平成 29 年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成 29 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択．数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の 2 題から 1 問選択．数 I・II・A・B または数 I・III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = |x-1| - 2$ について，次の各問いに答えよ．

(a) $y = f(x)$ のグラフを描け．

(b) $|f(x)| > 1$ となる x の範囲を求めよ．

(2) 実数 α は $\sqrt{2} < \alpha$ を満たすとする．$\sqrt{2} < \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{\alpha} < \alpha$ を示せ．

(3) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = 2x^2 - 3\int_{-1}^{0} xf(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $y = \cos 2\theta - a\sin\theta + 2$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) $t = \sin\theta$ とするとき，y を t を用いて表せ．

(2) y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ．また，そのときの t の値も求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

$$\begin{aligned} &a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \\ &a_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ &b_{n+1} = a_n + 4b_n + 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

次の各問いに答えよ．

(1) $c_n = a_n - b_n$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $d_n = a_n + 3b_n$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 一辺の長さが 1 の立方体 OABC − DEFG において，線分 BF を 2 : 1 に内分する点を P，線分 EF の中点を Q とする．また，線分 OF と平面 PQG の交点を R とする．次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を満たす実数 s を求めよ．

(3) △PQG の重心を S とするとき，線分 RS の長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 1 枚のコイン投げを $2n$ 回行う．この $2n$ 回のコイン投げで，表が出る合計回数を X とする．ただし，コインの表と裏の出る確率は等しいとする．次の各問いに答えよ．　※ n は自然数とする

(1) X の期待値と標準偏差をそれぞれ求めよ．

(2) $\dfrac{P(X = k+1)}{P(X = k)}$ を求めよ．ただし，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1$ とする．

(3) $P(X = k)$ を最大にする k の値を求めよ．

(4) $n = 200$ とする，試行回数が大きいとき，X の確率分布は正規分布で近似できることが知られており，試行回数 400 はこのような近似が成り立つのに十分大きいとみなせる．このことを利用して，X の値が

$$190 \leqq X \leqq 210$$

となる確率の近似値を求めよ．ただし，標準正規分布に従う確率変数 Z に対する $P(Z > 1)$ の近似値としては 0.159 を用いよ．

6 O を原点とする座標平面において，C_1 を曲線 $\dfrac{x^2}{3^2}+y^2=1$，C_2 を直線 $y=2$ とする．点 P は第 1 象限にある C_1 上のある点とし，点 P における C_1 の接線を ℓ，この接線 ℓ と C_2 との交点を Q とおく．次の各問いに答えよ．

(1) 点 P の座標を $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表すとき，接線 ℓ の方程式，および点 Q の座標を θ を用いて求めよ．

(2) $\triangle$POQ の面積を最小にする点 P の座標，および接線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) (2) のとき，曲線 C_1 で囲まれた図形と $\triangle$POQ との共通部分の面積を求めよ．

7 O を原点とする複素数平面において，4 点 O，A，B，C が，時計の針の回転と逆の向きに正方形をなすとする．複素数 z，w を表す点 $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ が，点 A，B，C のいずれかに一致しているとき，次の各問いに答えよ．

(1) z，w が条件 $0<\arg\left(\dfrac{w}{z}\right)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする．このとき，点 P，Q は点 A，B，C のいずれに一致しうるか，条件を満たす P，Q の組をすべて求めよ．

(2) z，w が (1) の条件に加え，さらに $w=z^2$ を満たすとする．このとき，(1) で求めた P，Q のそれぞれの組に対して，複素数 z の値を求め，対応する正方形 OABC を複素数平面上に図示せよ．

8 曲線 $y=e^{-2x}$ を考える．この曲線上の点 $(t,\ e^{-2t})$ における接線 ℓ が点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るとき，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) t の値と接線 ℓ の方程式を求めよ．

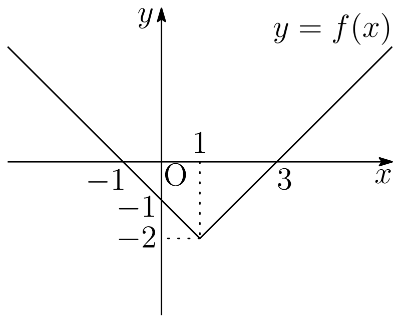
(2) 曲線 $y=e^{-2x}$ と接線，x 軸，および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) $f(x)=|x-1|-2$ より

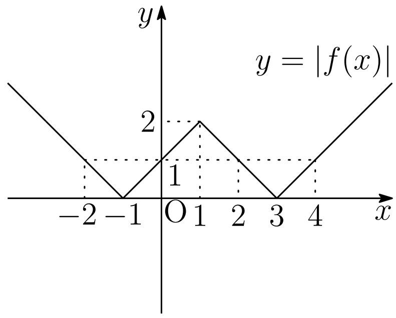
$$f(x)=\begin{cases} x-3 & (x \geqq 1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは，
右の図のようになる．



(b) (a) の結果から，$y=|f(x)|$ のグラフは，
右の図のようになる．
よって，$|f(x)|>1$ となる x の範囲は

$$\boldsymbol{x<-2,\ 0<x<2,\ 4<x}$$



(2) 実数 α は $\sqrt{2}<\alpha$ を満たすから

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}-\sqrt{2}=\frac{1}{2\alpha}(\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+2)=\frac{1}{2\alpha}(\alpha-\sqrt{2})^2>0,$$

$$\alpha-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha}(\alpha^2-2)=\frac{1}{2\alpha}(\alpha+\sqrt{2})(\alpha-\sqrt{2})>0$$

よって　$\sqrt{2}<\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{\alpha}<\alpha$

(3) $A=\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt$，$B=\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=2x^2-3Ax-B$ より

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0}(2t^2-3At-B)\,dt=\left[\,\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}At^2-Bt\,\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}A-B, \\ B &= \int_{0}^{1}(2t^2-3At-B)\,dt=\left[\,\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}At^2-Bt\,\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{3}-\frac{3}{2}A-B \end{aligned}$$

整理すると　$-\dfrac{1}{2}A+B=\dfrac{2}{3}$，　$\dfrac{3}{2}A+2B=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$A=-\dfrac{4}{15}$，$B=\dfrac{8}{15}$　よって　$\boldsymbol{f(x)=2x^2+\dfrac{4}{5}x-\dfrac{8}{15}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \cos 2\theta - a\sin\theta + 2 = (1 - 2\sin^2\theta) - a\sin\theta + 2$
$= -2\sin^2\theta - a\sin\theta + 3$

$t = \sin\theta$ より　$\boldsymbol{y = -2t^2 - at + 3}$

(2) (1) の結果から　$y = -2\left(t + \dfrac{a}{4}\right)^2 + \dfrac{a^2}{8} + 3$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$ であるから

$$f(t) = -2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} + 3 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

とおく．$f(t)$ の最大値は軸の方程式 $x = -\dfrac{a}{4}$ および $a > 0$ に注意して

(i) $-1 \leqq -\dfrac{a}{4} < 0$，すなわち，$0 < a \leqq 4$ のとき

$$M = f\left(-\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{8} + 3$$

(ii) $-\dfrac{a}{4} < -1$，すなわち，$a > 4$ のとき

$$M = f(-1) = a + 1$$

$f(t)$ の最小値は，定義域の中央 $\dfrac{-1+1}{2} = 0$ に対して，$-\dfrac{a}{4} < 0$ より

$$m = f(1) = -a + 1$$

よって　**$\boldsymbol{0 < a \leqq 4}$ のとき，$\boldsymbol{t = -\dfrac{a}{4}}$ で，　$\boldsymbol{M = \dfrac{a^2}{8} + 3}$**
$\boldsymbol{a > 4}$ のとき，$\boldsymbol{t = -1}$ で，　$\boldsymbol{M = a + 1}$
$\boldsymbol{t = 1}$ で，　$\boldsymbol{m = -a + 1}$

補足　上に凸の 2 次関数の最小値は，定義域の中央が放物線の軸より右側にあるときは，定義域の右端で最小値をとり，定義域の中央が放物線の軸より左側にあるときは，定義域の左端で最小値をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_1 = 2,\ \ b_1 = 1,$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2 \quad \cdots ① \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_{n+1} = a_n + 4b_n + 2 \quad \cdots ② \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

①，② から $\quad a_{n+1} - b_{n+1} = (2a_n + 3b_n - 2) - (a_n + 4b_n + 2)$
$= a_n - b_n - 4$

すなわち $\quad c_{n+1} = c_n - 4 \quad$ また $\quad c_1 = a_1 - b_1 = 2 - 1 = 1$

したがって，数列 $\{c_n\}$ は，初項が 1，公差が -4 の等差数列である．

よって $\qquad c_n = 1 + (n-1)\cdot(-4) = \boldsymbol{-4n + 5}$

(2) ①，② から $\quad a_{n+1} + 3b_{n+1} = (2a_n + 3b_n - 2) + 3(a_n + 4b_n + 2)$
$= 5(a_n + 3b_n) + 4$

すなわち $\quad d_{n+1}+1 = 5(d_n+1) \quad$ また $\quad d_1+1 = a_1+3b_1+1 = 2+3\cdot1+1 = 6$

したがって，数列 $\{d_n + 1\}$ は，初項が 6，公比が 5 の等比数列である．

ゆえに $\qquad d_n + 1 = 6\cdot5^{n-1} \quad$ よって $\quad \boldsymbol{d_n = 6\cdot5^{n-1} - 1}$

(3) (1)，(2) の結果から

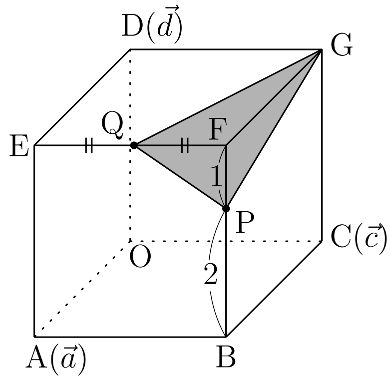
$$a_n - b_n = -4n + 5, \quad a_n + 3b_n = 6\cdot5^{n-1} - 1$$

上の 2 式から，b_n を消去すると $\qquad \boldsymbol{a_n = \frac{3}{2}\cdot5^{n-1} - 3n + \frac{7}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 右の図から

$$\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{c}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{d}} \quad \cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{c}} + \vec{\boldsymbol{d}} \quad \cdots②$$



(2) また　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \vec{c} + \vec{d} \quad \cdots③$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は，1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を実数 x，y，z を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}} &= x\overrightarrow{\mathrm{OP}} + y\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + z\overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= x\left(\vec{a} + \vec{c} + \frac{2}{3}\vec{d}\right) + y\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}\right) + z\left(\vec{c} + \vec{d}\right) \\ &= (x+y)\vec{a} + \left(x + \frac{1}{2}y + z\right)\vec{c} + \left(\frac{2}{3}x + y + z\right)\vec{d}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$ であるから

$$x + y = 1, \quad x + \frac{1}{2}y + z = 1, \quad \frac{2}{3}x + y + z = 1$$

これを解いて　$x = \frac{3}{5}$，$y = \frac{2}{5}$，$z = \frac{1}{5}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ により　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{3s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{s}{5}\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

このとき，R は平面 PQG 上の点であるから

$$\frac{3s}{5} + \frac{2s}{5} + \frac{s}{5} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{s} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$$

(3) (2) の結果から $\qquad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{5}{6}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})$

①〜③ により，$\triangle$PQG の重心 S は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}})\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)+\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\right\}\\&=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{c}+\frac{8}{9}\vec{d}\end{aligned}$$

したがって $\qquad \begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RS}}&=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{c}+\frac{8}{9}\vec{d}\right)-\frac{5}{6}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{d})\\&=-\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{18}\vec{d}=\frac{1}{18}(-3\vec{a}+\vec{d})\end{aligned}$

$|\vec{a}|=|\vec{d}|=1$，$\vec{a}\perp\vec{d}$ より $\vec{a}\cdot\vec{d}=0$ であるから

$$|-3\vec{a}+\vec{d}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=10$$

したがって $\qquad |-3\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{10}$

よって $\qquad \mathrm{RS}=|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|=\dfrac{1}{18}|-3\vec{a}+\vec{d}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{18}}$

$\boxed{5}$ (1) コインの表と裏の出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$

確率変数 X は二項分布 $B\left(2n,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う．

よって，期待値 $E(X)$ と標準偏差 σ は

$$E(X) = 2n\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{n},\quad \sigma = \sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\boldsymbol{\frac{n}{2}}}$$

(2) $P(X=k) = {}_{2n}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$，$P(X=k+1) = {}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ より

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} &= \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{2n}\mathrm{C}_k} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}\cdot\frac{k!(2n-k)!}{(2n)!}\\ &= \boldsymbol{\frac{2n-k}{k+1}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $\quad \dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} - 1 = \dfrac{2n-2k-1}{k+1}$

したがって　　$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき　$\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} > 1$

$n \leqq k \leqq 2n$ のとき　$\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} < 1$

よって，$P(X=k)$ を最大にする k の値は　$\boldsymbol{n}$

(4) $n=200$ のとき，確率変数 X は二項分布 $B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う．

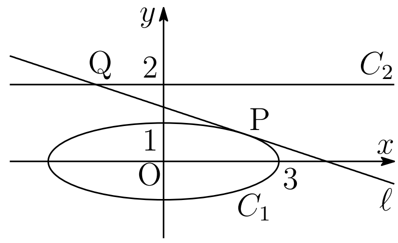
$B\left(400,\ \dfrac{1}{2}\right)$ は，正規分布 $N(200,\ 100)$ で近似されるから

$$Z = \frac{X-200}{\sqrt{100}}$$

とおくと，確率変数 Z は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned}P(190 \leqq X \leqq 210) &= P\left(-1 \leqq \frac{X-200}{10} \leqq 1\right)\\ &= P(-1 \leqq Z \leqq 1)\\ &= 2P(0 \leqq Z \leqq 1)\\ &= 2\{0.5 - P(Z>1)\}\\ &= 2(0.5-0.159) = \mathbf{0.682}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{3^2} + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線 ℓ の方程式は



$$\frac{(3\cos\theta)x}{3^2} + (\sin\theta)y = 1$$

すなわち $\boldsymbol{\dfrac{x\cos\theta}{3} + y\sin\theta = 1}$

上式に $y = 2$ を代入すると

$$\frac{x\cos\theta}{3} + 2\sin\theta = 1 \quad ゆえに \quad x = \frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}$$

よって，点 Q の座標は $\boldsymbol{\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)}$

(2) 3 点 O，$\mathrm{P}(3\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta},\ 2\right)$ を頂点とする三角形の面積を $f(\theta)$ とすると $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2}\left|3\cos\theta\cdot 2 - \sin\theta\cdot\frac{3(1-2\sin\theta)}{\cos\theta}\right| \\ &= \frac{3}{2\cos\theta}(2-\sin\theta) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\cos\theta} - \tan\theta\right) \end{aligned}$$

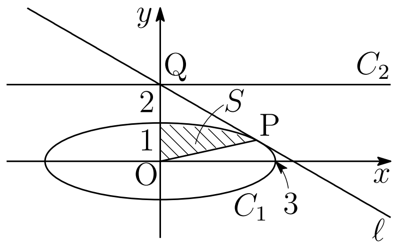
したがって $f'(\theta) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right) = \dfrac{3(2\sin\theta - 1)}{2\cos^2\theta}$

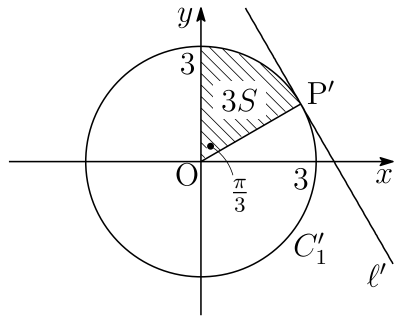
θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(\theta)$ は最小となるから，このとき $\mathbf{P}\boldsymbol{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

また，ℓ は (1) の結果から $\boldsymbol{\dfrac{x}{2\sqrt{3}} + \dfrac{y}{2} = 1}$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\mathrm{P}\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$．
求める面積を S とし，C_1 および OP を x 軸を元に y 軸方向に 3 倍に拡大したものをそれぞれ C_1'，OP' とすると，$\mathrm{P}'\left(3\cos\dfrac{\pi}{6},\ 3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$．





OP' と y 軸の正の向きのなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$3S=\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{\pi}{3}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{S=\frac{\pi}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 複素数平面上の 3 点 A，B，C の座標をそれぞれ α，β，γ とすると

$$|\alpha|=\frac{|\beta|}{\sqrt{2}}=|\gamma|,\quad \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\arg\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)=\frac{\pi}{4}\qquad\cdots(*)$$

上の第 2 式および $\arg\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\arg\left(\dfrac{w}{z}\right)\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす点 $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ の組は，次の 3 組．

$$\mathbf{(P,\ Q)=(A,\ B),\ (B,\ C),\ (A,\ C)}$$

(2) (i) $z=\alpha$，$w=\beta$ のとき，$\beta=\alpha^2$ より，$\alpha=\dfrac{\beta}{\alpha}$ であるから

$$|\alpha|=\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\sqrt{2},\quad \arg\alpha=\arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$(*)$ により　$|\beta|=2$，$\arg\beta=\dfrac{\pi}{2}$，$|\gamma|=\sqrt{2}$，$\arg\gamma=\dfrac{3}{4}\pi$

(ii) $z=\beta$，$w=\gamma$ のとき，$\gamma=\beta^2$ より，$\beta=\dfrac{\gamma}{\beta}$ であるから

$$|\beta|=\frac{|\gamma|}{|\beta|}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arg\beta=\arg\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$(*)$ により　$|\alpha|=\dfrac{1}{2}$，$\arg\alpha=0$，$|\gamma|=\dfrac{1}{2}$，$\arg\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

(iii) $z=\alpha$，$w=\gamma$ のとき，$\gamma=\alpha^2$ より，$\alpha=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ であるから

$$|\alpha|=\frac{|\gamma|}{|\alpha|}=1,\quad \arg\alpha=\arg\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{2}$$

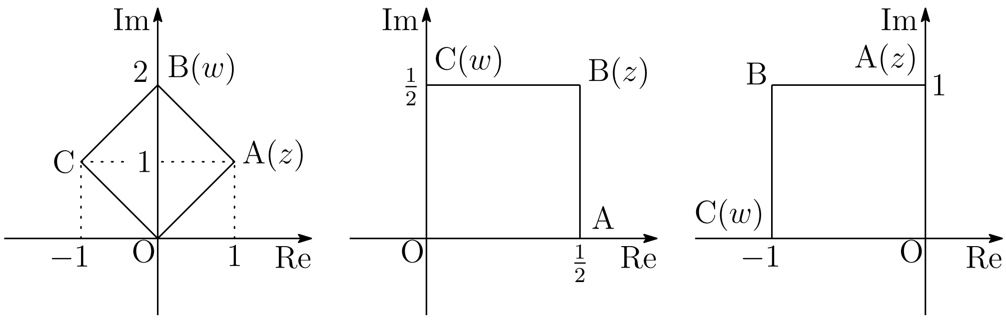
$(*)$ により　$|\beta|=\sqrt{2}$，$\arg\beta=\dfrac{3}{4}\pi$，$|\gamma|=1$，$\arg\gamma=\pi$

(i)〜(iii) の結果から

$\boldsymbol{z=1+i}$ のとき　A$(1+i)$，B$(2i)$，C$(-1+i)$

$\boldsymbol{z=\dfrac{1+i}{2}}$ のとき　A$\left(\dfrac{1}{2}\right)$，B$\left(\dfrac{1+i}{2}\right)$，C$\left(\dfrac{i}{2}\right)$

$\boldsymbol{z=i}$ のとき　A(i)，B$(-1+i)$，C(-1)



$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $y=e^{-2x}$ を微分すると　$y=-2e^{-2x}$

曲線 $y=e^{-2x}$ 上の点 $(t,\ e^{-2t})$ における接線 ℓ の方程式は

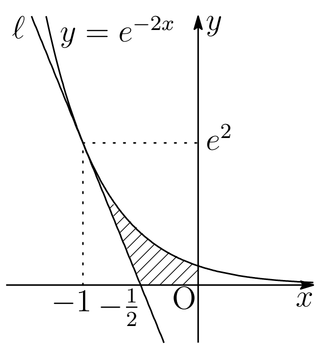
$$y-e^{-2t}=-2e^{-2t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=e^{-2t}(-2x+2t+1)\quad \cdots①$$

ℓ は，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

$$0=e^{-2t}(2t+2)\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{t=-1}$$

求める ℓ の方程式は，これを ① に代入して　$\boldsymbol{y=-e^2(2x+1)}$

(2) 求める面積を S とすると，右の図から



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} e^{-2x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^2 \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{4}e^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$