

平成 24 年度 鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部

平成 24 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部 [1] [2] [3] [4] 必答,
[5] [6] [7] [8] から 1 問選択. 数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化], 医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部 [1] [2] [3]
数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・
健康教育] 学部 [1] [3] 必答, [2] [9] から 1 問選択.
数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

1 次の各問いに答えよ.

- (1) KADAI という語の 5 文字を並べて得られる順列のうち, 2 つの A が隣り合わないものの総数を求めよ.
- (2) $x^2 - 9x + 14 > 0$ を満たさない整数 x で, 3 の倍数でないものをすべて求めよ.
- (3) 三角形 ABC において, 辺 AB の中点を D, 辺 AC の中点を E とする.
BE = CD ならば AB = AC であることを示せ.

2 x の関数 $f(x) = 8^x + 8^{-x} - 9(4^x + 4^{-x}) + 27(2^x + 2^{-x}) - 26$ について, 次の各問いに答えよ.

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく. $f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき,
 $g(t)$ を求めよ.
- (2) $t = 2^x + 2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ.
- (3) t が (2) で求めた範囲を動くとき, 関数 $y = g(t)$ の増減を調べよ.
- (4) $x \geq 0$ のとき, 関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ.

3 平面上に互いに異なる 3 点 O, A, B があり, それらは同一直線上にはないものとする. $OA = 2$, $OB = 3$ とする. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とし, その内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = t$ とおく. $\angle AOB$ の二等分線と線分 AB との交点を C とし, 直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) \vec{OC} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (2) \vec{OD} を t , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ.
- (3) $\vec{OC} \perp \vec{OD}$ となるとき, $\angle AOB$ と OC を求めよ.

4 次の各問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) n を自然数とする。 x の関数 $f(x) = x^n e^{1-x}$ について、 $0 < x < 1$ ならば $0 < f(x) < 1$ であることを示せ。
- (2) 自然数 n に対して $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ とおくとき、 I_1 を求めよ。さらに、 I_{n+1} と I_n の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) (2) の I_n に対して $a_n = \frac{I_n}{n!}$ とおくとき、 $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = a_1 - a_n$ であることを示せ。
- (4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e - 1$ であることを示せ。

5 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ と自然数 n について、 次の各問いに答えよ。

- (1) 次の等式を満たす α, β, p, q を求めよ。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。

$$A \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (2) (1) で求めた p に対して $A^n \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ。
- (3) A^n を求めよ。

6 極方程式 $r = \frac{a}{2 + \cos \theta}$ で与えられる 2 次曲線がある。ただし、 a は正の定数とする。このとき次の各問いに答えよ。

- (1) この 2 次曲線を直交座標 (x, y) に関する方程式で表せ。
- (2) (1) で求めた 2 次曲線を x 軸方向に $\frac{a}{3}$ だけ平行移動した 2 次曲線を C で表す。 C を直交座標 x, y の方程式で表せ。また、この 2 次曲線 C は x 軸と 2 点 A, B で交わる。この 2 点 A, B の座標を求めよ。ただし、 B の x 座標は正とする。
- (3) (2) で求めた 2 次曲線 C 上の x 軸上にはない点 $P(\alpha, \beta)$ から x 軸に下ろした垂線を PH とする。さらに P と x 軸に関して対称な点を Q とするとき、次の値は定数であることを証明せよ。

$$\frac{PH \cdot QH}{AH \cdot BH}$$

7 1個買うごとに景品を1個もらえる商品がある。景品は全部で n 種類あり、それぞれ1から n までの番号がつけてある。また、1から n までの数字が1つずつ記入された n 枚のカードがある。 n 枚のカードは外から数字が見えない箱の中に入れてあり、購入した商品1個ごとに箱の中から1枚引いて数字を確認して景品と交換する。引いたカードは、そのつど箱に戻すものとする。もらえる景品の番号は、引いたカードの数字と同じ番号のものとする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) この商品を m 個購入したとき、番号1の景品が少なくとも1個もらえる確率を求めよ。ただし、 $m > n$ とする。
- (2) この商品を n 個購入したとき、全種類の景品がそろわない確率を求めよ。
- (3) この商品を $n+1$ 個購入したとき、全種類の景品がもらえる確率を求めよ。

8 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、

$$P(Z > 1.96) = 0.025, \quad P(Z > 2.58) = 0.005, \quad \frac{2.58}{1.96} \doteq 1.32$$

であるとして、次の各問いに答えよ。

- (1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leq x \leq 1$ で、その確率密度関数が $f(x) = k(1 - x^2)$ で与えられている。このとき、定数 k の値と X の平均を求めよ。
- (2) 母平均 m 、母標準偏差 10 の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出し、その標本平均を \bar{X} とする。標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする。
 - (a) 標本平均 \bar{X} を用いて、母平均 m の信頼度 95% の信頼区間を求めよ。
 - (b) 母平均 m を信頼度 99% の信頼区間を用いて区間推定するとき、信頼区間の幅を (a) で求めた幅より小さくするためには、標本の大きさ n をいくつ以上にとればよいか求めよ。

9 e を自然数の底とし、 $\log x$ を自然対数とする。次の各問いに答えよ。

- (1) p, q を $p > 0, q > 1$ を満たす定数とする。曲線 $y = p \log x$ と直線 $x = q$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を p, q を使って表せ。
- (2) 2つの曲線 $y = \log x, y = 3 \log x$ と2つの直線 $x = e, x = e^2$ で囲まれた部分を D とする。 D の面積を求めよ。
- (3) (2) で与えられた D を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

- 1 (1) KADAIの5文字の並べ方の総数は $\frac{5!}{2!} = 60$ (通り)
 その中で2つのAが隣り合う並べ方の総数は $4! = 24$ (通り)
 したがって、求める場合の総数は $60 - 24 = 36$ (通り)

- (2) $x^2 - 9x + 14 > 0$ を満たさない整数は、 $x^2 - 9x + 14 \leq 0$ を満たす整数。
 ゆえに、 $2 \leq x \leq 7$ を満たす整数で、3の倍数でないものは **2, 4, 5, 7**

- (3) BE, CD は、 $\triangle ABC$ の中線であるから、その交点(重心)をGとすると

$$GB = \frac{2}{3}BE, \quad GE = \frac{1}{3}BE, \quad GC = \frac{2}{3}CD, \quad GD = \frac{1}{3}CD$$

$\angle BGD = \angle CGE$ であるから、 $BE = CD$ のとき、 $\triangle BGD \equiv \triangle CGE$

ゆえに $BD = CE$ よって $AB = AC$ ■

- 2 (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ より

$$8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x}) = t^3 - 3t$$

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad g(t) &= (t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) + 27t - 26 \\ &= t^3 - 9t^2 + 24t - 8 \end{aligned}$$

- (2) 相加平均・相乗平均の関係により

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2 \quad \text{よって} \quad t \geq 2$$

- (3) $g(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 18t + 24 \\ &= 3(t-2)(t-4) \end{aligned}$$

t	2	...	4	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	12	↘	8	↗

$g(t)$ の増減は右の表のようになる。

- (4) (3)の結果から、 $f(x)$ の最小値は **8**
 このとき、 $t = 4$ より

$$2^x + 2^{-x} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$x \geq 0$ より、 $2^x \geq 1$ であるから、最小値を与える x の値は

$$2^x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{よって} \quad x = \log_2(2 + \sqrt{3})$$
 ■

- 3 (1) 直線 OC は, $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$AC : CB = OA : OB = 2 : 3$$

$$\text{よって } \vec{OC} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$

- (2) B から直線 OA に垂線 BH を引く.

$$\vec{OH} = k\vec{a} \quad (k \text{ は実数}) \text{ とおくと}$$

$$\vec{HB} = \vec{b} - k\vec{a}$$

このとき, $\vec{OA} \perp \vec{HB}$ より, $\vec{OA} \cdot \vec{HB} = 0$ であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - k\vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} - k|\vec{a}|^2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = t, \quad |\vec{a}| = 2 \text{ より} \quad t - k \cdot 2^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{t}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OD} &= \vec{OH} + \vec{HD} = \vec{OH} + (-\vec{HB}) = \vec{OH} + (\vec{OH} - \vec{OB}) \\ &= 2\vec{OH} - \vec{OB} = 2 \cdot \frac{t}{4}\vec{a} - \vec{b} = \frac{t}{2}\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

- (3) $\vec{OC} \perp \vec{OD}$ より, $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = 0$ であるから

$$\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} \cdot \left(\frac{t}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$

$$\text{したがって} \quad 3t|\vec{a}|^2 + (2t - 6)\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 0$$

$$3t \cdot 2^2 + (2t - 6)t - 4 \cdot 3^2 = 0$$

$$\text{整理すると} \quad (t - 3)(t + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 3, -6$$

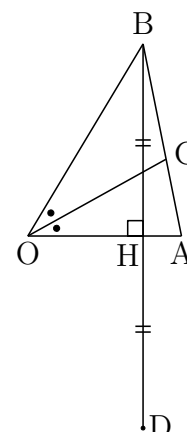
$$(i) \quad t = 3 \text{ のとき} \quad \cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$$(ii) \quad t = -6 \text{ のとき} \quad \cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-6}{2 \cdot 3} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \angle AOB = \pi$$

このとき, O, A, B は一直線上にあり, 条件に反するので不適.

$$\text{よって} \quad \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad OC &= |\vec{OC}| = \frac{1}{5}|3\vec{a} + 2\vec{b}| = \frac{1}{5}\sqrt{9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2} \\ &= \frac{1}{5}\sqrt{9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$



- 4 (1) $f(x) = x^n e^{1-x}$ を微分すると $f'(x) = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$
 $0 < x < 1$ において, $f'(x) > 0$ であるから

$$f(0) < f(x) < f(1) \quad \text{よって} \quad 0 < f(x) < 1$$

$$\begin{aligned} (2) \quad I_1 &= \int_0^1 x e^{1-x} dx = - \int_0^1 x (e^{1-x})' dx \\ &= - \left[x e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx \\ &= -1 + \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = e - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx = - \int_0^1 x^{n+1} (e^{1-x})' dx \\ &= - \left[x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x} dx \\ &= -1 + (n+1)I_n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$$

- (3) $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ の両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{I_n}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

$n \geq 2$ のとき $a_{n-1} - a_n = \frac{1}{n!}$ であるから

$$\sum_{k=2}^n (a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \quad \text{よって} \quad a_1 - a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!}$$

- (4) (3) の結果から $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 1 + a_1 - a_n$

$$\text{また} \quad a_1 = \frac{I_1}{1!} = e - 2$$

$0 < f(x) < 1$ および $I_n = \int_0^1 f(x) dx$ から $0 < I_n < 1$

ゆえに $0 < a_n < \frac{1}{n!}$ したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + (e - 2) - 0 = e - 1$$

■

5 (1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \dots (*)$ とすると

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (**)$$

$A - \lambda E$ が正則であれば, $\vec{v} = \vec{0}$ となり条件に反する.

ゆえに, $\det(A - \lambda E) = 0$ であるから

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda) - (-2) \cdot 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda = 2, 3$$

$\alpha < \beta$ に注意して $\alpha = 2, \beta = 3$

i) $(**)$ に $\lambda = 2, x = p$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad p = -2$$

ii) $(**)$ に $\lambda = 3, x = q$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad q = -1$$

よって $\alpha = 2, \beta = 3, p = -2, q = -1$

(2) $(*)$ に $\lambda = 2, x = -2$ を代入すると $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{よって} \quad A^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} \\ 2^n \end{pmatrix}$$

$$(3) (*) \text{ に } \lambda = 3, x = -1 \text{ を代入すると } A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$$

$$\text{これと (2) の結果から } A^n \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } A^n &= \begin{pmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -2 \cdot 3^n + 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

$$\boxed{6} \quad (1) \quad r = \frac{a}{2 + \cos \theta} \text{ より } 2r + r \cos \theta = a$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \cos \theta = x \text{ を代入すると}$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} + x = a$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = a - x \text{ の両辺を平方すると}$$

$$4(x^2 + y^2) = (a - x)^2 \quad \text{よって } 3x^2 + 4y^2 + 2ax - a^2 = 0$$

$$(2) \quad (1) \text{ で求めた 2 次曲線を } x \text{ 軸方向に } \frac{a}{3} \text{ だけ平行移動すると}$$

$$3 \left(x - \frac{a}{3} \right)^2 + 4y^2 + 2a \left(x - \frac{a}{3} \right) - a^2 = 0$$

$$\text{整理すると } 3x^2 + 4y^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0$$

2 次曲線 C と x 軸との交点は, 上式に $y = 0$ を代入して

$$3x^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad \text{これを解いて } x = \pm \frac{2}{3}a$$

2 つの交点 A, B について, B の x 座標は正であるから

$$A \left(-\frac{2}{3}a, 0 \right), B \left(\frac{2}{3}a, 0 \right)$$

(3) $P(\alpha, \beta)$ は x 軸上にないから $\beta \neq 0$

また, $Q(\alpha, -\beta)$, $H(\alpha, 0)$ より

$$PH \cdot QH = PH^2 = \beta^2$$

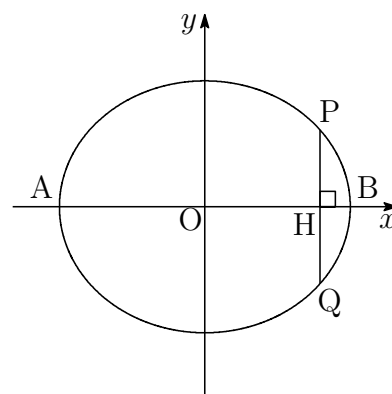
$$\begin{aligned} AH \cdot BH &= \left(\alpha + \frac{2}{3}a\right) \left(\frac{2}{3}a - \alpha\right) \\ &= \frac{4}{9}a^2 - \alpha^2 \end{aligned}$$

P は C 上の点であるから

$$3\alpha^2 + 4\beta^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{9}a^2 - \alpha^2 = \frac{4}{3}\beta^2$$

よって

$$\frac{PH \cdot QH}{AH \cdot BH} = \frac{\beta^2}{\frac{4}{9}a^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\frac{4}{3}\beta^2} = \frac{3}{4}$$



■

2次曲線を表す極方程式

始線 OX 上の点 A(a, 0) を通り、始線に垂直な直線を l とする。点 P(r, θ) から l に下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{OP}{PH}$$

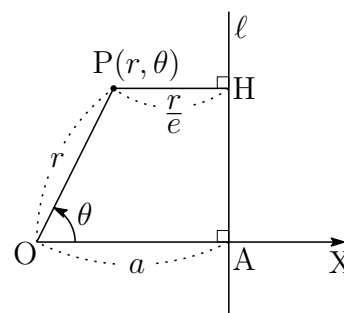
の値が一定であるような点 P の軌跡は、2次曲線になる。

右の図において、線分 PH の長さを 2 通りに表すと

$$PH = \frac{r}{e}, \quad PH = a - r \cos \theta$$

よって $\frac{r}{e} = a - r \cos \theta$

ゆえに $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$



① が点 P の軌跡を表す極方程式である。

① の表す曲線は、 e のとる値によって、次のような 2次曲線に分類される。この e の値を離心率という。

- | | |
|---------------------|----------------------|
| [1] $0 < e < 1$ のとき | O を焦点の 1 つとする楕円 |
| [2] $e = 1$ のとき | O を焦点、 l を準線とする放物線 |
| [3] $e > 1$ のとき | O を焦点の 1 つとする双曲線 |

極方程式 $r = \frac{a}{2 + \cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}a}{1 + \frac{1}{2} \cos \theta}$ から、離心率 $e = \frac{1}{2}$ の楕円である。

A(a, 0) とし、楕円の長軸上の頂点は、OA を $e : 1$ に内分および外分する点であるから、それぞれ、B, C とすると、 $B(\frac{1}{3}a, 0)$, $C(-a, 0)$ 。

楕円の中心 (BC の中点) を M とすると、 $M(-\frac{1}{3}a, 0)$ 。楕円の短軸は $x = -\frac{1}{3}a$ であるから、短軸上の頂点を $N(-\frac{1}{3}a, b)$ とすると、 $ON = MB$ より

$$\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + b^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = \frac{1}{3}a^2$$

よって、与えられた極方程式を直角座標 (x, y) で表すと

$$\frac{\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2}{\frac{4}{9}a^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}a^2} = 1$$



7 (1) 番号1の景品をもらえない確率は $\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$

(2) 全種類の景品がそろふ確率は $\frac{n!}{n^n}$

求めるのはこの余事象の確率であるから $1 - \frac{n!}{n^n}$

(3) $n+1$ 個購入したとき、景品のもらい方の総数は n^{n+1} (通り)

1種類だけ景品を2個もらうので、その総数は $n \times \frac{(n+1)!}{2!}$ (通り)

よって、求める確率は $\frac{n \times \frac{(n+1)!}{2!}}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2n^n}$

クーポン・コレクター問題 (Coupon collector's problem)

7 について、商品 m 個購入したときに丁度 n 種類の景品がそろふ確率とその期待値について以下に述べる。

準備 1 商品を m 個購入したとき、 $1, 2, 3, \dots, k$ の k 種類の景品がそろふ場合の総数を ${}_m Q_k$ とすると

$$\begin{aligned}
 {}_m Q_1 &= 1 \\
 {}_m Q_2 &= 2^m - {}_2 C_1 \cdot {}_m Q_1 \\
 {}_m Q_3 &= 3^m - {}_3 C_1 \cdot {}_m Q_1 - {}_3 C_2 \cdot {}_m Q_2 \\
 {}_m Q_4 &= 4^m - {}_4 C_1 \cdot {}_m Q_1 - {}_4 C_2 \cdot {}_m Q_2 - {}_4 C_3 \cdot {}_m Q_3 \\
 &\dots\dots \\
 {}_m Q_i &= i^m - \sum_{j=1}^{i-1} {}_i C_j \cdot {}_m Q_j
 \end{aligned} \tag{1}$$

例 1 m 個購入したときに丁度 2 種類の景品がそろふ確率を $P_2(m)$ とすると

$$P_2(m) = \frac{2 \times {}_{m-1} Q_1}{2^m} = \frac{2 \times 1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

また、景品が 2 種類そろふまで購入する商品の個数の期待値を E_2 とすると¹

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \sum_{m=2}^{\infty} m P_2(m) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \\
 &= \sum_{m=2}^{\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3 \text{ (個)}
 \end{aligned}$$

例 2 m 個購入したときに丁度 3 種類の景品がそろふ確率を $P_3(m)$ とすると

$$P_3(m) = \frac{3 \times {}_{m-1} Q_2}{3^m} = \frac{3(2^{m-1} - 2)}{3^m} = \frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}}$$

また、景品が 3 種類そろふまで購入する商品の個数の期待値を E_3 とすると

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \sum_{m=3}^{\infty} m P_3(m) = \sum_{m=3}^{\infty} m \cdot \frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}} = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}} \\
 &= \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} - 2m \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \right\} \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{11}{2} \text{ (個)}
 \end{aligned}$$

¹ $|r| < 1$ のとき $\sum_{m=2}^{\infty} m r^{m-1} = \frac{1}{(1-r)^2} - 1$

例 3 m 個購入したときに丁度 4 種類の景品がそろふ確率を $P_4(m)$ とすると

$$P_4(m) = \frac{4 \times {}_{m-1}Q_3}{4^m} = \frac{4\{3^{m-1} - 3 \cdot 1 - 3 \cdot (2^{m-1} - 2)\}}{4^m} = \frac{3^{m-1} - 3 \cdot 2^{m-1} + 3}{4^{m-1}}$$

また、景品が 4 種類そろふまで購入する商品の個数の期待値を E_4 とすると

$$\begin{aligned} E_4 &= \sum_{m=4}^{\infty} m P_4(m) = \sum_{m=4}^{\infty} m \cdot \frac{3^{m-1} - 3 \cdot 2^{m-1} + 3}{4^{m-1}} = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{3^{m-1} - 3 \cdot 2^{m-1} + 3}{4^{m-1}} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} - 3m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + 3m \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} - 1 - 3 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 \right\} + 3 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{25}{3} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

準備 2 前ページの準備 1 (1) より

$$\sum_{j=1}^i {}_i C_{j \cdot m} Q_j = i^m$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned} i = 1 \text{ のとき} & \quad {}_1 C_{1 \cdot m} Q_1 & & = 1 \\ i = 2 \text{ のとき} & \quad {}_2 C_{1 \cdot m} Q_1 + {}_2 C_{2 \cdot m} Q_2 & & = 2^m \\ i = 3 \text{ のとき} & \quad {}_3 C_{1 \cdot m} Q_1 + {}_3 C_{2 \cdot m} Q_2 + {}_3 C_{3 \cdot m} Q_3 & & = 3^m \\ & \quad \dots & & \\ i = m \text{ のとき} & \quad {}_m C_{1 \cdot m} Q_1 + {}_m C_{2 \cdot m} Q_2 + {}_m C_{3 \cdot m} Q_3 + \dots + {}_m C_{m \cdot m} Q_m = m^m \end{aligned}$$

ここで、 m 次正方行列 C_m および m 次列ベクトル q_m, v_m を

$$C_m = \begin{pmatrix} {}_1 C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_2 C_1 & {}_2 C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_3 C_1 & {}_3 C_2 & {}_3 C_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_m C_1 & {}_m C_2 & {}_m C_3 & \cdots & {}_m C_m \end{pmatrix}, \quad q_m = \begin{pmatrix} {}_m Q_1 \\ {}_m Q_2 \\ {}_m Q_3 \\ \vdots \\ {}_m Q_m \end{pmatrix}, \quad v_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^m \\ 3^m \\ \vdots \\ m^m \end{pmatrix}$$

とおくと

$$C_m q_m = v_m \quad (2)$$

が成り立つ。

さらに, $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$ に対して

$$d_{jk} = \begin{cases} (-1)^{j+k} {}_j C_k & (j \geq k) \\ 0 & (j < k) \end{cases}$$

を成分とする m 次正方行列 D_m を次のようにとる.

$$D_m = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}$$

定理 1 m 次正方行列 $C_m D_m$ は単位行列である.

証明 $C_m D_m$ の (i, k) 成分を δ_{ik} とする.

(i) $i < k$ のとき, 明らかに, $\delta_{ik} = 0$

(ii) $i = k$ のとき

$$\delta_{kk} = {}_k C_k \cdot d_{kk} = {}_k C_k \cdot (-1)^{k+k} {}_k C_k = 1$$

(iii) $i > k$ のとき

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= \sum_{j=1}^i {}_i C_j \cdot d_{jk} = \sum_{j=k}^i {}_i C_j \cdot d_{jk} \\ &= \sum_{j=k}^i {}_i C_j (-1)^{j+k} {}_j C_k = \sum_{j=k}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} \times (-1)^{j+k} \frac{j!}{k!(j-k)!} \\ &= \sum_{j=k}^i (-1)^{j+k} \frac{i!}{k!(i-k)!} \times \frac{(i-k)!}{(i-j)!(j-k)!} \\ &= (-1)^k \frac{i!}{k!(i-k)!} \sum_{j=k}^i (-1)^j \frac{(i-k)!}{(i-j)!(j-k)!} \\ &= (-1)^k \frac{i!}{k!(i-k)!} \sum_{j=0}^{i-k} (-1)^j \frac{(i-k)!}{(i-k-j)!j!} \\ &= (-1)^k {}_i C_k \sum_{j=0}^{i-k} (-1)^j {}_{i-k} C_j \\ &= (-1)^k {}_i C_k \times 0 = 0 \end{aligned}$$

証終

定理 1 により, (2) から $q_m = D_m v_m$ を得る. すなわち

$$\begin{pmatrix} {}_m Q_1 \\ {}_m Q_2 \\ {}_m Q_3 \\ \vdots \\ {}_m Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2^m \\ 3^m \\ \vdots \\ m^m \end{pmatrix}$$

したがって

$${}_m Q_n = \sum_{k=1}^n d_{nk} k^m = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} {}_n C_k \cdot k^m \quad (3)$$

が成り立つ. すなわち

$$\begin{aligned} {}_m Q_1 &= 1 \\ {}_m Q_2 &= -2 + 2^m \\ {}_m Q_3 &= 3 - 3 \cdot 2^m + 3^m \\ {}_m Q_4 &= -4 + 6 \cdot 2^m - 4 \cdot 3^m + 4^m \\ &\vdots \end{aligned}$$

また, (3) は, 商品を m 個購入したとき, n 種類の景品がそろう場合の総数であるから, $1 \leq m < n$ のとき, ${}_m Q_n = 0$ である. 実際, 上の諸式に代入すると

$${}_1 Q_2 = 0, \quad {}_1 Q_3 = {}_2 Q_3 = 0, \quad {}_1 Q_4 = {}_2 Q_4 = {}_3 Q_4 = 0, \quad \cdots$$

である.

準備 3 自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} {}_n C_k}{k} \quad (4)$$

が成り立つ.

証明 $n = 1$ のとき, 明らか.

$n > 1$ のとき, $x \neq 0$ とすると

$$\sum_{k=1}^n (x+1)^{k-1} = \frac{(x+1)^n - 1}{(x+1) - 1} = \sum_{k=1}^n {}_n C_k x^{k-1}$$

である.

$$f(x) = 1 + \sum_{k=2}^n (x+1)^{k-1} = n + \sum_{k=2}^n {}_n C_k x^{k-1}$$

とし, $\int_{-1}^0 f(x) dx$ を計算することにより, (4) を得る.

証終

例 4 m 個購入したときに丁度 n 種類の景品がそろそろ確率を $P_n(m)$ とすると

$$P_n(m) = \frac{n \times {}_{m-1}Q_{n-1}}{n^m} = \frac{{}_{m-1}Q_{n-1}}{n^{m-1}}$$

また、景品が n 種類そろそろまで購入する個数の期待値を E_n とすると

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{m=n}^{\infty} m P_n(m) = \sum_{m=n}^{\infty} m \cdot \frac{{}_{m-1}Q_{n-1}}{n^{m-1}} = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{{}_{m-1}Q_{n-1}}{n^{m-1}} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} m (-1)^{n-1+k} {}_{n-1}C_k \left(\frac{k}{n}\right)^{m-1} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} m (-1)^{2n-1-k} {}_{n-1}C_{n-k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{m-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} {}_{n-1}C_{n-k} \sum_{m=2}^{\infty} m \left(\frac{n-k}{n}\right)^{m-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} {}_{n-1}C_{n-k} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{n-k}{n}\right)^2} - 1 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \left(\frac{n \cdot {}_n C_k}{k} - {}_{n-1}C_{k-1} \right) \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} {}_n C_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} {}_{n-1}C_{k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} {}_n C_k}{k} + (-1)^{n-1} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} {}_{n-1}C_{k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} {}_n C_k}{k} + n \cdot \frac{(-1)^{n-1} {}_n C_n}{n} \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} {}_n C_k}{k} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Coupon collector's problem

n 種類の景品すべてがそろそろまで購入する商品の個数の期待値 E_n は

$$E_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

実際 $E_2 = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$, $E_3 = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2}$, $E_4 = 4 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{3}$



8 (1) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$ より

$$\int_{-1}^1 k(1-x^2) dx = 2k \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}k = 1 \quad \text{よって} \quad k = \frac{3}{4}$$

また $E(X) = \int_{-1}^1 xf(x) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (x-x^3) dx = 0$

- (2) (a) 標本平均 \bar{X} は、100 を大きい数とみなせるので、近似的に次の標準正規分布に従う。

$$N\left(m, \frac{10^2}{100}\right) \quad \text{すなわち} \quad N(m, 1)$$

ゆえに、 $Z = \frac{\bar{X} - m}{1}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$P(Z > 1.96) = 0.025 \text{ から}$$

$$P(|Z| \leq 1.96) = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

したがって $P(|\bar{X} - m| \leq 1.96) = 0.95$

$$\text{ゆえに} \quad P(\bar{X} - 1.96 \leq m \leq \bar{X} + 1.96) = 0.95$$

よって、求める信頼区間は $[\bar{X} - 1.96, \bar{X} + 1.96]$

- (b) 標本平均 \bar{X} は、正規分布 $N\left(m, \frac{10^2}{n}\right)$ に従う。

$$P(Z > 2.58) = 0.005 \text{ から}$$

$$P(|Z| \leq 2.58) = 1 - 2 \times 0.005 = 0.99$$

したがって $P\left(\left|\frac{\bar{X} - m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right| \leq 2.58\right) = 0.99$

$$\text{ゆえに} \quad P\left(\bar{X} - 2.58 \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 2.58 \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$$

信頼区間 $\left[\bar{X} - 2.58 \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 2.58 \frac{10}{\sqrt{n}}\right]$ が、(a) で求めた信頼区間より小さくするには

$$2.58 \frac{10}{\sqrt{n}} < 1.96 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{n} > \frac{2.58}{1.96} \times 10 \doteq 1.32 \times 10 = 13.2$$

したがって $n > 13.2^2 = 174.24$

よって、 n を **175** 以上にとればよい。 ■

9 (1) 求める面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_1^q p \log x \, dx = p \left[x \log x - x \right]_1^q = p(q \log q - q + 1)$$

(2) 求める面積を S_2 とすると

$$S_2 = \int_e^{e^2} (3 \log x - \log x) dx = 2 \left[x(\log x - 1) \right]_e^{e^2} = 2e^2$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_e^{e^2} \{(3 \log x)^2 - (\log x)^2\} dx \\ &= 8\pi \int_e^{e^2} (\log x)^2 dx \\ &= 8\pi \left[x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_e^{e^2} \\ &= 8\pi(2e^2 - e) \end{aligned}$$

