

平成 27 年度 鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部

平成 27 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は, [1], [2] 必答, [3] ~ [5] から 1 問選択, [6], [7] 必答. 数 I・II・III・A・B(120 分)
- 理 [生命化], 医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部は, [1], [2] 必答, [3] ~ [5] から 1 問選択. 数 I・II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は, [1], [8] 必答, [3] ~ [5] から 1 問選択, [9], [10] の 2 題から 1 問選択. 数 I・II・A・B または 数 I・III・A・B(90 分)

1 次の各問いに答えよ.

- (1) SATTUN という 6 文字を並べかえて得られる順列のうち, 最初が子音文字になるものの総数を求めよ.
- (2) 半径 r の円 O' が半径 $2r$ の円 O に点 P で内接し, さらに円 O' は円 O の弦 AB に点 Q で接している. 線分 PQ の延長が円 O と交わる点を M とする. $\angle PQB = 60^\circ$ のとき, 線分 QM の長さを求めよ.
- (3) 1 次不定方程式

$$37x + 32y = 1$$

の整数解を 1 組求めよ.

2 (1) 0 でない実数 a, b, c, d が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x) dx, \quad T = \int_0^2 g(x) dx$$

とおく. ただし, $m \geq 0, n \geq 0$ とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (a) S と T を m と n を用いて表せ.
- (b) $S \geq 0, T \geq 0$ のとき, $m + n$ が最大となるような m と n を求めよ.

3 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 0$, $a_{n+1} - a_n = \frac{n\{1 + (-1)^{n+1}\}}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定まるものとして、次の各問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 をそれぞれ求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$b_n = a_{2n-1}, \quad c_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、一般項 b_n, c_n を求めよ。

(3) $\sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n$ を求めよ。

4 平面上に三角形 ABC と点 O があり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \neq 0$$

を満たしていると仮定する。辺 BC の中点を M, 線分 OB の中点を N とし、三角形 OBC の外心を P とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $M \neq P$ のとき、線分 MP と線分 OA は平行であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{MP} = t\vec{a}$ とおいて、 \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{NP} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および実数 t を用いて表せ。

(3) \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{NP} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

5 整数 n ($n \geq 4$) に対し、2 枚のコインを同時に投げる試行を繰り返し、2 枚とも表が出るか、または n 回繰り返した時点で試行を終了するときの試行の回数を X_n とする。確率変数 X_n について、次の各問いに答えよ。

(1) $n - 1$ 以下の自然数 k に対して、確率 $P(X_n = k)$ を求めよ。また、確率 $P(X_n > 3)$ を求めよ。

(2) 確率 $P(X_n = n)$ を n を用いて表せ。

(3) X_n の平均を E_n とかくとき、 $E_{n+1} - E_n$ を求めよ。

6 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底であり、 $x > 0$ とする。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ、その概形を描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。
- (2) $t > 0$ とするとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積 $g(t)$ を求めよ。
- (3) $t > 0$ とするとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および二つの直線 $x = t$ と $x = t + 1$ で囲まれる部分の面積 $h(t)$ が最大となるような t の値を求めよ。

7 次の各問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) 方程式 $z^4 = -1$ を解け。
- (2) α を方程式 $z^4 = -1$ の解の一つとする。複素数平面に点 β があって $|z - \beta| = \sqrt{2}|z - \alpha|$ を満たす点 z 全体が原点を中心とする円 C を描くとき、複素数 β を α で表せ。
- (3) 点 z が (2) の円 C 上を動くとき、点 i と z を結ぶ線分の midpoint w はどのような図形を描くか。

8 0 でない実数 a, b, c, d が $3^a = 5^b = 7^c = 105^d$ を満たすとき、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

が成り立つことを示せ。

9 関数 $f(x) = -3mx + 2n$ と関数 $g(x) = 6x^2 - 2nx - m$ について

$$S = \int_0^2 f(x) dx, \quad T = \int_0^2 g(x) dx$$

とおく。ただし、 $m \geq 0, n \geq 0$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) S と T を m と n を用いて表せ。
- (2) $S \geq 0, T \geq 0$ のとき、 $m + n$ が最大となるような m と n を求めよ。

10 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底であり、 $x > 0$ とする。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。また、曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ、その概形を描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

正解

1 (1) 最初の文字がSまたはNのとき, ともに $\frac{5!}{2!}$ (通り)

最初の文字がTのとき $5!$ (通り)

よって, 求める総数は $\frac{5!}{2!} \times 2 + 5! = 240$ (通り)

(2) Qは弦ABと円O'の接点であるから

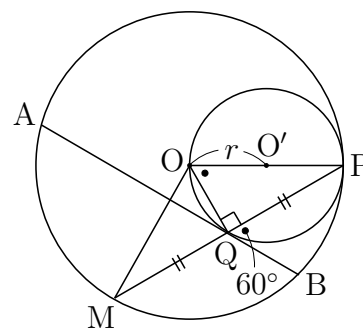
$$\angle POQ = \angle PQB = 60^\circ$$

弦OPは, 円O'の直径であるから

$$\angle OQP = 90^\circ$$

$\triangle OMQ \equiv \triangle OPQ$ であるから

$$QM = PQ = OP \sin 60^\circ = 2r \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r$$



(3) $37x + 32y = 1 \cdots (*)$ より, $37 \equiv 5, 32 \equiv 0 \pmod{32}$ であるから

$$5x \equiv 1 \pmod{32} \quad \text{ゆえに} \quad 13 \cdot 5x \equiv 13 \pmod{32}$$

すなわち $x \equiv 13 \pmod{32}$ これを満たす整数 x の1つは 13

(*) より, $5x + 32(x + y) = 1$ であるから

$$5 \times 13 + 32(13 + y) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 64 + 32(13 + y) = 0$$

これを解いて $y = -15$ よって $(x, y) = (13, -15)$

別解 (基本的な性質) 互いに素な整数 a, b に対して $ax + by = 1$ を満たす整数 x, y は存在する. $37x + 32y = 1$ より

$$5x + 32(x + y) = 1 \quad (37 = 32 + 5)$$

$$5\{x + 6(x + y)\} + 2(x + y) = 1 \quad (32 = 5 \cdot 6 + 2)$$

$$5(7x + 6y) + 2(x + y) = 1$$

$$7x + 6y + 2\{2(7x + 6y) + (x + y)\} = 1 \quad (5 = 2 \cdot 2 + 1)$$

$$7x + 6y + 2(15x + 13y) = 1$$

$15x + 13y = n \cdots \textcircled{1}$ とおくと (n は整数), $7x + 6y = 1 - 2n \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ より $x + y = 5n - 2 \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を解いて $(x, y) = (13 - 32n, -15 + 37n)$

2 (1) $3^a = 5^b = 7^c = 105^d = M$ とおく.

a, b, c は 0 でない実数であるから, M は 1 でない正数.

$$\text{したがって} \quad a = \log_3 M = \frac{1}{\log_M 3} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 3 = \frac{1}{a}$$

$$b = \log_5 M = \frac{1}{\log_M 5} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 5 = \frac{1}{b}$$

$$c = \log_7 M = \frac{1}{\log_M 7} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 7 = \frac{1}{c}$$

$$d = \log_{105} M = \frac{1}{\log_M 105} \quad \text{ゆえに} \quad \log_M 105 = \frac{1}{d}$$

$$\log_M 3 + \log_M 5 + \log_M 7 = \log_M 105 \quad \text{であるから} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$$

$$(2) \quad (a) \quad S = \int_0^2 (-3mx + 2n) dx = \left[-\frac{3}{2}mx^2 + 2nx \right]_0^2 = -6m + 4n$$

$$T = \int_0^2 (6x^2 - 2nx - m) dx = \left[2x^3 - nx^2 - mx \right]_0^2 = -2m - 4n + 16$$

(b) (a) の結果から

$$m = 2 - \frac{1}{8}S - \frac{1}{8}T, \quad n = 3 + \frac{1}{16}S - \frac{3}{16}T$$

$$\text{したがって} \quad m + n = 5 - \frac{1}{16}S - \frac{5}{16}T$$

$S \geq 0, T \geq 0$ のとき, $m + n$ が最大となるのは, 上の諸式より

$$S = T = 0 \quad \text{すなわち} \quad m = 2, n = 3$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad a_1 = 0, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{n\{1 + (-1)^{n+1}\}}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots (*)$$

(*) に $n = 1, 2, 3, 4$ を代入すると

$$a_2 - a_1 = 1, \quad a_3 - a_2 = 0, \quad a_4 - a_3 = 3, \quad a_5 - a_4 = 0$$

$$a_1 = 0 \text{ であるから} \quad \mathbf{a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 4}$$

(2) (*) の n をそれぞれ, $2n, 2n + 1$ に置き換えると

$$\begin{aligned} a_{2n+1} - a_{2n} &= \frac{2n\{1 + (-1)^{2n+1}\}}{2} = 0 \\ a_{2n+2} - a_{2n+1} &= \frac{(2n+1)\{1 + (-1)^{2n+2}\}}{2} = 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} b_{n+1} - c_n = 0 & \dots \textcircled{1} \\ c_{n+1} - b_{n+1} = 2n + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

上の2式から b_{n+1} を消去すると $c_{n+1} - c_n = 2n + 1$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1)$$

$$\text{したがって} \quad c_n - c_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + n - 1 = n^2 - 1$$

$$c_1 = a_2 = 1 \text{ であるから} \quad c_n = n^2$$

上式は, $n = 1$ のときも成り立つ.

$$\textcircled{1} \text{ から, } n \geq 2 \text{ のとき} \quad b_n = c_{n-1} = (n-1)^2$$

$b_1 = a_1 = 0$ であるから, 上式は, $n = 1$ のときも成り立つ.

$$\text{よって, 求める一般項は} \quad \mathbf{b_n = (n-1)^2, c_n = n^2}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} (-1)^n a_n &= \sum_{k=1}^{25} \{(-1)^{2k-1} a_{2k-1} + (-1)^{2k} a_{2k}\} \\ &= \sum_{k=1}^{25} (-b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{25} \{-(k-1)^2 + k^2\} \\ &= \sum_{k=1}^{25} (2k-1) = 25^2 = \mathbf{625} \end{aligned}$$

4 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ より

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

すなわち

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = \vec{OB} \cdot \vec{CA} = \vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$$

したがって、Oは $\triangle ABC$ の垂心であり、

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad O \neq A$$

以上のことから $OA \perp BC \quad \dots \textcircled{1}$

また、Pは $\triangle OBC$ の外心であるから、Pは線分BCの垂直二等分線上にある。したがって $MP \perp BC \quad \dots \textcircled{2}$

①, ②から $MP \parallel OA$

$$(2) \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + t\vec{a} = t\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{NP} = \vec{OP} - \vec{ON} = \left(t\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) - \frac{1}{2}\vec{b} = t\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

(3) Nは外接円の弦OBの中点であるから $\vec{OB} \perp \vec{NP}$

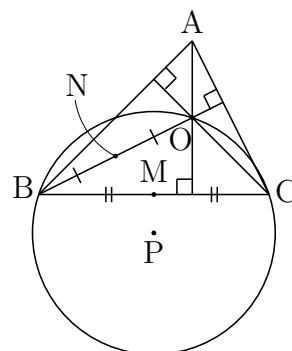
したがって、 $\vec{OB} \cdot \vec{NP} = 0$ より

$$\vec{b} \cdot \left(t\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$ であるから $t = -\frac{1}{2}$

これを(2)の結果に代入すると

$$\vec{OP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{NP} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



5 (1) $k \leq n-1$ のとき,

$P(X_n = k)$ は, k 回目で初めて 2 枚とも表が出る確率であるから

$$P(X_n = k) = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

また, $P(X_n > 3)$ は, 上式により

$$\begin{aligned} P(X_n > 3) &= 1 - P(X_n \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^3 P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= 1 - P(X_n \leq n-1) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

(3) (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) + nP(X_n = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

上式の n を $n+1$ に置き換えると

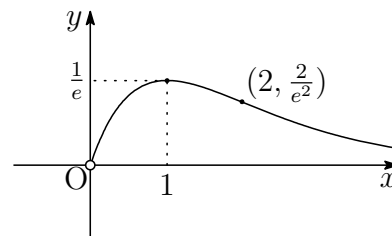
$$E_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + (n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= \frac{n}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + (n+1) \left(\frac{3}{4}\right)^n - n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \left\{ \frac{n}{4} + \frac{3}{4}(n+1) - n \right\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{aligned}$$

- 6 (1) $f(x) = xe^{-x}$ より $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$
したがって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	(0)	...	1	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$	(0)	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘



また, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ より, グラフの概形は右上の図のようになる.

よって, 極大値は $f(1) = \frac{1}{e}$

- (2) (1) のグラフから

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t f(x) dx = \int_0^t xe^{-x} dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^t = 1 - (t+1)e^{-t} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $h(t) = g(t+1) - g(t)$

$g'(t) = f(t)$ に注意して, $h(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} h'(t) &= g'(t+1) - g'(t) = f(t+1) - f(t) \\ &= (t+1)e^{-t-1} - te^{-t} = e^{-t-1}\{(t+1) - et\} \\ &= e^{-t-1}\{1 - (e-1)t\} \end{aligned}$$

$t > 0$ における $h(t)$ の増減表は次のようになる.

t	(0)	...	$\frac{1}{e-1}$...
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$		↗	極大	↘

よって, $h(t)$ が最大となる t の値は $t = \frac{1}{e-1}$

7 (1) 方程式の解 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \dots \textcircled{1}$

とすると
$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

-1 を極形式で表すと $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$

よって
$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \cos \pi + i \sin \pi$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 1, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから $r = 1 \dots \textcircled{2}$

また
$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると, $k = 0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \dots \textcircled{3}$$

②, ③ を ① に代入すると, 求める解は

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

(2) $|z - \beta| = \sqrt{2}|z - \alpha|$ の両辺を 2 乗することにより

$$\begin{aligned} |z - \beta|^2 &= 2|z - \alpha|^2 \\ (z - \beta)(\bar{z} - \bar{\beta}) &= 2(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

両辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned} z\bar{z} - (2\bar{\alpha} - \bar{\beta})z - (2\alpha - \beta)\bar{z} &= -2\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} \\ \{z - (2\alpha - \beta)\}\{\bar{z} - (2\bar{\alpha} - \bar{\beta})\} &= 2(\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ |z - (2\alpha - \beta)|^2 &= 2|\alpha - \beta|^2 \end{aligned}$$

したがって $|z - (2\alpha - \beta)| = \sqrt{2}|\alpha - \beta| \dots (*)$

このとき, 点 z 全体が原点を中心とする円であるから

$$2\alpha - \beta = 0 \quad \text{よって} \quad \beta = 2\alpha$$

(3) $\beta = 2\alpha$ を (*) に代入すると $|z| = \sqrt{2}|\alpha| \cdots \textcircled{4}$

また, α は $z^4 = -1$ の解であるから

$$\alpha^4 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha^4| = |-1|$$

したがって $|\alpha|^4 = 1$ すなわち $|\alpha| = 1$

これを $\textcircled{4}$ に代入すると $|z| = \sqrt{2} \cdots \textcircled{5}$

w は i と z の中点であるから

$$w = \frac{i+z}{2} \quad \text{ゆえに} \quad z = 2w - i$$

これを $\textcircled{5}$ に代入すると

$$|2w - i| = \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \left| w - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって, 点 w は, 点 $\frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円を描く.

8 **2** (1) と同じ

9 **2** (2) と同じ

10 (1) **6** (1) と同じ

(2) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$$