# 平成28年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
# 理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
# 平成28年2月25日

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 必答．数I・II・III・A・B(120分)
- 理[生命化]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から1問選択．数I・II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育]学部は，$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{2}$, $\boxed{8}$ の2題から1問選択．数I・II・A・Bまたは数I・III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) △ABCにおいて∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする．AB = 6，BC = 5，BD = 3のとき，辺ACの長さを求めよ．

(2) 自然数$n$が6と互いに素であるとき，$n^2-1$が6で割り切れることを示せ．

(3) $xy$平面で次の不等式で表される領域を図示せよ．

$$|x| \leqq y \leqq 1-|x|$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 整式$P(x)$を0でない整式$Q(x)$で割った余りを$R(x)$とおく．方程式$P(x)=0$と$Q(x)=0$の共通解は方程式$Q(x)=0$と$R(x)=0$の共通解であることを示せ．また逆に方程式$Q(x)=0$と$R(x)=0$の共通解は方程式$P(x)=0$と$Q(x)=0$の共通解であることを示せ．

(2) 整式$P(x)$，$Q(x)$を

$$P(x)=x^4+2x^3+x^2-1, \quad Q(x)=x^3+2x^2-1$$

とおく．方程式$P(x)=0$と$Q(x)=0$の共通解をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定める．また $\alpha$ を $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ を満たす正の実数とする．次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ で定める．$b_{n+1}$ を $b_n$ を用いて表せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $b_n \geqq 1$ となることを示せ．

(3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_{n+1} - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha}|b_n - \alpha|$ となることを示せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $|b_n - \alpha| \leqq \dfrac{1}{\alpha^n}$ となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 四面体 OABC を考える．辺 OA を $1:1$ に内分する点を P とする．また辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q として，辺 OC を $3:1$ に内分する点を R とする．さらに三角形 ABC の重心を G とする．3 点 P，Q，R を通る平面と線分 OG の交点を K とする．線分 OK と KG の長さの比を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 1 個のさいころを 10 回投げるとき，1 または 2 の目が出る回数 $X$ の期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 $X$ の確率密度関数が $f(x) = \dfrac{2}{25}x$ $(0 \leqq x \leqq 5)$ で与えられているとき，$X$ の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(3) 2 つの事象 $A$，$B$ について，$A$ と $B$ が独立なら $\overline{A}$ と $B$ も独立であることを示せ．ただし $\overline{A}$ は $A$ の余事象を表す．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x) = (\log x)^2 - \log x$ $(x > 0)$ を考える．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x) = 0$ を満たす $x$ をすべて求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．また関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし関数 $y = f(x)$ の増減，凹凸，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を明示すること．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 複素数 $z$，$w$ について，次の関係が成立することを示せ．ただし複素数 $\alpha$ に対し，$\overline{\alpha}$ は $\alpha$ と共役な複素数を表す．

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

(2) 方程式 $z^2 - z + 1 = 0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とする．次の各問いに答えよ．

(a) $\alpha$，$\beta$ を求めよ．さらにそれらを極形式で表せ．

(b) $\alpha^{100} + \beta^{100}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 関数 $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ について，次の各問いに答えよ．

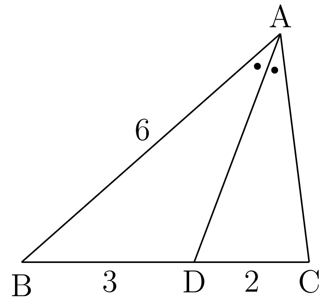
(1) 導関数 $f'(x)$ および 2 次導関数 $f''(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ および $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f(x)$ の定積分を利用して $\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$ を示せ．

# 正解

**1** (1) BC $=5$，BD $=3$ より




$$\mathrm{DC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BD}=5-3=2$$

AD は $\angle$A の二等分線であるから，
AB : AC = AD : DC より

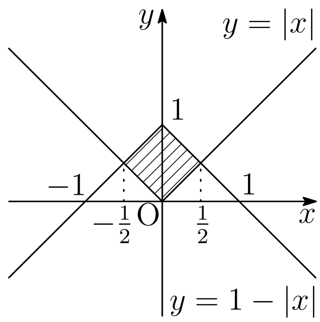
$$6:\mathrm{AC}=3:2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{AC=4}$$

(2) 連続する 3 数 $n-1$, $n$, $n+1$ の中には，必ず偶数と 3 の倍数がある．
$n$ が 6 と互いに素であるから，$n$ は偶数でなく，3 の倍数でもない．
したがって，$(n-1)(n+1)$ は偶数であり，かつ 3 の倍数である．
よって　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ は 6 で割り切れる．

補足 このとき，$n$ は奇数であるから，$n-1$，$n+1$ はともに偶数である．
実際は，$n^2-1$ は 12 で割り切れる．

(3)
$$x \geqq 0 \text{ のとき} \quad x \leqq y \leqq 1-x$$
$$x < 0 \text{ のとき} \quad -x \leqq y \leqq 1+x$$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分で，
境界線を含む．




**2** (1) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの商を $S(x)$ とすると

$$P(x)=Q(x)S(x)+R(x) \qquad \cdots ①$$
$$R(x)=P(x)-Q(x)S(x) \qquad \cdots ②$$

② より，$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は，$R(x)=0$ の解である．
① より，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は，$P(x)=0$ の解である．
よって，上の 1 番目の結論から
$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解は，$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解である．
また，上の 2 番目の結論から
$Q(x)=0$ と $R(x)=0$ の共通解は，$P(x)=0$ と $Q(x)=0$ の共通解である．

(2) $P(x)$ を $Q(x)$ で割ることにより　$P(x) = xQ(x) + x^2 + x - 1$

$P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りを $R(x)$ とすると　$R(x) = x^2 + x - 1$

$Q(x)$ を $R(x)$ で割ることにより　$Q(x) = R(x)(x+1)$

(1) の結果から，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解であることと $Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解であることは同値である．したがって，$P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の共通解は，$Q(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通解であるから

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ より

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = \boldsymbol{1 + \frac{1}{b_n}}$$

(2) $a_1 = a_2 = 1$，$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = 1$

(1) で求めた $\{b_n\}$ の漸化式を

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \quad \cdots (*)$$

とすると，$b_1 = 1$ および $(*)$ から　$b_n > 0$

さらに，$(*)$ から，$n = 2, 3, 4 \cdots$ に対して　$b_n > 1$

よって，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して　$b_n \geqq 1$

(3) $(*)$ および $\alpha = 1 + \dfrac{1}{\alpha} \cdots$ ① に注意して

$$b_{n+1} - \alpha = 1 - \alpha + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\alpha}$$

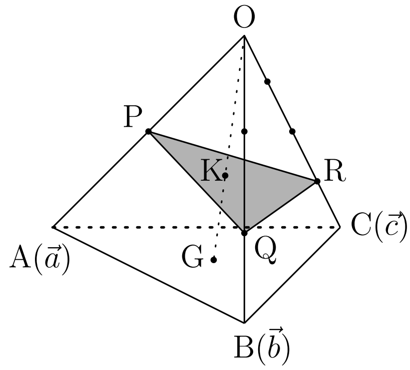
したがって，(2) の結果により

$$|b_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{\alpha b_n} |b_n - \alpha| \leqq \frac{1}{\alpha} |b_n - \alpha|$$

(4) (3) の結果および ① に注意して $(\alpha > 0)$

$$|b_n - \alpha| \leqq \frac{1}{\alpha^{n-1}} |b_1 - \alpha| = \frac{1}{\alpha^{n-1}} |1 - \alpha| = \frac{1}{\alpha^{n-1}} \left| -\frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{\alpha^n}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ K は OG 上の点であるから，実数 $k$ を用いて




$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OK}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ &= \frac{k}{3}\left(2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right) \\ &= \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \frac{4k}{9}\overrightarrow{\mathrm{OR}}\end{aligned}$$

また，K は平面 PQR 上の点であるから

$$\frac{2k}{3} + \frac{k}{2} + \frac{4k}{9} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{18}{29}$$

よって　　**OK : KG = 18 : 11**

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 1 個のさいころをなげて 1 または 2 の目が出る確率は　$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

確率変数 $X$ は，二項分布 $B\left(10,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従うから

$$E(X) = 10\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{10}{3}}, \quad \sigma(X) = \sqrt{10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{3}}$$

(2) $E(X) = \displaystyle\int_0^5 xf(x)\,dx = \int_0^5 \frac{2}{25}x^2\,dx = \left[\ \frac{2}{75}x^3\ \right]_0^5 = \mathbf{\frac{10}{3}}$

$$\begin{aligned}V(X) &= \int_0^5 x^2 f(x)\,dx - \{E(X)\}^2 = \int_0^5 \frac{2}{25}x^3\,dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \\ &= \left[\ \frac{1}{50}x^4\ \right]_0^5 - \frac{100}{9} = \mathbf{\frac{25}{18}}\end{aligned}$$

(3) $A$ と $B$ が独立であるとき

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

が成立するから

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap B) &= P(B) - P(A\cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) = P(\overline{A})P(B)\end{aligned}$$

よって，$\overline{A}$ と $B$ は独立である．

**補足** 条件付き確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

について，$A$ と $B$ が独立であるとは

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{および} \quad P_B(A) = P(A)$$

が成り立つことである．また，$A$ と $B$ が独立であるとき

$$\begin{aligned}
P_B(\overline{A}) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B) - P(A)P(B)}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\overline{A}) \\
P_{\overline{A}}(B) &= \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \\
&= \frac{P(B) - P(A)P(B)}{1 - P(A)} = P(B)
\end{aligned}$$

したがって，$A$ と $B$ が独立のとき，$\overline{A}$ と $B$ は独立である．
同様に，　　$A$ と $B$ が独立のとき，$A$ と $\overline{B}$ は独立である．
$A$ と $B$ が独立のとき，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は独立である．

最後の定理は，次のように示してもよい．

$$\begin{aligned}
P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\
&= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} \\
&= P(\overline{A})P(\overline{B})
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x)=(\log x)^2-\log x$ より，$f(x)=0$ のとき

$$\log x(\log x-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=1,\ e}$$

(2)
$$f'(x)=2(\log x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=\frac{2\log x-1}{x}$$
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\log x-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{3-2\log x}{x^2}$$

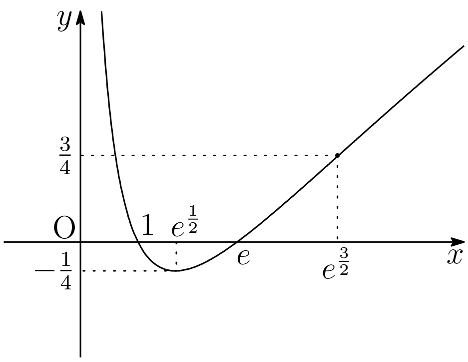
$f'(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{1}{2}}$，　$f''(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{3}{2}}$

よって，$f(x)$ の増減やグラフの凹凸は，次の表のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^{\frac{1}{2}}$ | $\cdots$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | 極小 $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | 変曲点 $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ |

また　$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\left\{\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\log x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\boldsymbol{\infty}$$

以上から，この関数のグラフの概形は，下の図のようになる．




(3) 求める面積を $S$ とすると，グラフの概形から

$$S=-\int_1^e\left\{(\log x)^2-\log x\right\}dx$$
$$=-\Big[\,x(\log x)^2-3x\log x+3x\,\Big]_1^e=\boldsymbol{3-e}$$

**7** (1) $z=x_1+y_1i$，$w=x_2+y_2i$ とおくと

(a) $z+w=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{z+w}&=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i\\&=(x_1-y_1i)+(x_2-y_2i)\\&=\overline{z}+\overline{w}\end{aligned}$$

(b) $zw=(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i$ より

$$\overline{zw}=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i \quad \cdots ①$$

$\overline{z}=x_1-y_1i$，$\overline{w}=x_2-y_2i$ より

$$\begin{aligned}\overline{z}\,\overline{w}&=(x_1-y_1i)(x_2-y_2i)\\&=(x_1x_2-y_1y_2)-(x_1y_2+x_2y_1)i \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より　　$\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$

(2) $z^2-z+1=0$ を解いて　　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(a) よって，求める $\alpha$，$\beta$ は

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}},\quad \boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}}$$

(b) $\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}=\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}$　であるから

$$\begin{aligned}\alpha^{100}+\beta^{100}&=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}+\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}\\&=\left(\cos\frac{100}{3}\pi+i\sin\frac{100}{3}\pi\right)+\left(\cos\frac{100}{3}\pi-i\sin\frac{100}{3}\pi\right)\\&=2\cos\frac{100}{3}\pi=2\cos\left(32\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-1}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ より

$$\boldsymbol{f'(x) = -\sin x + x, \quad f''(x) = -\cos x + 1}$$

(2) $x \geqq 0$ のとき，$f''(x) \geqq 0$，$f'(0) = 0$ であるから

$$x \geqq 0 \text{ のとき} \quad f'(x) \geqq f'(0) \quad \text{すなわち} \quad f'(x) \geqq 0$$

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$，$f(0) = 0$ であるから

$$x \geqq 0 \text{ のとき} \quad f(x) \geqq f(0) \quad \text{すなわち} \quad f(x) \geqq 0$$

(3)
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{x}\right) dx \\ &= \left[\ \sin x - x + \frac{x^3}{6}\ \right]_0^1 = \sin 1 - \frac{5}{6}\end{aligned}$$

(2) の結果から，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geqq 0$$

したがって　$\sin 1 - \dfrac{5}{6} \geqq 0$　　よって　$\sin 1 \geqq \dfrac{5}{6}$