平成 26 年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成 26 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ 数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{9}$ の 2 題から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABC において辺 AB 上に点 D を，辺 AC 上に点 E をとり，線分 BE と線分 CD の交点を F とする．点 A，D，E，F が同一円周上にあり，さらに角のあいだに

$$\angle \mathrm{AEB} = 2\angle \mathrm{ABE} = 4\angle \mathrm{ACD}$$

という関係が成り立つとき，$\angle$BAC の値を求めよ．

(2) 4 個のさいころを同時に投げるとき，3 の倍数の目のみが出る確率を求めよ．

(3) 正の実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(a) x が無理数かつ y が有理数ならば，その和 $x + y$ は無理数である．

(b) x が無理数かつ y が無理数ならば，その和 $x + y$ は無理数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) a，b，c は互いに異なる実数で，$a>1$，$b>1$，$c>1$ とする．次の等式が成り立つとき，比 $\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c$ を求めよ．

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

(2) 次の (a)，(b)，(c) に答えよ．

(a) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおく．このとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ と $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ をそれぞれ t についての多項式で表せ．

(b) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2}$ を t についての多項式で表せ．

(c) 4 次方程式 $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$ の解を全て求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ r を実数とする．$\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = ra_{n+1} - 4a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列とする．次の各問いに答えよ．

(1) $r = 0$ の場合に，以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ．

(i) n が奇数のとき．

(ii) n が偶数のとき．

(2) $r = 5$ の場合に，次の (a)，(b) に答えよ．

(a) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ c_n &= a_{n+1} - 4a_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ．

(b) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $r = 4$ の場合に，次の (c)，(d) に答えよ．

(c) 数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項 d_n を求めよ．

(d) 一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の各問に答えよ．

(1) θ を媒介変数として，

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

で表される曲線の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y = e^{-x} + 1$，$y = 3(e^{-x} - 1)$ の交点の座標を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(3) (2) の曲線と y 軸で囲まれた図形を D とする．D の面積を求めよ．

(4) (3) で与えられた D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 座標平面上での原点を中心とする 150° の回転移動を表す行列を P とする．点 $(x,\ y)$ が P の表す移動によって，点 $(2,\ 4)$ に移ったとする．このとき，点 $(x,\ y)$ を求めよ．

(2) (1) で与えられた行列を P を考える．$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．

(3) 以下の各命題の反例をあげよ．また，反例になっていることを示せ．ただし，X，Y は 2 次の正方行列をとする．

(a) $XY = YX$ が成立する．

(b) $XY = 0$ ならば，$X = O$ または $Y = O$ である．ただし，O は 2 次の零行列を表す．

(c) A を逆行列 A^{-1} をもつ 2 次の正方行列とする．このとき，$AX = Y$ ならば，$X = YA^{-1}$ である．

6 c と d を 0 でない実数とする．C と D をそれぞれ s と t を媒介変数として

$$C : \begin{cases} x = \dfrac{c}{s^2 + c^2} \\ y = \dfrac{s}{s^2 + c^2} \end{cases} \qquad D : \begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 + d^2} \\ y = \dfrac{d}{t^2 + d^2} \end{cases}$$

で与えられる曲線とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) C と D は円から 1 点を除いた曲線になっている．それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求めよ．

(2) C と D の交点の座標を求めよ．

(3) C と D の交点における C の接線の方程式を求めよ．

7 2 つの確率変数 X，Y の確率分布を同時に考えた表 (同時確率分布表) が以下のように与えられている．ただし，X，Y は互いに独立であり，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

X \ Y	2	4	計
1			a
2			
計	b		1

(1) 表を完成せよ．

(2) 確率変数 $W = X - Y$ の平均 $E(W)$ を求めよ．

(3) 確率変数 $Z = \dfrac{Y}{X}$ の確率分布表を作成し，Z の平均 $E(Z)$ を求めよ．

(4) $E(Z) = \dfrac{9}{4}$，$E(W) = -\dfrac{3}{2}$ となる場合に，Z の分散 $V(Z)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 ($a \geqq 1$) と，数字 2 が書かれた玉 1 個がある．これら $a+1$ 個の玉を母集団として，玉に書かれている数字を変量とする．このとき，この母集団から復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し，その玉の数字を取り出した順に X_1，X_2，X_3 とする．標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ の平均 $E(\overline{X})$ が $\dfrac{3}{2}$ であるとき，$\overline{X}$ の確率分布とその分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．ただし，復元抽出とは，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを 1 個取り出す抽出法である．

(2) ある企業の入社試験は採用枠 300 名のところ 500 名の応募があった．試験の結果は 500 点満点の試験に対し，平均点 245 点，標準偏差 50 点であった．得点の分布が正規分布であるとみなせるとき，合格最低点はおよそ何点であるか．小数点以下を切り上げて答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，$P(Z > 0.25) = 0.4$，$P(Z > 0.5) = 0.3$，$P(Z > 0.54) = 0.2$ とする．

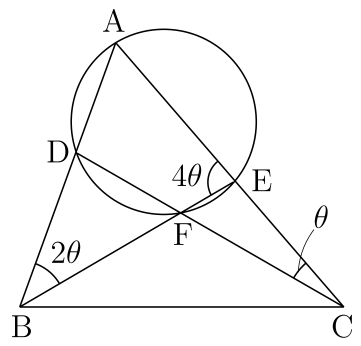
$\boxed{\mathbf{9}}$ $0 < a < \dfrac{\pi}{4}$ とする．曲線 $y = \sin 2x$ 上の点 $(a,\ \sin 2a)$ における接線 l_1 と点 $\left(\dfrac{\pi}{2} - a,\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\right)$ における接線 l_2 が直交しているとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) l_1 と l_2 および曲線 $y = \sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とで囲まれた図形の面積を求めよ．

正解

1 (1) $\theta = \angle\mathrm{ACD}$ とおくと



$$\angle\mathrm{AEB} = 4\theta,\quad \angle\mathrm{ABE} = 2\theta$$

点 A，D，E，F が同一円周上にあるので

$$\angle\mathrm{ADF} = 180^\circ - 4\theta$$

$\triangle\mathrm{ABE}$ および $\triangle\mathrm{ACD}$ の内角の和について

$$A + 2\theta + 4\theta = 180^\circ,\qquad A + \theta + (180^\circ - 4\theta) = 180^\circ$$

これを解いて　$\theta = 20^\circ$，$\boldsymbol{A = 60^\circ}$

(2) 目の出方の総数は　6^4 (通り)

3 の倍数の目，すなわち 3 または 6 の目が出る場合の総数は　2^4 (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{2^4}{6^4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{81}}$

(3) (a) 真である．

(背理法で証明する)

x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ が有理数であると仮定すると

$$x = (x+y) - y$$

において，左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾を生じる．

よって，x が無理数かつ y が有理数ならば，$x+y$ は無理数である．

(b) 偽である．

(反例) $x = 1 + \sqrt{2}$，$y = 1 - \sqrt{2}$ とおくと，

(a) の結論から x，y は無理数である．

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

よって，x，y は無理数であるが，$x+y$ は有理数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\log_8 b = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 b$，$\log_8 c = \dfrac{\log_2 c}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}\log_2 c$ を

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

に代入して整理すると

$$3\log_2 a - 4\log_2 b + \log_2 c = 0, \qquad \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c}$$

$k = \dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 c}$ とおくと，$\dfrac{\log_2 a}{\log_2 c} = k^2$ であるから，上の第 1 式から

$$3\cdot\frac{\log_2 a}{\log_2 c} - 4\cdot\frac{\log_2 b}{\log_2 c} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3k^2 - 4k + 1 = 0$$

a，b，c は互いに異なる実数であるから，$k \neq 1$ に注意して　$k = \dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b} = \dfrac{\log_2 b}{\log_2 c} = \dfrac{1}{3}$　よって　$\boldsymbol{\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c = 1 : 3 : 9}$

(2) (a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = \boldsymbol{t^2 - 2}$，

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \boldsymbol{t^3 - 3t}$$

(b) (a) の最初の結果を用いると

$$\begin{aligned}\frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2} &= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 \\ &= 2(t^2 - 2) - 3t - 5 \\ &= \boldsymbol{2t^2 - 3t - 9}\end{aligned}$$

(c) $x = 0$ は $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$ の解ではないので，この両辺を x^2 で割ると

$$\frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0$$

(b) の結果により　$2t^2 - 3t - 9 = 0$　ゆえに　$t = 3,\ -\dfrac{3}{2}$

$t = 3$ のとき　$x + \dfrac{1}{x} = 3$ より　$x^2 - 3x + 1 = 0$　$\cdots$①

$t = -\dfrac{3}{2}$ のとき　$x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{3}{2}$ より　$2x^2 + 3x + 2 = 0$　$\cdots$②

①，② を解いて　$x = \boldsymbol{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $r=0$ のとき　$a_{n+2}=-4a_n$ より

(i) n が奇数のとき，$n=2m-1$ とおくと　$a_{2m+1}=-4a_{2m-1}$

数列 $\{a_{2m+1}\}$ は，初項 $a_1=1$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m-1}=(-4)^{m-1}$$

$m=\dfrac{n+1}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n=(-4)^{\frac{n-1}{2}}}$

(ii) n が偶数のとき，$n=2m$ とおくと　$a_{2m+2}=-4a_{2m}$

数列 $\{a_{2m}\}$ は，初項 $a_2=3$，公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m}=3\cdot(-4)^{m-1}$$

$m=\dfrac{n}{2}$ であるから　　$\boldsymbol{a_n=3\cdot(-4)^{\frac{n-2}{2}}}$

(2) (a) $r=5$ のとき，$a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$ より

$$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}-4a_{n+2}=a_{n+1}-4a_n$$

ゆえに　　$b_{n+1}=4b_n$，$c_{n+1}=c_n$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2-a_1=3-1=2$，公比 4 の等比数列であるから

$$b_n=2\cdot4^{n-1}=\mathbf{2^{2n-1}}$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2-4a_1=3-4\cdot1=-1$ および漸化式から

$$c_n=\mathbf{-1}$$

(b) (a) の結果から　$a_{n+1}-a_n=2^{2n-1}$，　$a_{n+1}-4a_n=-1$

上の 2 式から，a_{n+1} を消去すると　$a_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(2^{2n-1}+1)}$

(3) (c) $r=4$ のとき，$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ より

$$\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}}-\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}\quad ゆえに\quad d_{n+1}=d_n$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $\dfrac{a_2}{2^2}-\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{4}$ および漸化式から　$d_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(d) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(n-1)\quad よって\quad \boldsymbol{a_n=(n+1)\cdot2^{n-2}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$ より $\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = \sin\theta$

したがって，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ において

$$x = \frac{\pi}{2} - 1,\quad y = 1,\quad \frac{dx}{d\theta} = 1,\quad \frac{dy}{d\theta} = 1,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = 1$$

よって，求める接線の方程式は

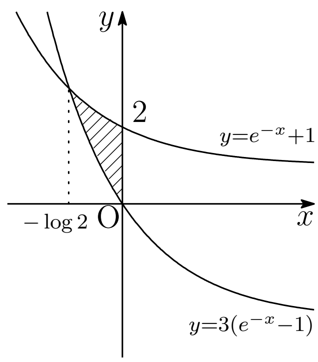
$$y - 1 = 1\left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right\} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x - \frac{\pi}{2} + 2}$$

(2) $y = e^{-x} + 1$，$y = 3(e^{-x} - 1)$ から y を消去すると

$$e^{-x} + 1 = 3(e^{-x} - 1) \quad \text{ゆえに} \quad e^{-x} = 2 \quad \text{したがって} \quad x = -\log 2$$

よって，求める交点の座標は $\mathbf{(-\log 2,\ 3)}$

(3) 右の図から求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{-\log 2}^{0} \{(e^{-x} + 1) - 3(e^{-x} - 1)\}dx \\ &= \int_{-\log 2}^{0} (-2e^{-x} + 4)\,dx \\ &= \Big[\ 2e^{-x} + 4x\ \Big]_{-\log 2}^{0} \\ &= \mathbf{4\log 2 - 2} \end{aligned}$$

(4) 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-\log 2}^{0} \{(e^{-x} + 1)^2 - 3^2(e^{-x} - 1)^2\}\,dx \\ &= \int_{-\log 2}^{0} (-8e^{-2x} + 20e^{-x} - 8)\,dx \\ &= \Big[\ 4e^{-2x} - 20e^{-x} - 8x\ \Big]_{-\log 2}^{0} \\ &= 8 - 8\log 2 \end{aligned}$$

よって $\quad V = \boldsymbol{8\pi(1 - \log 2)}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 点 $(x,\ y)$ は，点 $(2,\ 4)$ を原点を中心に -150° 回転させた点であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-150^\circ) & -\sin(-150^\circ) \\ \sin(-150^\circ) & \cos(-150^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ -1-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (2-\sqrt{3}, -1-2\sqrt{3})}$

(2) $P^n = \begin{pmatrix} \cos(150^\circ \times n) & -\sin(150^\circ \times n) \\ \sin(150^\circ \times n) & \cos(150^\circ \times n) \end{pmatrix}$ であるから

$$\cos(150^\circ \times n) = 1, \quad \sin(150^\circ \times n) = 0$$

したがって，整数 k を用いて　$150^\circ \times n = 360^\circ \times k$　ゆえに　$k = \dfrac{5}{12}n$

k は整数なので，上式をみたす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 12}$

(3) (a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad XY \neq YX$$

(b) (a) の X，Y について，$XY = O$ であるが，$X \neq O$，$Y \neq O$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$AX = Y$ であるが，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により

$$YA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad X \neq YA^{-1}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) C において，$s = c\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{c}{(c\tan\theta)^2 + c^2} = \frac{1}{c(\tan^2\theta + 1)} = \frac{1}{c}\cos^2\theta = \frac{1}{2c}(1 + \cos 2\theta)$$
$$y = \frac{c\tan\theta}{(c\tan\theta)^2 + c^2} = \frac{\tan\theta}{c(\tan^2\theta + 1)} = \frac{1}{c}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2c}\sin 2\theta$$

上の 2 式から．C の表す円の方程式は，θ の範囲に注意して

$$\boldsymbol{\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2} \quad \cdots ① \quad \textbf{ただし} \quad \boldsymbol{(x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

C の x，y，s，c をそれぞれ y，x，t，d に置き換えたものが D であるから，D の表す円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + \left(y - \frac{1}{2d}\right)^2 = \left(\frac{1}{2d}\right)^2} \quad \cdots ② \quad \textbf{ただし} \quad \boldsymbol{(x,\ y) \neq (0,\ 0)}$$

(2) ①，② の辺々を引いて整理すると　$y = \dfrac{d}{c}x$　$\cdots ③$

③ を ① に代入して整理すると　$(c^2 + d^2)x^2 = cx$

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ であるから，上式および ③ から，交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{c}{c^2 + d^2},\ \frac{d}{c^2 + d^2}\right)}$$

(3) (2) で求めた交点における C の接線の方程式は

$$\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{1}{2c}\right)\left(x - \frac{1}{2c}\right) + \frac{d}{c^2 + d^2}y = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

これを整理すると　$\boldsymbol{(c^2 - d^2)x + 2cdy - c = 0}$

円上の点における接線の方程式

円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) X，Y は，互いに独立であるから

$X \backslash Y$	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

(2) $W = X - Y$ より

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - E(Y) \\ &= \{1\cdot a + 2(1-a)\} - \{2\cdot b + 4(1-b)\} \\ &= \boldsymbol{-a + 2b - 2} \end{aligned}$$

(3) $Z = \dfrac{2}{2} = 1$，$Z = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = 2$，$Z = \dfrac{4}{1} = 4$ より

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)+ab$	$a(1-b)$	1

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1\cdot(1-a)b + 2\{(1-a)(1-b)+ab\} + 4\cdot a(1-b) \\ &= \boldsymbol{2 + 2a - b - ab} \end{aligned}$$

(4) $E(Z) = \dfrac{9}{4}$，$E(W) = -\dfrac{3}{2}$ を (2)，(3) の結果に代入すると

$$2 + 2a - b - ab = \frac{9}{4}, \quad -a + 2b - 2 = -\frac{3}{2}$$

ゆえに　$a(2-b) - b = \dfrac{1}{4}$，$a = 2b - \dfrac{1}{2}$

$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ に注意してこれを解くと　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = \dfrac{1}{2}$

このとき，(3) の表は

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

よって　$V(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2$

$$= 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{2} + 4^2\cdot\frac{1}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{19}{16}}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 ($a \geqq 1$) と数字 2 が書かれた玉 1 個の計 $a+1$ 個の玉から 1 個取り出した玉の数字を X とすると

X	1	2	計
$P(X)$	$\frac{a}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{a}{a+1} + 2 \times \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{a+1} \\ V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 1^2 \times \frac{a}{a+1} + 2^2 \times \frac{1}{a+1} - \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^2 = \frac{a}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

$E(\overline{X}) = E(X)$ であるから

$$\frac{a+2}{a+1} = \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad a = 1 \quad \text{ゆえに} \quad V(X) = \frac{1}{4}$$

$V(\overline{X}) = \dfrac{1}{3}V(X)$ であるから　　$V(\overline{X}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

復元抽出による大きさ 3 の無作為標本のうち，数字 2 が書かれた玉が出た回数を k とすると ($0 \leqq k \leqq 3$)

$$\overline{X} = \frac{1\cdot(3-k) + 2\cdot k}{3} = \frac{3+k}{3}, \quad P(\overline{X}) = {}_3\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{{}_3\mathrm{C}_k}{8}$$

したがって，$\overline{X}$ の確率分布表は，次のようになる．

$\overline{X}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	計
$P(\overline{X})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

補足 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ のとき，$V(\overline{X}) = \dfrac{1}{n}V(X)$

(2) $\dfrac{300}{500} = 0.6$，$P(Z > 0.25) = 0.4$ より

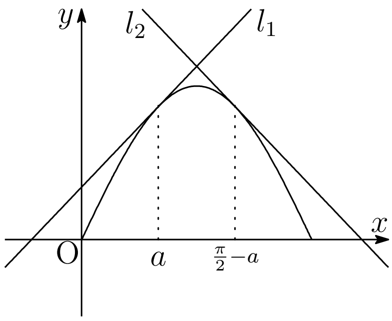
$$P(Z < -0.25) = 0.4 \quad \text{ゆえに} \quad P(Z \geqq -0.25) = 0.6$$

得点を X，$Z = \dfrac{X-245}{50}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従うので，合格最低点を x とすると

$$\frac{x-245}{50} = -0.25 \quad \text{ゆえに} \quad x = 245 + (-0.25) \times 50 = 232.5$$

ここでは，小数点以下は切り上げるので　**233** (点)

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x)=\sin 2x$ とおくと　$f'(x)=2\cos 2x$



$$f'(a)=2\cos 2a$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$
$$=-2\cos 2a$$

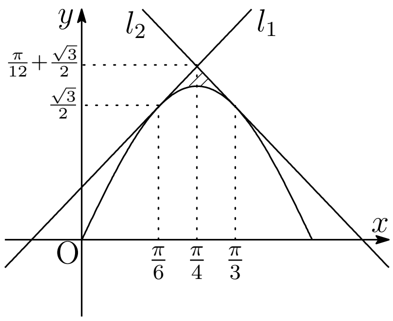
$l_1 \perp l_2$ より $f'(a)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=-1$ であるから

$$2\cos 2a(-2\cos 2a)=-1 \quad ゆえに \quad \cos^2 2a=\frac{1}{4}$$

$0<a<\frac{\pi}{4}$ より，$\cos 2a>0$ であるから

$$\cos 2a=\frac{1}{2} \quad すなわち \quad \boldsymbol{a=\frac{\pi}{6}}$$

(2) 曲線 $y=\sin 2x$ は直線 $x=\frac{\pi}{4}$ に関して対称であるから，l_1，l_2 の曲線との接点の座標が，それぞれ $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$ であるから．l_1 と l_2 も直線 $x=\frac{\pi}{4}$ に関して対称である．



(1) の結果から l_1 は点 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り，傾き 1 の直線であるから

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6} \quad すなわち \quad y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{24}\left(\frac{\pi}{12}+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{S=\frac{\pi^2}{144}+\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{2}}$