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$ とおく．このとき $\dfrac{1}{x^2}f(x)$ を y の整式で表せ．

(2) $(\alpha,\ \beta) = \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ がちょうど 1 つの解をもつような $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ．

3 実数 p に対して，数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + 3n^2 + 3n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots (*)$$

を満たす.

(1) $p = 1$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) p が 1 でないとき，漸化式 $(*)$ は実数 α，β，γ を用いて

$$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = p(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

とかき表せる．α，β，γ を p を用いて表せ.

(3) $p = 2$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

4 xyz 空間上に，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(-1,\ b,\ b)$，球 $S : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ がある．ただし，b は実数とする．原点を O とする.

(1) 直線 AB 上の点 P を，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すとき，点 P の座標を b，t を用いて表せ.

(2) 直線 AB が球 S と共有点をもつような b の値の範囲を求めよ.

(3) 球 S の中心を C とする．b が (2) の値の範囲を動くとき，三角形 ABC の面積 T の最大値と最小値を求めよ.

5 1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを無作為に取り出し，書かれた数を記録してもとに戻す．この試行を n 回行い，i 回目に取り出したカードに書かれた数を X_i とする．さらに，それらの n 個の数 $X_1,\ X_2, \cdots, X_n$ を小さい順に並べかえたものを $X_{(1)} \leqq X_{(2)} \leqq \cdots \leqq X_{(n)}$ とする.

(1) 確率 $P(X_{(n)} \leqq 8)$ を求めよ.

(2) 確率 $P(X_{(n)} = 8)$ を求めよ.

(3) n を 2 以上とするとき，$X_{(2)}$ が 6 以上となる確率が $\dfrac{1}{2}$ 未満となる最小の試行回数 n を求めよ.

6 0 でない複素数 z に対して，$w = x + yi$ を $w = z^2 + \dfrac{\overline{z}}{z}$ とする．ただし，x と y は実数，i は虚数単位とし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数とする．

(1) 0 でない複素数 z について，z の絶対値を r，偏角を θ とするとき，z，$\dfrac{1}{z}$，$\overline{z}$ を，それぞれ r，θ を用いて極形式で表せ．

(2) 複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くとき，点 w が描く図形を求めよ．

(3) $r > 1$ とする．複素数平面上で点 z が原点を中心とする半径 r の円の周上を動くとき，点 w が描く曲線 C の方程式を x，y を用いて表せ．

(4) $r > 1$ とする．(3) の曲線 C で囲まれた部分の面積を r を用いて表せ．

7 関数 $f(x) = \log(1 + x)$ $(x \geqq 0)$ を考える．xy 平面上の $y = f(x)$ のグラフを y 軸のまわりで一回転させてできる形の容器がある．はじめ空である容器に，時刻 t における水の量が vt になるように，単位時間あたり v の一定の割合で水を静かに注ぐ．ただし，v は正の定数とし，容器は回転軸 (y 軸) が水平面に垂直で，y 軸の正の側を上向きにして固定されている．

(1) xy 平面で $y = f(x)$ の増減と凹凸を調べてグラフをかけ．

(2) 水面の高さが h になったときの，容器内の水の量 V を h を用いて表せ．

(3) 水面の高さが $h = \log 2$ になったときの，水面の高さの変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を求めよ．

8 曲線 $y = e^x$ の接線で，原点を通るものを l とする．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y = e^x$，接線 l および直線 $y = x + 1$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 平面上の点を $\mathrm{X}(x,\ y)$ とする．$\mathrm{A}(3,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 4)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{BX}^2-\mathrm{AX}^2 &= \{(x-1)^2+(y-4)^2\}-\{(x-3)^2+(y-1)^2\}\\ &= 4x-6y+7 \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

l は $\mathrm{AX}=\mathrm{BX}$ を満たす点 X の軌跡の方程式であるから

$$\boldsymbol{l : 4x-6y+7=0}$$

$(*)$ により　$\mathrm{BP}^2-\mathrm{AP}^2=4{\cdot}2-6{\cdot}2+7=3>0$　ゆえに　$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$
よって，点 P は点 A のある領域に属する．

別解 $\mathrm{AP}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{5}$ より　$\mathrm{AP}<\mathrm{BP}$
よって，点 P は点 A のある領域に属する．

(2) $n(A\cap B)=x$ とおくと，右の表から

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ 30-x \geqq 0 \\ 80-x \geqq 0 \\ x-10 \geqq 0 \end{cases}$$

	B	$\overline{B}$	合計
A	x	$30-x$	30
$\overline{A}$	$80-x$	$x-10$	70
合計	80	20	100

これを解いて　$10\leqq x\leqq 30$　よって　$\boldsymbol{10\leqq n(A\cap B)\leqq 30}$

(3) $5x+8y=139\cdots(*)$ より，$5\equiv 0,\ 8\equiv 3,\ 139\equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 5)$ であるから

$$3y\equiv 4 \quad \text{ゆえに} \quad 2{\cdot}3y\equiv 2{\cdot}4 \quad \text{すなわち} \quad y\equiv 3 \quad (\mathrm{mod}\ 5)$$

$y=3+5k$ (k は整数)$\cdots$① を $(*)$ に代入すると

$$5x+8(3+5k)=139 \quad \text{ゆえに} \quad x=23-8k \quad \cdots②$$

x，y は正の整数であるから，①，② より

$$\begin{cases} 23-8k>0 \\ 3+5k>0 \end{cases} \quad \text{これを満たす整数 } k \text{ は} \quad k=0,\ 1,\ 2$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(23,\ 3),\ (15,\ 8),\ (7,\ 13)}$ ■

2 (1) $f(x)=x^4+2\alpha x^3+(\alpha^2-\beta^2+2)x^2+2\alpha x+1$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2}f(x)&=x^2+2+\frac{1}{x^2}+2\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)+\alpha^2-\beta^2\\&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)+\alpha^2-\beta^2\\&=\boldsymbol{y^2+2\alpha y+\alpha^2-\beta^2}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $\dfrac{1}{x^2}f(x)=(y+\alpha+\beta)(y+\alpha-\beta)\quad\cdots(*)$

これに $(\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ を代入すると

$$\frac{1}{x^2}f(x)=(y+2)(y-1)=\left(x+\frac{1}{x}+2\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$$

したがって $\quad f(x)=(x^2+2x+1)(x^2-x+1)$
$\qquad\qquad\qquad\quad =(x+1)^2(x^2-x+1)$

よって，方程式 $f(x)=0$ の解は $\quad \boldsymbol{x=-1}$ **(2 重解)，** $\boldsymbol{\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(3) $f(x)=0$ のとき，$(*)$ より

$$y=-\alpha\pm\beta\quad すなわち\quad x+\frac{1}{x}=-\alpha\pm\beta\quad\cdots(**)$$

ここで，$x+\dfrac{1}{x}=k$ とおくと (k は定数) $\quad x^2-kx+1=0\quad\cdots$①

① が重解をもつとき，係数について

$$(-k)^2-4\cdot1=0\quad これを解いて\quad k=\pm2,\quad 重解\ \frac{k}{2}$$

$k=2$ (重解 1) のとき，$(**)$ より

$$-\alpha+\beta=-\alpha-\beta=2\quad ゆえに\quad(\alpha,\ \beta)=(-2,\ 0)$$

$k=-2$ (重解 -1) のとき，$(**)$ より

$$-\alpha+\beta=-\alpha-\beta=-2\quad ゆえに\quad(\alpha,\ \beta)=(2,\ 0)$$

よって，$f(x)=0$ がちょうど 1 つの解をもつとき $\quad\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(\pm2,\ 0)}$ ■

$\boxed{3}$ (1) $p=1$ より，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=3n^2+3n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+3k) \\ &= 1+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n-1) \\ &= n^3-n+1 \end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　　$\boldsymbol{a_n=n^3-n+1}$

別解 $a_{n+1}-a_n=3n(n+1)=\{(n+2)-(n-1)\}n(n+1)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1) \\ a_{n+1}-n(n+1)(n+2) &= a_n-(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

したがって　　$a_n-(n-1)n(n+1)=a_1-(1-1)\cdot1\cdot(1+1)$

よって　　$a_n=n^3-n+1$

(2) $(*)$ より　$a_{n+1}-pa_n=3n^2+3n$　$\cdots$①

与えられた漸化式

$$a_{n+1}+\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma) \quad \cdots(**)$$

を変形すると

$$\begin{aligned} a_{n+1}-pa_n=(p-1)\alpha n^2&+\{(p-1)\beta-2\alpha\}n \\ &+\{(p-1)\gamma-\alpha-\beta\} \quad \cdots② \end{aligned}$$

①，② の右辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$(p-1)\alpha=3,\quad (p-1)\beta-2\alpha=3,\quad (p-1)\gamma-\alpha-\beta=0$$

$p \neq 1$ に注意して　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{3}{p-1},\quad \beta=\dfrac{3(p+1)}{(p-1)^2},\quad \gamma=\dfrac{6p}{(p-1)^3}}$

(3) (2) の結果に $p=2$ を代入すると　$\alpha=3,\ \beta=9,\ \gamma=12$

$b_n=a_n+3n^2+9n+12$ とおくと　$b_1=25$　$(**)$ より　$b_{n+1}=2b_n$

$\{b_n\}$ は初項 25，公比 2 の等比数列であるから　$b_n=25\cdot2^{n-1}$

したがって　　$a_n+3n^2+9n+12=25\cdot2^{n-1}$

よって　　$\boldsymbol{a_n=25\cdot2^{n-1}-3n^2-9n-12}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 原点O，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ b,\ b)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ b,\ b)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 0,\ 0)+t(-2,\ b,\ b)=(1-2t,\ bt,\ bt)$$

よって　　$\mathbf{P}(\mathbf{1-2}\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{bt},\ \boldsymbol{bt})$

(2) (1) で求めた点Pの座標を球 $S : x^2+(y-1)^2+z^2=1$ に代入すると

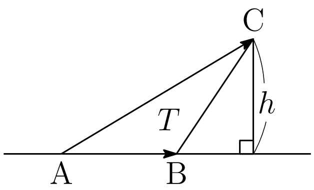
$$(1-2t)^2+(bt-1)^2+(bt)^2=1$$
$$2(b^2+2)t^2-2(b+2)t+1=0$$

このとき，t に関する2次方程式が実数解をもつから，判別式 D について

$$D/4=(b+2)^2-2(b^2+2)\cdot 1=-b^2+4b \geqq 0$$

したがって　$b(b-4)\leqq 0$　　これを解いて　$\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{b} \leqq \mathbf{4}$

別解 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ b,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 1,\ 0)$ より，
△ABCの面積 T は



$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(2b^2+4)\cdot 2-(2+b)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3b^2-4b+4}\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

Cから直線ABに下ろした垂線の長さを h とすると

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|h=T\quad ゆえに\quad h=\frac{2T}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}=\frac{\sqrt{3b^2-4b+4}}{\sqrt{2b^2+4}}$$

このとき，$h\leqq 1$ であるから　　$\sqrt{\dfrac{3b^2-4b+4}{2b^2+4}}\leqq 1$

したがって　$3b^2-4b+4\leqq 2b^2+4$　これを解いて　$\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{b} \leqq \mathbf{4}$

(3) $3b^2-4b+4=3\left(b-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}$ であるから，$(*)$ および (2) の結果より，

T は，$\boldsymbol{b}=\mathbf{4}$ のとき最大値 $\mathbf{3}$，$\boldsymbol{b}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $P(X_{(n)} \leqq 8)$ は n 回とも 8 以下の数字のカードを取り出す確率であるから

$$P(X_{(n)} \leqq 8) = \left(\frac{8}{10}\right)^n = \boldsymbol{\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

(2) n 回とも 7 以下の数字のカードを取り出す確率は

$$P(X_{(n)} \leqq 7) = \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

これと (1) の結果から，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X_{(n)} = 8) &= P(X_{(n)} \leqq 8) - P(X_{(n)} \leqq 7) \\ &= \left(\frac{8}{10}\right)^n - \left(\frac{7}{10}\right)^n = \boldsymbol{\frac{8^n - 7^n}{10^n}} \end{aligned}$$

(3) $X_{(2)}$ が 6 以上となるのは，n 回の試行で，5 以下のカードを取り出す回数が 1 回以下の場合で，その確率は

$$_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$$

この確率が $\dfrac{1}{2}$ 未満となるとき

$$\frac{n+1}{2^n} < \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 2^{n-1} - n - 1 > 0$$

$f(n) = 2^{n-1} - n - 1$ とおくと，$f(n) > 0$ をみたす最小の整数 n $(n \geqq 2)$ を求めればよい．

$$f(2) = -1, \quad f(3) = 0, \quad f(4) = 3 > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{n = 4}$$

■

$\boxed{6}$ (1) $z = \boldsymbol{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \boldsymbol{\frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}},$$

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = \boldsymbol{r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}}$$

(2) (1) の結果により

$$\begin{aligned} w = z^2 + \frac{\overline{z}}{z} &= r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}^2 \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta) \\ &= (r^2+1)\cos 2\theta + (r^2-1)i\sin 2\theta \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

z が原点を中心とする半径 1 の円の周上を動くから，$r = 1$ より

$$w = 2\cos 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad -2 \leqq w \leqq 2$$

よって，点 w は **2 点 2, −2 を両端とする線分を描く．**

(3) $(*)$ より　$x = (r^2+1)\cos 2\theta$，$y = (r^2-1)\sin 2\theta$

$r > 1$ に注意して　$\cos 2\theta = \dfrac{x}{r^2+1}$,　$\sin 2\theta = \dfrac{y}{r^2-1}$

したがって　　$\boldsymbol{C : \dfrac{x^2}{(r^2+1)^2} + \dfrac{y^2}{(r^2-1)^2} = 1}$

(4) (3) の結果より，C は原点を中心とする長軸の長さ $2(r^2+1)$，短軸の長さ $2(r^2-1)$ の楕円であるから，その面積は

$$\pi(r^2+1)(r^2-1) = \boldsymbol{\pi(r^4-1)}$$

■

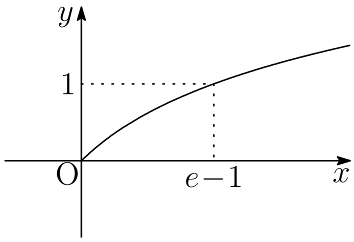
7 (1) $f(x)=\log(1+x)$ $(x \geqq 0)$ より，

$x>0$ において

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0$$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f''(x)$		$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$



(2) $y=\log(1+x)$ より，$x=e^y-1$ であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^h x^2\,dy = \pi\int_0^h (e^y-1)^2\,dy \quad \cdots(*) \\ &= \pi\int_0^h (e^{2y}-2e^y+1)\,dy \\ &= \pi\left[\frac{e^{2y}}{2}-2e^y+y\right]_0^h = \boldsymbol{\pi\left(\frac{e^{2h}}{2}-2e^h+h+\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

(3) $V=vt$ より $\dfrac{dV}{dt}=v$，　$(*)$ より $\dfrac{dV}{dh}=\pi(e^h-1)^2$，

これらを $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ に代入すると　$v=\pi(e^h-1)^2\dfrac{dh}{dt}$　$\cdots(**)$

$h=\log 2$ のとき，$e^h=2$ を $(**)$ に代入すると

$$v=\pi(2-1)^2\frac{dh}{dt} \quad よって \quad \boldsymbol{\frac{dh}{dt}=\frac{v}{\pi}}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $y=e^x$ より　$y'=e^x$

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

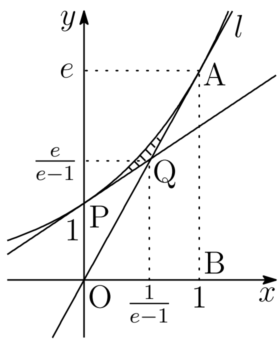
$$y-e^t=e^t(x-t)\quad ゆえに\quad y=e^t(x-t+1)\quad \cdots(*)$$

これが原点を通るとき　$0=e^t(-t+1)$　ゆえに　$t=1$

$t=1$ を $(*)$ に代入することにより，l の方程式は　　$\boldsymbol{y=ex}$

(2) (1) で求めた接点を $\mathrm{A}(1,\ e)$ とし，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とおく．
直線 $y=x+1$ は，$(*)$ により，点 $(0,\ 1)$ における接線で，その接点を P とする．
$l:y=ex$ と直線 $y=x+1$ の交点を Q とすると

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{e-1},\ \frac{e}{e-1}\right)$$



求める面積は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 e^x\,dx-\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OPQ} \\ &= \Big[\ e^x\ \Big]_0^1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot e-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{e-1} \\ &= \boldsymbol{\frac{e}{2}-\frac{1}{2(e-1)}-1} \end{aligned}$$

■