# 平成 27 年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
# 平成 27 年 2 月 25 日 (旧課程)

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$ , $\boxed{2}$ , $\boxed{3}$ , $\boxed{5}$ 必答，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{9}$ から 1 問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$ , $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ , $\boxed{4}$ の 2 題から 1 題選択．数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$ , $\boxed{10}$ 必答，$\boxed{3}$ , $\boxed{4}$ の 2 題から 1 題選択，$\boxed{11}$ , $\boxed{12}$ の 2 題から 1 題選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) SATTUN という 6 文字を並べかえて得られる順列のうち，最初が子音文字になるものの総数を求めよ．

(2) 半径 $r$ の円 O$'$ が半径 $2r$ の円 O に点 P で内接し，さらに円 O$'$ は円 O の弦 AB に点 Q で接している．線分 PQ の延長が円 O と交わる点を M とする．$\angle\mathrm{PQB} = 60^\circ$ のとき，線分 QM の長さを求めよ．

(3) $x$ の整式 $f(x)$ に関する性質 $P$ と $Q$ をそれぞれ

$$P : f(x) = x^2 - 4x + 3$$
$$Q : f(1) = 0 \text{ かつ } f(3) = 0$$

とするとき，次の (a) から (d) の中で正しいものを選び，それが正しい理由を述べよ．

(a) $P$ は $Q$ の必要十分条件である．

(b) $P$ は $Q$ の十分条件であるが必要条件でない．

(c) $P$ は $Q$ の必要条件であるが十分条件でない．

(d) $P$ は $Q$ の必要条件でも十分条件でもない．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 0 でない実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく．ただし，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(a) $S$ と $T$ を $m$ と $n$ を用いて表せ．

(b) $S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m+n$ が最大となるような $m$ と $n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 0$，$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n\{1+(-1)^{n+1}\}}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) $a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$ をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項 $b_n$，$c_n$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面上に三角形 ABC と点 O があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} \neq 0$$

を満たしていると仮定する．辺 BC の中点を M，線分 OB の中点を N とし，三角形 OBC の外心を P とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{M} \neq \mathrm{P}$ のとき，線分 MP と線分 OA は平行であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = t\vec{a}$ とおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 $t$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$e$ は自然対数の底であり，$x > 0$ とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，その概形を描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．

(2) $t > 0$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸，および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積 $g(t)$ を求めよ．

(3) $t > 0$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸，および二つの直線 $x = t$ と $x = t + 1$ で囲まれる部分の面積 $h(t)$ が最大となるような $t$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ となるような点 $(x,\ y)$ が $2$ つ以上あることを示せ．

(2) $a$ と $k$ を実数とする．$\begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となるような原点以外の点 $(x,\ y)$ があるとき $a$ を $k$ を用いて表せ．

(3) $n$ を自然数とする．等式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす点 $(x,\ y)$ が描く図形の方程式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 原点 O を中心とし半径が $r$ の円を $y$ 軸を基準とし，$x$ 軸方向に $a$ 倍してできる楕円の焦点を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(2) $\theta$ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ かつ $\cos\theta \neq 0$ の範囲で変化するとき，放物線

$$y = x^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}x + \frac{2 + \sin 2\theta}{\cos^2\theta}$$

の頂点の描く曲線の方程式を求めよ．

(3) 半径 $3$ の円 $C$ の中心は，はじめ $(3,\ 3)$ にあり，$C$ 上の定点 P は $C$ と $y$ 軸との接点にある．この位置から $C$ が $x$ 軸上を正の方向に滑らずに転がり，角 $\theta$ だけ回転したときの，点 P の座標 $(x,\ y)$ を $\theta$ を用いて表せ．ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

**8** 整数 $n$ $(n \geqq 4)$ に対し，2 枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し，2 枚とも表が出るか，または $n$ 回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を $X_n$ とする．確率変数 $X_n$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $n-1$ 以下の自然数 $k$ に対して，確率 $P(X_n = k)$ を求めよ．また，確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を $n$ を用いて表せ．

(3) $X_n$ の平均を $E_n$ とかくとき，$E_{n+1} - E_n$ を求めよ．

**9** ある病気に対して投与する薬の効果の有無を調べたい．薬を投与し，効果有と判断される比率は $p$ であるとする．この病気を持った患者から無作為に $n$ 人を選び，薬を投与したとき，$i$ 番目の患者に薬の効果が認められれば 1 とし，認められなければ 0 とする確率変数を $X_i$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の平均，および分散を求めよ．

(2) この病気を持った患者から無作為に 400 人を選び，薬を投与したところ 320 人に薬の効果が認められた．このとき，母比率 $p$ の信頼度 95% の区間を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ．ただし，標本の大きさ 400 は十分大きい数とみなせるとし，また確率変数 $Z$ が標準正規分布に従うとき，$P(Z < -1.96) = 0.25$ が成り立つとする．

**10** 0 でない実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ．

**11** 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx, \quad T = \int_0^2 g(x)\,dx$$

とおく．ただし，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $S$ と $T$ を $m$ と $n$ を用いて表せ．

(2) $S \geqq 0$，$T \geqq 0$ のとき，$m + n$ が最大となるような $m$ と $n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{12}}$ 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$e$ は自然対数の底であり，$x > 0$ とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，その概形を描け．ただし，$\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸，および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

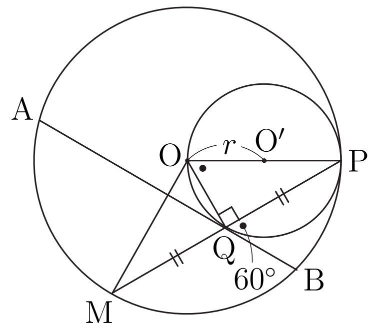
# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 最初の文字がSまたはNのとき，ともに $\dfrac{5!}{2!}$ (通り)

最初の文字がTのとき　5! (通り)

よって，求める総数は　$\dfrac{5!}{2!} \times 2 + 5! = \mathbf{240}$ (通り)

(2) Qは弦ABと円O′の接点であるから




$$\angle\mathrm{POQ} = \angle\mathrm{PQB} = 60^\circ$$

弦OPは，円O′の直径であるから

$$\angle\mathrm{OQP} = 90^\circ$$

$\triangle\mathrm{OMQ} \equiv \triangle\mathrm{OPQ}$ であるから

$$\mathrm{QM} = \mathrm{PQ} = \mathrm{OP}\sin 60^\circ = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,r}$$

(3) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ について，$f(1) = 0$ かつ $f(3) = 0$ であるから　$P \Rightarrow Q$

$f(1) = 0$ かつ $f(3) = 0$ を満たす $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ があるから　$Q \not\Rightarrow P$

よって，$P$ は $Q$ の十分条件であるが必要条件ではない．よって　**(b)**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $3^a = 5^b = 7^c = 105^d = M$ とおく.

$a$, $b$, $c$ は0でない実数であるから, $M$ は1でない正数.

したがって
$$a = \log_3 M = \frac{1}{\log_M 3} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 3 = \frac{1}{a}$$
$$b = \log_5 M = \frac{1}{\log_M 5} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 5 = \frac{1}{b}$$
$$c = \log_7 M = \frac{1}{\log_M 7} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 7 = \frac{1}{c}$$
$$d = \log_{105} M = \frac{1}{\log_M 105} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 105 = \frac{1}{d}$$

$\log_M 3 + \log_M 5 + \log_M 7 = \log_M 105$ であるから $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{d}$

(2) (a) $S = \displaystyle\int_0^2 (-3mx + 2n)\,dx = \left[-\frac{3}{2}mx^2 + 2nx\right]_0^2 = \boldsymbol{-6m + 4n}$

$T = \displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 2nx - m)\,dx = \left[2x^3 - nx^2 - mx\right]_0^2 = \boldsymbol{-2m - 4n + 16}$

(b) (a) の結果から

$$m = 2 - \frac{1}{8}S - \frac{1}{8}T, \quad n = 3 + \frac{1}{16}S - \frac{3}{16}T$$

したがって
$$m + n = 5 - \frac{1}{16}S - \frac{5}{16}T$$

$m \geqq 0$, $T \geqq 0$ のとき, $m + n$ が最大となるのは, 上の諸式より

$$S = T = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{m = 2,\ n = 3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_1=0$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n\{1+(-1)^{n+1}\}}{2}\ (n=1,2,3,\cdots)\quad\cdots(*)$

$(*)$ に $n=1,2,3,4$ を代入すると

$$a_2-a_1=1,\quad a_3-a_2=0,\quad a_4-a_3=3,\quad a_5-a_4=0$$

$a_1=0$ であるから　　$\boldsymbol{a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=4,\ a_5=4}$

(2) $(*)$ の $n$ をそれぞれ，$2n$，$2n+1$ に置き換えると

$$a_{2n+1}-a_{2n}=\frac{2n\{1+(-1)^{2n+1}\}}{2}=0$$
$$a_{2n+2}-a_{2n+1}=\frac{(2n+1)\{1+(-1)^{2n+2}\}}{2}=2n+1$$

したがって　$\begin{cases} b_{n+1}-c_n=0 & \cdots① \\ c_{n+1}-b_{n+1}=2n+1 & \cdots② \end{cases}$

上の 2 式から $b_{n+1}$ を消去すると　　$c_{n+1}-c_n=2n+1$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

したがって　$c_n-c_1=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)+n-1=n^2-1$

$c_1=a_2=1$ であるから　　$c_n=n^2$

上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

① から，$n\geqq 2$ のとき　　$b_n=c_{n-1}=(n-1)^2$

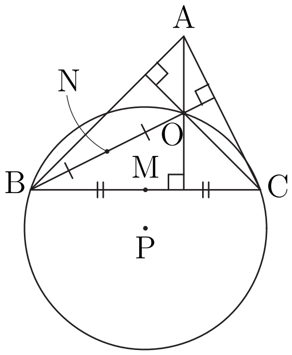
$b_1=a_1=0$ であるから，上式は，$n=1$ のときも成り立つ．

よって，求める一般項は　　$\boldsymbol{b_n=(n-1)^2,\ c_n=n^2}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{50}(-1)^n a_n&=\sum_{k=1}^{25}\{(-1)^{2k-1}a_{2k-1}+(-1)^{2k}a_{2k}\}\\&=\sum_{k=1}^{25}(-b_k+c_k)=\sum_{k=1}^{25}\{-(k-1)^2+k^2\}\\&=\sum_{k=1}^{25}(2k-1)=25^2=\mathbf{625}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より




$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

すなわち

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

したがって，O は $\triangle$ABC の垂心であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{O}\neq\mathrm{A}$$

以上のことから　　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$　$\cdots$①

また，P は $\triangle$OBC の外心であるから，P は線分 BC の垂直二等分線上にある．したがって　$\mathrm{MP}\perp\mathrm{BC}$　$\cdots$②

①，② から　　$\mathrm{MP}/\!/\mathrm{OA}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+t\vec{a}=\boldsymbol{t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)-\dfrac{1}{2}\vec{b}=\boldsymbol{t\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}}$

(3) N は外接円の弦 OB の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NP}}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}}=0$ より

$$\vec{b}\cdot\left(t\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=0 \quad \text{ゆえに} \quad t\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$ であるから　　$t=-\dfrac{1}{2}$

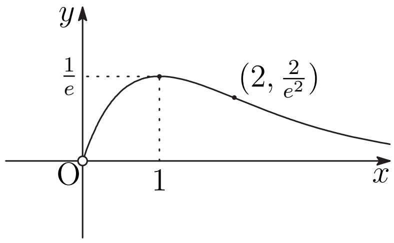
これを (2) の結果に代入すると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{NP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = xe^{-x}$ より　$f'(x) = (1-x)e^{-x}$,　$f''(x) = (x-2)e^{-x}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $(0)$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{2}{e^2}$ | ↘ |




また，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ より，グラフの概形は右上の図のようになる．

よって，極大値は　$f(1) = \boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) (1) のグラフから

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx = \int_0^t xe^{-x}\,dx$$
$$= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^t = \boldsymbol{1-(t+1)e^{-t}}$$

(3) (2) の結果から　$h(t) = g(t+1) - g(t)$

$g'(t) = f(t)$ に注意して，$h(t)$ を微分すると

$$h'(t) = g'(t+1) - g'(t) = f(t+1) - f(t)$$
$$= (t+1)e^{-t-1} - te^{-t} = e^{-t-1}\{(t+1) - et\}$$
$$= e^{-t-1}\{1-(e-1)t\}$$

$t > 0$ における $h(t)$ の増減表は次のようになる．

| $t$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e-1}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $h(t)$ | | ↗ | 極大 | ↘ |

よって，$h(t)$ が最大となる $t$ の値は　$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{e-1}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdots ①$ より

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad 2x - y = 2 \quad \cdots ②$$

よって ① をみたす点 $(x,\ y)$ は直線 ② 上に無数にある．

(2) $\begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より $\qquad \begin{pmatrix} 3a-k & 1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

原点以外の点 $(x,\ y)$ があるとき，行列 $\begin{pmatrix} 3a-k & 1 \\ 2 & 4-k \end{pmatrix}$ は，逆行列をもたないから

$$(3a-k)(4-k) - 1{\cdot}2 = 0$$

上式より，$k \neq 4$ であるから

$$3a - k = -\frac{2}{k-4} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{a = \frac{k^2 - 4k - 2}{3(k-4)}}$$

(3) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ であるから，与えられた等式から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{4} & -\sin\frac{n\pi}{4} \\ \sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって $\qquad x\cos\dfrac{n+1}{4}\pi - y\sin\dfrac{n+1}{4}\pi = 0$

よって $\qquad \begin{cases} \boldsymbol{x - y = 0} & \boldsymbol{(n \equiv 0 \pmod 4)} \\ \boldsymbol{y = 0} & \boldsymbol{(n \equiv 1 \pmod 4)} \\ \boldsymbol{x + y = 0} & \boldsymbol{(n \equiv 2 \pmod 4)} \\ \boldsymbol{x = 0} & \boldsymbol{(n \equiv 3 \pmod 4)} \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 楕円の方程式は $\dfrac{x^2}{(ra)^2}+\dfrac{y^2}{r^2}=1$

よって　$a>1$ のとき　$\boldsymbol{(\pm r\sqrt{a^2-1},\ 0)}$

$0<a<1$ のとき　$\boldsymbol{(0,\ \pm r\sqrt{1-a^2})}$

(2) $y=x^2-\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}x+\dfrac{2+\sin 2\theta}{\cos^2\theta}$ を変形すると

$$y=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\right)^2+\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta}=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta}\right)^2+2\tan\theta$$

頂点 $(x,\ y)$ は　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\theta},\ y=2\tan\theta$　ゆえに　$\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{x}{\sqrt{2}},\ \tan\theta=\dfrac{y}{2}$

これを $1+\tan^2\theta=\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1}$$

(3) $\theta$ だけ回転したときの $C$ の中心を Q としたとき　$\mathrm{Q}(3+3\theta,\ 3)$

また　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=3\begin{pmatrix}\cos(\pi-\theta)\\ \sin(\pi-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cos\theta\\ 3\sin\theta\end{pmatrix}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}3+3\theta\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\cos\theta\\ 3\sin\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3+3\theta-3\cos\theta}\\ \boldsymbol{3+3\sin\theta}\end{pmatrix}$$

$\boxed{8}$ (1) $k \leqq n-1$ のとき，

$P(X_n = k)$ は，$k$ 回目で初めて 2 枚とも表が出る確率であるから

$$P(X_n = k) = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$$

また，$P(X_n > 3)$ は，上式により

$$\begin{aligned} P(X_n > 3) &= 1 - P(X_n \leqq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{3} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^3}{1-\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{27}{64}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= 1 - P(X_n \leqq n-1) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}} = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) + nP(X_n = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

上式の $n$ を $n+1$ に置き換えると

$$E_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= \frac{n}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + (n+1)\left(\frac{3}{4}\right)^{n} - n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left\{\frac{n}{4} + \frac{3}{4}(n+1) - n\right\} = \boldsymbol{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 母平均 $\quad \overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot p = p$

母分散 $\quad \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X})^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1^2\cdot p - p^2 = p(1-p)$

したがって，標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の平均および分散は，それぞれ

$$\overline{X} = \boldsymbol{p}, \quad \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\boldsymbol{p(1-p)}}{\boldsymbol{n}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overline{X} = \frac{320}{400} = \frac{4}{5}, \quad \sigma^2 = \overline{X}(1-\overline{X}) = \frac{4}{5}\left(1-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

母比率 $p$ は，400 を十分大きい数とみなせるので，近似的に次の標準正規分布に従う.

$$N\left(\overline{X},\ \frac{\sigma^2}{400}\right) \quad \text{すなわち} \quad N\left(\frac{4}{5},\ \left(\frac{1}{50}\right)^2\right)$$

ゆえに，$Z = \dfrac{\overline{X} - \frac{4}{5}}{\frac{1}{50}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う.

$P(Z < -1.96) = 0.025$ から

$$P(|Z| \leqq 1.96) = 1 - 2\times 0.025 = 0.95$$

ゆえに $\quad P\left(\left|\overline{X} - \dfrac{4}{5}\right| \leqq 1.96 \times \dfrac{1}{50}\right) = 0.95$

したがって，信頼区間は

$$\left[\frac{4}{5} - 1.96\times\frac{1}{50},\ \frac{4}{5} + 1.96\times\frac{1}{50}\right]$$

ここで $\quad \dfrac{4}{5} - 1.96\times\dfrac{1}{50} = 0.7608, \quad \dfrac{4}{5} + 1.96\times\dfrac{1}{50} = 0.8392$

よって，求める信頼区間は $\quad [\mathbf{0.76},\ \mathbf{0.84}]$

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ (1) と同じ

$\boxed{\mathbf{11}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ (2) と同じ

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $\boxed{\mathbf{5}}$ (1) と同じ

(2) 求める面積を $S$ とすると

$$S = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \Big[ -(x+1)e^{-x} \Big]_0^1 = \boldsymbol{1 - \frac{2}{e}}$$