

平成 26 年度 鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成 26 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部 [1] [2] [3] [4] 必答,
[5] [6] [7] [8] から 1 問選択. 数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化], 医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部 [1] [2] [3]
数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・
健康教育] 学部 [1] [3] 必答, [2] [9] から 1 問選択.
数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

[1] 次の各問いに答えよ.

- (1) 三角形 ABC において辺 AB 上に点 D を, 辺 AC 上に点 E をとり, 線分 BE と線分 CD の交点を F とする. 点 A, D, E, F が同一円周上にあり, さらに角のあいだに

$$\angle AEB = 2\angle ABE = 4\angle ACD$$

という関係が成り立つとき, $\angle BAC$ の値を求めよ.

- (2) 4 個のさいころを同時に投げるとき, 3 の倍数の目のみが出る確率を求めよ.
- (3) 正の実数 x, y に関する次の各命題の真偽を述べよ. また, 真ならば証明し, 偽ならば反例をあげよ.
- (a) x が無理数かつ y が有理数ならば, その和 $x + y$ は無理数である.
- (b) x が無理数かつ y が無理数ならば, その和 $x + y$ は無理数である.

2 次の各問いに答えよ.

- (1) a, b, c は互いに異なる実数で, $a > 1, b > 1, c > 1$ とする. 次の等式が成り立つとき, 比 $\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c$ を求めよ.

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

- (2) 次の (a), (b), (c) に答えよ.

- (a) $t = x + \frac{1}{x}$ とおく. このとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ と $x^3 + \frac{1}{x^3}$ をそれぞれ t についての多項式で表せ.
- (b) $\frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2}$ を t についての多項式で表せ.
- (c) 4次方程式 $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$ の解を全て求めよ.

3 r を実数とする. $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = ra_{n+1} - 4a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列とする. 次の各問いに答えよ.

- (1) $r = 0$ の場合に, 以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ.

- (i) n が奇数のとき.
- (ii) n が偶数のとき.

- (2) $r = 5$ の場合に, 次の (a), (b) に答えよ.

- (a) 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_n = a_{n+1} - 4a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき, 一般項 b_n, c_n を求めよ.

- (b) 一般項 a_n を求めよ.

- (3) $r = 4$ の場合に, 次の (c), (d) に答えよ.

- (c) 数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき, 一般項 d_n を求めよ.

- (d) 一般項 a_n を求めよ.

4 次の各問いに答えよ.

(1) θ を媒介変数として,

$$\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

で表される曲線の $\theta = \frac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ.

- (2) 2つの曲線 $y = e^{-x} + 1$, $y = 3(e^{-x} - 1)$ の交点の座標を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.
- (3) (2) の曲線と y 軸で囲まれた図形を D とする. D の面積を求めよ.
- (4) (3) で与えられた D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

5 次の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上での原点を中心とする 150° の回転移動を表す行列を P とする. 点 (x, y) が P の表す移動によって, 点 $(2, 4)$ に移ったとする. このとき, 点 (x, y) を求めよ.
- (2) (1) で与えられた行列を P を考える. $P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.
- (3) 以下の各命題の反例をあげよ. また, 反例になっていることを示せ. ただし, X, Y は 2 次の正方行列をとする.
- (a) $XY = YX$ が成立する.
- (b) $XY = 0$ ならば, $X = O$ または $Y = O$ である. ただし, O は 2 次の零行列を表す.
- (c) A を逆行列 A^{-1} をもつ 2 次の正方行列とする. このとき, $AX = Y$ ならば, $X = YA^{-1}$ である.

6 c と d を 0 でない実数とする. C と D をそれぞれ s と t を媒介変数として

$$C: \begin{cases} x = \frac{c}{s^2 + c^2} \\ y = \frac{s}{s^2 + c^2} \end{cases} \quad D: \begin{cases} x = \frac{t}{t^2 + d^2} \\ y = \frac{d}{t^2 + d^2} \end{cases}$$

で与えられる曲線とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) C と D は円から 1 点を除いた曲線になっている. それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求めよ.
- (2) C と D の交点の座標を求めよ.
- (3) C と D の交点における C の接線の方程式を求めよ.

7 2 つの確率変数 X, Y の確率分布を同時に考えた表 (同時確率分布表) が以下のように与えられている. ただし, X, Y は互いに独立であり, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

$X \backslash Y$	2	4	計
1			a
2			
計	b		1

- (1) 表を完成せよ.
- (2) 確率変数 $W = X - Y$ の平均 $E(W)$ を求めよ.
- (3) 確率変数 $Z = \frac{Y}{X}$ の確率分布表を作成し, Z の平均 $E(Z)$ を求めよ.
- (4) $E(Z) = \frac{9}{4}$, $E(W) = -\frac{3}{2}$ となる場合に, Z の分散 $V(Z)$ を求めよ.

8 次の各問いに答えよ.

- (1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 ($a \geq 1$) と, 数字 2 が書かれた玉 1 個がある. これら $a + 1$ 個の玉を母集団として, 玉に書かれている数字を変数とする. このとき, この母集団から復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し, その玉の数字を取り出した順に X_1, X_2, X_3 とする. 標本平均 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ の平均 $E(\bar{X})$ が $\frac{3}{2}$ であるとき, \bar{X} の確率分布とその分散 $V(\bar{X})$ を求めよ. ただし, 復元抽出とは, 母集団の中から標本を抽出するのに, 毎回もとに戻してから次のものを 1 個取り出す抽出法である.
- (2) ある企業の入社試験は採用枠 300 名のところ 500 名の応募があった. 試験の結果は 500 点満点の試験に対し, 平均点 245 点, 標準偏差 50 点であった. 得点の分布が正規分布であるとみなせるとき, 合格最低点はおよそ何点であるか. 小数点以下を切り上げて答えよ. ただし, 確率変数 Z が標準正規分布に従うとき, $P(Z > 0.25) = 0.4$, $P(Z > 0.5) = 0.3$, $P(Z > 0.54) = 0.2$ とする.

9 $0 < a < \frac{\pi}{4}$ とする. 曲線 $y = \sin 2x$ 上の点 $(a, \sin 2a)$ における接線 l_1 と点 $(\frac{\pi}{2} - a, \sin(\frac{\pi}{2} - a))$ における接線 l_2 が直交しているとする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) l_1 と l_2 および曲線 $y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) とで囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

- 1 (1) $\theta = \angle ACD$ とおくと

$$\angle AEB = 4\theta, \quad \angle ABE = 2\theta$$

点 A, D, E, F が同一円周上にあるので

$$\angle ADF = 180^\circ - 4\theta$$

$\triangle ABE$ および $\triangle ACD$ の内角の和について

$$A + 2\theta + 4\theta = 180^\circ, \quad A + \theta + (180^\circ - 4\theta) = 180^\circ$$

これを解いて $\theta = 20^\circ, \quad A = 60^\circ$

- (2) 目の出方の総数は 6^4 (通り)
 3の倍数の目, すなわち 3 または 6 の目が出る場合の総数は 2^4 (通り)
 よって, 求める確率は $\frac{2^4}{6^4} = \frac{1}{81}$

- (3) (a) 真である.
 (背理法で証明する)
 x が無理数かつ y が有理数ならば, $x + y$ が有理数であると仮定すると

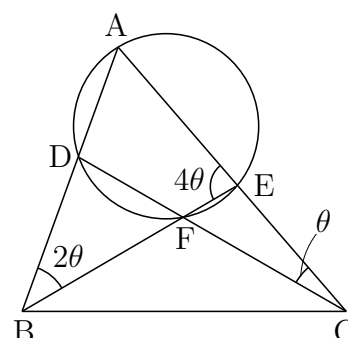
$$x = (x + y) - y$$

において, 左辺は無理数, 右辺は有理数となり, 矛盾を生じる.
 よって, x が無理数かつ y が有理数ならば, $x + y$ は無理数である.

- (b) 偽である.
 (反例) $x = 1 + \sqrt{2}, \quad y = 1 - \sqrt{2}$ とおくと,
 (a) の結論から x, y は無理数である.

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

よって, x, y は無理数であるが, $x + y$ は有理数である. ■



$$\boxed{2} \quad (1) \log_8 b = \frac{\log_2 b}{\log_2 8} = \frac{1}{3} \log_2 b, \quad \log_8 c = \frac{\log_2 c}{\log_2 8} = \frac{1}{3} \log_2 c \text{ を}$$

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \quad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

に代入して整理すると

$$3 \log_2 a - 4 \log_2 b + \log_2 c = 0, \quad \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c}$$

$$k = \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c} \text{ とおくと, } \frac{\log_2 a}{\log_2 c} = k^2 \text{ であるから, 上の第 1 式から}$$

$$3 \cdot \frac{\log_2 a}{\log_2 c} - 4 \cdot \frac{\log_2 b}{\log_2 c} + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3k^2 - 4k + 1 = 0$$

a, b, c は互いに異なる実数であるから, $k \neq 1$ に注意して $k = \frac{1}{3}$

$$\text{ゆえに } \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c} = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad \log_2 a : \log_2 b : \log_2 c = 1 : 3 : 9$$

$$(2) \quad (a) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$$

(b) (a) の最初の結果を用いると

$$\begin{aligned} \frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2} &= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 \\ &= 2(t^2 - 2) - 3t - 5 \\ &= 2t^2 - 3t - 9 \end{aligned}$$

(c) $x = 0$ は $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$ の解ではないので, この両辺を x^2 で割ると

$$\frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0$$

$$(b) \text{ の結果により } 2t^2 - 3t - 9 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 3, \quad -\frac{3}{2}$$

$$t = 3 \text{ のとき } \quad x + \frac{1}{x} = 3 \text{ より } \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$t = -\frac{3}{2} \text{ のとき } \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \text{ より } \quad 2x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4} \quad \blacksquare$$

3 (1) $r = 0$ のとき $a_{n+2} = -4a_n$ より

(i) n が奇数のとき, $n = 2m - 1$ とおくと $a_{2m+1} = -4a_{2m-1}$
 数列 $\{a_{2m-1}\}$ は, 初項 $a_1 = 1$, 公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m-1} = (-4)^{m-1}$$

$$m = \frac{n+1}{2} \text{ であるから } \quad \mathbf{a_n = (-4)^{\frac{n-1}{2}}}$$

(ii) n が偶数のとき, $n = 2m$ とおくと $a_{2m+2} = -4a_{2m}$
 数列 $\{a_{2m}\}$ は, 初項 $a_2 = 3$, 公比 -4 の等比数列であるから

$$a_{2m} = 3 \cdot (-4)^{m-1}$$

$$m = \frac{n}{2} \text{ であるから } \quad \mathbf{a_n = 3 \cdot (-4)^{\frac{n-2}{2}}}$$

(2) (a) $r = 5$ のとき, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n), \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} = a_{n+1} - 4a_n$$

$$\text{ゆえに } \quad b_{n+1} = 4b_n, \quad c_{n+1} = c_n$$

したがって, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$, 公比 4 の等比数列であるから

$$b_n = 2 \cdot 4^{n-1} = \mathbf{2^{2n-1}}$$

数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2 - 4a_1 = 3 - 4 \cdot 1 = -1$ および漸化式から

$$c_n = \mathbf{-1}$$

(b) (a) の結果から $a_{n+1} - a_n = 2^{2n-1}$, $a_{n+1} - 4a_n = -1$

$$\text{上の2式から, } a_{n+1} \text{ を消去すると } \quad a_n = \frac{1}{3}(2^{2n-1} + 1)$$

(3) (c) $r = 4$ のとき, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ より

$$\frac{a_{n+2}}{2^{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} \quad \text{ゆえに } d_{n+1} = d_n$$

数列 $\{d_n\}$ は初項 $\frac{a_2}{2^2} - \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{4}$ および漸化式から $d_n = \frac{1}{4}$

(d) 数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ は初項 $\frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n-1) \quad \text{よって } \quad \mathbf{a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}}$$



$$\boxed{4} \quad (1) \quad \begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \text{ より } \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$$

したがって、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ において

$$x = \frac{\pi}{2} - 1, \quad y = 1, \quad \frac{dx}{d\theta} = 1, \quad \frac{dy}{d\theta} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = 1$$

よって、求める接線の方程式は

$$y - 1 = 1 \left\{ x - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right\} \quad \text{すなわち} \quad y = x - \frac{\pi}{2} + 2$$

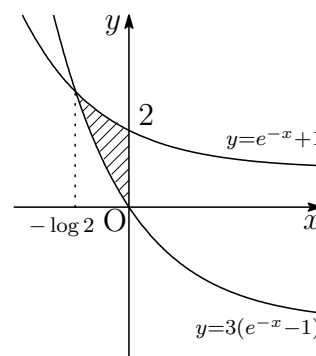
(2) $y = e^{-x} + 1$, $y = 3(e^{-x} - 1)$ から y を消去すると

$$e^{-x} + 1 = 3(e^{-x} - 1) \quad \text{ゆえに} \quad e^{-x} = 2 \quad \text{したがって} \quad x = -\log 2$$

よって、求める交点の座標は $(-\log 2, 3)$

(3) 右の図から求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\log 2}^0 \{(e^{-x} + 1) - 3(e^{-x} - 1)\} dx \\ &= \int_{-\log 2}^0 (-2e^{-x} + 4) dx \\ &= \left[2e^{-x} + 4x \right]_{-\log 2}^0 \\ &= 4 \log 2 - 2 \end{aligned}$$



(4) 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-\log 2}^0 \{(e^{-x} + 1)^2 - 3^2(e^{-x} - 1)^2\} dx \\ &= \int_{-\log 2}^0 (-8e^{-2x} + 20e^{-x} - 8) dx \\ &= \left[4e^{-2x} - 20e^{-x} - 8x \right]_{-\log 2}^0 \\ &= 8 - 8 \log 2 \end{aligned}$$

よって $V = 8\pi(1 - \log 2)$ ■

- 5 (1) 点 (x, y) は, 点 $(2, 4)$ を原点を中心に -150° 回転させた点であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-150^\circ) & -\sin(-150^\circ) \\ \sin(-150^\circ) & \cos(-150^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ -1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $(x, y) = (2 - \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$

- (2) $P^n = \begin{pmatrix} \cos(150^\circ \times n) & -\sin(150^\circ \times n) \\ \sin(150^\circ \times n) & \cos(150^\circ \times n) \end{pmatrix}$ であるから

$$\cos(150^\circ \times n) = 1, \quad \sin(150^\circ \times n) = 0$$

したがって, 整数 k を用いて $150^\circ \times n = 360^\circ \times k$ ゆえに $k = \frac{5}{12}n$
 k は整数なので, 上式をみたす最小の自然数 n は $n = 12$

- (3) (a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad YX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad XY \neq YX$$

(b) (a) の X, Y について, $XY = O$ であるが, $X \neq O, Y \neq O$

- (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$AX = Y \text{ であるが, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ により}$$

$$YA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad X \neq YA^{-1}$$

■

- 6 (1) C において, $s = c \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{c}{(c \tan \theta)^2 + c^2} = \frac{1}{c(\tan^2 \theta + 1)} = \frac{1}{c} \cos^2 \theta = \frac{1}{2c}(1 + \cos 2\theta)$$

$$y = \frac{c \tan \theta}{(c \tan \theta)^2 + c^2} = \frac{\tan \theta}{c(\tan^2 \theta + 1)} = \frac{1}{c} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2c} \sin 2\theta$$

上の2式から, C の表す円の方程式は, θ の範囲に注意して

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 \quad \dots \textcircled{1} \quad \text{ただし } (x, y) \neq (0, 0)$$

C の x, y, s, c をそれぞれ y, x, t, d に置き換えたものが D であるから, D の表す円の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2d}\right)^2 = \left(\frac{1}{2d}\right)^2 \quad \dots \textcircled{2} \quad \text{ただし } (x, y) \neq (0, 0)$$

- (2) ①, ② の辺々を引いて整理すると $y = \frac{d}{c}x$ $\dots \textcircled{3}$

③ を ① に代入して整理すると $(c^2 + d^2)x^2 = cx$

$(x, y) \neq (0, 0)$ であるから, 上式および ③ から, 交点の座標は

$$\left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{d}{c^2 + d^2}\right)$$

- (3) (2) で求めた交点における C の接線の方程式は

$$\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{1}{2c}\right)\left(x - \frac{1}{2c}\right) + \frac{d}{c^2 + d^2}y = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

これを整理すると $(c^2 - d^2)x + 2cdy - c = 0$

円上の点における接線の方程式

円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上の点 $P(p, q)$ における接線の方程式は

$$(p - a)(x - a) + (q - b)(y - b) = r^2$$



7 (1) X, Y は、互いに独立であるから

$X \backslash Y$	2	4	計
1	ab	$a(1-b)$	a
2	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b)$	$1-a$
計	b	$1-b$	1

(2) $W = X - Y$ より

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X) - E(Y) \\ &= \{1 \cdot a + 2(1-a)\} - \{2 \cdot b + 4(1-b)\} \\ &= -a + 2b - 2 \end{aligned}$$

(3) $Z = \frac{2}{2} = 1$, $Z = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$, $Z = \frac{4}{1} = 4$ より

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$(1-a)b$	$(1-a)(1-b) + ab$	$a(1-b)$	1

$$\begin{aligned} E(Z) &= 1 \cdot (1-a)b + 2\{(1-a)(1-b) + ab\} + 4 \cdot a(1-b) \\ &= 2 + 2a - b - ab \end{aligned}$$

(4) $E(Z) = \frac{9}{4}$, $E(W) = -\frac{3}{2}$ を (2), (3) の結果に代入すると

$$2 + 2a - b - ab = \frac{9}{4}, \quad -a + 2b - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ゆえに} \quad a(2-b) - b = \frac{1}{4}, \quad a = 2b - \frac{1}{2}$$

$0 < a < 1$, $0 < b < 1$ に注意してこれを解くと $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

このとき, (3) の表は

Z	1	2	4	計
$P(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad V(Z) &= E(Z^2) - \{E(Z)\}^2 \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{19}{16} \end{aligned}$$



- 8 (1) 数字 1 が書かれた玉 a 個 ($a \geq 1$) と数字 2 が書かれた玉 1 個の計 $a + 1$ 個の玉から 1 個取り出した玉の数字を X とすると

X	1	2	計
$P(X)$	$\frac{a}{a+1}$	$\frac{1}{a+1}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{a}{a+1} + 2 \times \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{a+1}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 1^2 \times \frac{a}{a+1} + 2^2 \times \frac{1}{a+1} - \left(\frac{a+2}{a+1}\right)^2 = \frac{a}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

$E(\bar{X}) = E(X)$ であるから

$$\frac{a+2}{a+1} = \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて } a = 1 \quad \text{ゆえに } V(X) = \frac{1}{4}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{3}V(X) \text{ であるから } \quad V(\bar{X}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

復元抽出による大きさ 3 の無作為標本のうち、数字 2 が書かれた玉が出た回数を k とすると ($0 \leq k \leq 3$)

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot (3-k) + 2 \cdot k}{3} = \frac{3+k}{3}, \quad P(\bar{X}) = {}_3C_k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{{}_3C_k}{8}$$

したがって、 \bar{X} の確率分布表は、次のようになる。

\bar{X}	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	計
$P(\bar{X})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

補足 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ のとき、 $V(\bar{X}) = \frac{1}{n}V(X)$

$$(2) \frac{300}{500} = 0.6, \quad P(Z > 0.25) = 0.4 \text{ より}$$

$$P(Z < -0.25) = 0.4 \quad \text{ゆえに} \quad P(Z \geq -0.25) = 0.6$$

得点を X , $Z = \frac{X - 245}{50}$ とおくと、 Z は $N(0, 1)$ に従うので、合格最低点を x とすると

$$\frac{x - 245}{50} = -0.25 \quad \text{ゆえに} \quad x = 245 + (-0.25) \times 50 = 232.5$$

ここでは、小数点以下は切り上げるので **233** (点) ■

- 9 (1) $f(x) = \sin 2x$ とおくと $f'(x) = 2 \cos 2x$

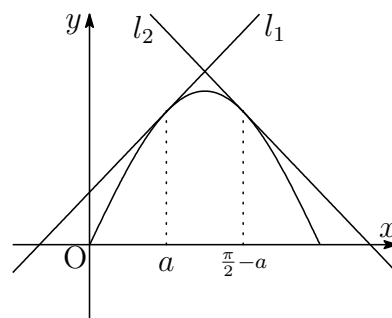
$$\begin{aligned} f'(a) &= 2 \cos 2a \\ f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) &= 2 \cos 2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= -2 \cos 2a \end{aligned}$$

$l_1 \perp l_2$ より $f'(a) \cdot f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = -1$ であるから

$$2 \cos 2a (-2 \cos 2a) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 2a = \frac{1}{4}$$

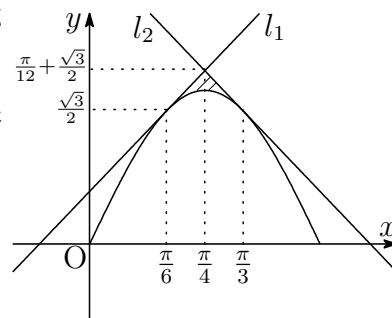
$0 < a < \frac{\pi}{4}$ より, $\cos 2a > 0$ であるから

$$\cos 2a = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{\pi}{6}$$



- (2) 曲線 $y = \sin 2x$ は直線 $x = \frac{\pi}{4}$ に関して対称であるから, l_1, l_2 の曲線との接点の座標が, それぞれ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ であるから. l_1 と l_2 も直線 $x = \frac{\pi}{4}$ に関して対称である.

(1) の結果から l_1 は点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通り, 傾き 1 の直線であるから



$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{\pi}{6} \quad \text{すなわち} \quad y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx \\ &= \frac{\pi}{24} \left(\frac{\pi}{12} + \sqrt{3} \right) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって
$$S = \frac{\pi^2}{144} + \frac{\sqrt{3}}{12} \pi - \frac{1}{2}$$

■