平成 25 年度　鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成 25 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{2}$ $\boxed{9}$ から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

1 次の各問いに答えよ．

(1) 四角形 ABCD において，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，$\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{CBD}$，$\mathrm{AC} = 8$，$\mathrm{AP} = 2$，$\mathrm{PD} = 4$ とする．このとき BD の長さを求めよ．

(2) 平面上で 2 つの円を考える．共通接線がちょうど 3 本引けるような 2 つの円の位置関係の例を図示せよ．また，3 本の共通接線も描け．

(3) 3 個のさいころを同時に投げるとき，3 個の目の積が 3 の倍数である確率を求めよ．

(4) a，b を実数とする．命題「$ab = 0$ ならば，$a = 0$ かつ $b = 0$」の逆と対偶を書き，それぞれの真偽を答えよ．

2 次の各問いに答えよ．

(1) 次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) m，n が自然数ならば，$\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$ である．このことを証明せよ．

(ii) p，q が自然数ならば，$\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある．

すなわち，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$ または $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$ が成り立つ．

このことを証明せよ．

(2) 定数 a は実数で，$a > 0$，$a \neq 1$ とする．このとき，すべての正の実数 x，y に対して $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ が成り立つ．このことを証明せよ．

3 次の各問いに答えよ．

(1) 三角形 ABC の垂心を H とする．次の等式が成り立つことを示せ．

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}} = \overrightarrow{\mathrm{HC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}$$

ただし，三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わる．この点を三角形の垂心という．

(2) 次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) 自然数 n に対して自然数 a_n を次のように定義する．

$$a_n = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$$

このとき，すべての自然数 k に対して $(2k)! = 2^k k! a_k$ が成り立つ．このことを証明せよ．

(ii) すべての自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる．このことを数学的帰納法で証明せよ．

4 次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 3x\,dx$ を求めよ．

(3) m，n を自然数とする．$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{2013} \sin kx\right)^2 dx$ を求めよ．

5 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A) = ad - bc$ とおく．たとえば単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては $\Delta(E) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ となる．また $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ に対しては $\Delta(K) = 2 \times 7 - 3 \times 5 = -1$ となる．次の各問いに答えよ．

(1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して $R = PQ$ とおく．$\Delta(P)$，$\Delta(Q)$，$\Delta(R)$ を計算し，$\Delta(R) = \Delta(P)\Delta(Q)$ が成り立つことを確かめよ．

(2) すべての 2 次の正方行列 A，B に対して，$C = AB$ とおくと $\Delta(C) = \Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ．

(3) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる 2 次の正方行列 X ですべての成分が実数であるものは存在しないことを示せ．

(4) 2 次の正方行列 A に逆行列 B が存在したとする．A と B の成分がすべての整数ならば，$\Delta(A)$ は 1 か -1 のどちらかである．このことを示せ．

6 xy 平面において，点 $\mathrm{F}(p,\ 0)$ と y 軸から等距離にある点の軌跡を C とする．ただし，$p > 0$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) C を表す方程式を求めよ．

(2) C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における C の接線 l の方程式を求めよ．ただし，$y_0 \neq 0$ とする．

(3) (2) の l と x 軸の交点を Q とするとき，$\mathrm{FP} = \mathrm{FQ}$ であることを証明せよ．

7 0，1，2，3，4 の数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードがある．この 5 枚のカードの中から 1 枚引き，数字を記録して戻すという作業を 3 回繰り返す．ただし，3 回ともどのカードを引く確率も等しいとする．記録した 3 つの数字の最小値を X とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対して確率 $P(X \geqq k)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X の確率分布を表で表せ．

(3) 確率変数 X の平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(4) 確率変数 X の分散 $V(X)$ を求めよ．

8 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leqq X \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるものとする．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{a}x & (0 \leqq x \leqq a) \\ \dfrac{k}{2-a}(2-x) & (a < x \leqq 2) \end{cases}$$

ここで，a，k は $0 < a < 1$，$k > 0$ を満たす定数である．次の各問いに答えよ．

(1) 定数 k の値を求めよ．

(2) X の平均 (期待値)$E(X)$ を a を用いて表せ．

(3) $P(X \leqq u) = 0.5$ となる実数 u を a を用いて表せ．

9 xy 平面において，曲線 $y = e^x$ と 3 直線 $y = x + 1$，$x = 1$，$x = -1$ で囲まれた部分を D とする．ただし e は自然対数の底である．次の各問いに答えよ．

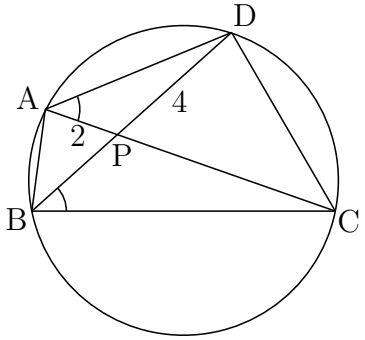
(1) 関数 $f(x) = e^x - (x + 1)$ の増減，極値，凹凸を $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で調べ，増減表にまとめよ．

(2) D を図示せよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ．

解答例

1 (1) $\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{CBD}$ であるから，円周角の定理により，四角形 ABCD は円に内接する．



$\mathrm{AC} = 8$，$\mathrm{AP} = 2$ より　　$\mathrm{PC} = 6$

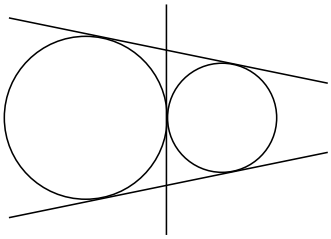
方べきの定理により

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PC} = \mathrm{PB}\cdot\mathrm{PD} \quad \text{ゆえに} \quad 2\cdot 6 = \mathrm{PB}\cdot 4$$

したがって　$\mathrm{PB} = 3$

よって　$\mathrm{BD} = \mathrm{PB} + \mathrm{PD} = 3 + 4 = \mathbf{7}$

(2) 共通接線が 3 本引けるのは，2 円が外接するときで，次の図のようになる．



(3) 3 個とも 3 の倍数の目でない確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

求める確率は，この余事象 (少なくとも 1 個は 3 の倍数) の確率であるから

$$1 - \frac{8}{27} = \boldsymbol{\frac{19}{27}}$$

(4) 逆の命題は「$\boldsymbol{a = 0}$ **かつ** $\boldsymbol{b = 0}$ **ならば** $\boldsymbol{ab = 0}$」 **(真)**
対偶命題は「$\boldsymbol{a \neq 0}$ **または** $\boldsymbol{b \neq 0}$ **ならば** $\boldsymbol{ab \neq 0}$」 **(偽)**(反例 $a = 0, b = 1$)

■

2 (1) (i) m と n の最大公約数を G とし

$$m = Gm', \quad n = Gn'$$

とすると (m', n'は互いに素)

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

が成り立つ．ここで，$\dfrac{m'}{n'} = \sqrt{2}$ であると仮定すると

$$m' = \sqrt{2}n'$$

この両辺を平方すると

$$m'^2 = 2n'^2$$

よって，m'^2 は偶数，すなわち m' は偶数である．偶数 m' はある自然数 k を用いて，$m' = 2k$ と表されるから

$$(2k)^2 = 2n'^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2k^2 = n'^2$$

よって，n'^2 は偶数となり，n' も偶数である．
m' と n' がともに偶数となることは，m' と n' が互いに素であることに反する．
したがって　$\dfrac{m'}{n'} \neq \sqrt{2}$　　よって　$\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$

(ii) i) の結果から，p，q が自然数ならば $\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2}$ であるから

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} \text{ のとき} \quad \frac{q}{p} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{2q}{p} > \sqrt{2}$$

$$\frac{p}{q} > \sqrt{2} \text{ のとき} \quad \frac{q}{p} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{2q}{p} < \sqrt{2}$$

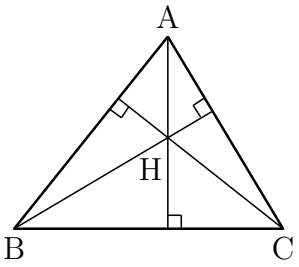
よって，$\dfrac{p}{q} < \sqrt{2} < \dfrac{2q}{p}$ または $\dfrac{2q}{p} < \sqrt{2} < \dfrac{p}{q}$ が成り立つ．

(2) $b = x^{\log_a y}$，$c = y^{\log_a x}$ とおき，2 式の両辺を a を底とする対数をとると

$$\begin{aligned} \log_a b &= \log_a x^{\log_a y} \\ &= \log_a y \log_a x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log_a c &= \log_a y^{\log_a x} \\ &= \log_a x \log_a y \end{aligned}$$

ゆえに　$\log_a b = \log_a c$　すなわち　$b = c$　よって　$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ ■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{HC}} - \overrightarrow{\mathrm{HB}}) = 0$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} = \overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}}$　$\cdots$①

また $\overrightarrow{\mathrm{HB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{HA}} - \overrightarrow{\mathrm{HC}}) = 0$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}}$　$\cdots$②

①，② より　$\overrightarrow{\mathrm{HA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} = \overrightarrow{\mathrm{HB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = \overrightarrow{\mathrm{HC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}}$

(2) (i) $a_k = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(2j-1)$ であるから

$$\begin{aligned}(2k)! &= \prod_{j=1}^{k} 2j(2j-1) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{k} 2\right)\left(\prod_{j=1}^{k} j\right)\left\{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\right\} \\ &= 2^k k! a_k\end{aligned}$$

(ii) 「自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる」を $(*)$ とする．

［1］$n=1$ のとき，$2^1! = 2$ は $2^{(2^1-1)} = 2$ で割り切れる．

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，整数 l を用いて

$$2^k! = l \cdot 2^{(2^k-1)}$$

とおける．(i) の結果を利用して

$$\begin{aligned}2^{k+1}! = (2 \cdot 2^k)! &= 2^{2^k}(2^k!)a_{2^k} \\ &= 2^{2^k} l \cdot 2^{(2^k-1)} a_{2^k} \\ &= 2^{(2^k+2^k-1)} l \cdot a_{2^k} \\ &= 2^{(2 \cdot 2^k-1)} l \cdot a_{2^k} = 2^{(2^{k+1}-1)} l \cdot a_{2^k}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，$(*)$ が成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．　■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx &= 2\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx \\ &= 2\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx \\ &= 2\pi + 2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{2\pi}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\sin 3x\,dx &= 2\int_0^{\pi} \sin 2x\sin 3x\,dx \\ &= \int_0^{\pi}(-\cos 5x + \cos x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right]_0^{\pi} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(3) $m = n$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 2\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx \\ &= \int_0^{\pi}(1-\cos 2mx)\,dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}\end{aligned}$$

$m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 2\int_0^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx \\ &= \int_0^{\pi}\{-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2013}\sin kx\right)^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{2013}\sin mx\right)\left(\sum_{n=1}^{2013}\sin nx\right)dx \\ &= \sum_{m=1}^{2013}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx \\ &= \sum_{m=1}^{2013}\pi = \boldsymbol{2013\pi}\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ より　$\Delta(P) = 0{\cdot}3 - 1{\cdot}2 = -2$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ より　$\Delta(P) = 1{\cdot}4 - 2{\cdot}3 = -2$

$$R = PQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

よって　$\Delta(R) = 3{\cdot}16 - 4{\cdot}11 = 4 = (-2){\cdot}(-2) = \Delta(P)\Delta(Q)$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ とすると

$$\Delta(A) = ad - bc, \quad \Delta(B) = xu - yz$$

$C = AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bu \\ cx + dz & cy + du \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} \Delta(C) &= (ax + bz)(cy + du) - (ay + bu)(cx + dz) \\ &= (ad - bc)xu - (ad - bc)yz \\ &= (ad - bc)(xu - yz) \\ &= \Delta(A)\Delta(B) \end{aligned}$$

(3) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より　$\Delta(F) = 0{\cdot}0 - 1{\cdot}1 = -1$

$X^2 = F$ であるから，(2) の結果を利用して

$$\Delta(X^2) = \Delta(F) \quad \text{ゆえに} \quad \{\Delta(X)\}^2 = -1$$

正方行列 X の成分は実数であるから，これをみたす X は存在しない．

(4) $AB = E$ であるから

$$\Delta(A)\Delta(B) = \Delta(E) \quad \text{ゆえに} \quad \Delta(A)\Delta(B) = 1$$

A，B の成分がすべて整数であるから，$\Delta(A)$，$\Delta(B)$ は整数である．
よって，$\Delta(A)$ は 1 か -1 のどちらかである．　■

6 (1) C 上の点 $(x,\ y)$ が $\mathrm{F}(p,\ 0)$ と y 軸から等距離にあるので

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|\,x\,| \quad \cdots ①$$

ゆえに　$(x-p)^2+y^2=x^2$　整理すると　$\boldsymbol{y^2=2px-p^2}$

(2) $y^2=2px-p^2$ の両辺を x で微分すると

$$2y\frac{dy}{dx}=2p \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$$

C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線 l の方程式は $(y_0 \neq 0)$

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0) \quad \text{ゆえに} \quad y_0y-{y_0}^2=px-px_0$$

${y_0}^2=2px_0-p^2$ であるから　$\boldsymbol{y_0y=p(x+x_0-p)}$

(3) $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は，C 上の点であるから，① より

$$\mathrm{FP}=\sqrt{(x_0-p)^2+{y_0}^2}=|\,x_0\,|$$

(2) の結果から，l の x 軸との交点 Q の座標は　$(p-x_0,\ 0)$

これと $\mathrm{F}(p,\ 0)$ から　$\mathrm{FQ}=|\,x_0\,|$　よって　$\mathrm{FP}=\mathrm{FQ}$ ■

7 (1) $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ に対する確率 $P(X \geqq k)$ は，3 回とも k 以上のカードである確率であるから

$$P(X \geqq k) = \left(\frac{\boldsymbol{5-k}}{\boldsymbol{5}}\right)^{\boldsymbol{3}}$$

(2) (1) の結果から

i) $k=0,1,2,3$ のとき

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X \geqq k) - P(X \geqq k+1) \\ &= \left(\frac{5-k}{5}\right)^3 - \left(\frac{4-k}{5}\right)^3 \end{aligned}$$

ii) $k=4$ のとき

$$P(X=4) = P(X \geqq 4) = \left(\frac{5-4}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

i)，ii) より，X の確率分布は次のようになる．

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{61}{125}$	$\frac{37}{125}$	$\frac{19}{125}$	$\frac{7}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

(3) (2) の結果から

$$E(X) = 0 \times \frac{61}{125} + 1 \times \frac{37}{125} + 2 \times \frac{19}{125} + 3 \times \frac{7}{125} + 4 \times \frac{1}{125} = \frac{100}{125} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(4) $E(X^2) = 0^2 \times \dfrac{61}{125} + 1^2 \times \dfrac{37}{125} + 2^2 \times \dfrac{19}{125} + 3^2 \times \dfrac{7}{125} + 4^2 \times \dfrac{1}{125} = \dfrac{192}{125}$

よって　$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{192}{125} - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{112}{125}}$ ■

8 (1)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^a \frac{k}{a}x\,dx + \int_a^2 \frac{k}{2-a}(2-x)\,dx$$
$$= k\left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a + k\left[-\frac{(2-x)^2}{2(2-a)}\right]_a^2 = \frac{a}{2}k + \frac{2-a}{2}k = k$$

$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 1$ であるから　　$\boldsymbol{k = 1}$

解説 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ は，3 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ k)$，$(2,\ 0)$ を頂点する三角形の面積.

(2) $k = 1$ より

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx + \int_a^2 \frac{x(2-x)}{2-a}\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a + \int_a^2 \left\{\frac{2(2-x)}{2-a} - \frac{(2-x)^2}{2-a}\right\} dx \\
&= \frac{a^2}{3} + \left[-\frac{(2-x)^2}{2-a} + \frac{(2-x)^3}{3(2-a)}\right]_a^2 \\
&= \frac{a^2}{3} + (2-a) - \frac{1}{3}(2-a)^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{a+2}{3}}
\end{aligned}$$

(3)

$$\int_0^a \frac{x}{a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2} < \frac{1}{2} = 0.5$$

上式および $P(X \leqq u) = 0.5$ より　$u > a$

$$\begin{aligned}
P(X \leqq u) &= \int_0^a \frac{x}{a}\,dx + \int_a^u \frac{2-x}{2-a}\,dx \\
&= \frac{a}{2} + \left[-\frac{(2-x)^2}{2(2-a)}\right]_a^u \\
&= \frac{a}{2} - \frac{(2-u)^2}{2(2-a)} + \frac{2-a}{2} = 1 - \frac{(2-u)^2}{2(2-a)}
\end{aligned}$$

したがって　$1 - \dfrac{(2-u)^2}{2(2-a)} = 0.5$　ゆえに　$(2-u)^2 = 2-a$

$a < u < 2$ であるから，$2-u > 0$，$2-a > 0$ より

$2 - u = \sqrt{2-a}$　よって　$\boldsymbol{u = 2 - \sqrt{2-a}}$

■

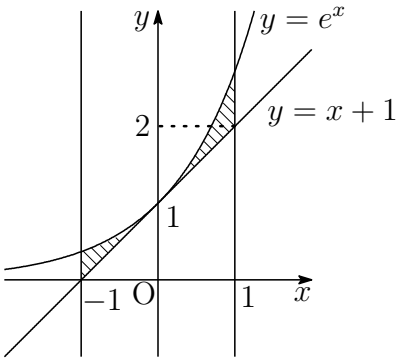
9 (1) $f(x)=e^x-(x+1)$ より　$f'(x)=e^x-1$，$f''(x)=e^x$

したがって，$f(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	↘	0	↗	$e-2$

$x=0$ で**極小値 0**

(2) D は図の斜線部分



(3) 求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx - \frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2 \\ &= \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} - \frac{8}{3}\pi \\ &= \boldsymbol{\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-\frac{8}{3}\right)} \end{aligned}$$

■