平成 24 年度　鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・共同獣医・教育学部
平成 24 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・農・水産・共同獣医学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ 数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{9}$ の 2 題から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) KADAI という語の 5 文字を並べて得られる順列のうち，2 つの A が隣り合わないものの総数を求めよ．

(2) $x^2 - 9x + 14 > 0$ を満たさない整数 x で，3 の倍数でないものをすべて求めよ．

(3) 三角形 ABC において，辺 AB の中点を D，辺 AC の中点を E とする．
BE $=$ CD ならば AB $=$ AC であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ x の関数 $f(x) = 8^x + 8^{-x} - 9(4^x + 4^{-x}) + 27(2^x + 2^{-x}) - 26$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく．$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ．

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ．

(3) t が (2) で求めた範囲を動くとき，関数 $y = g(t)$ の増減を調べよ．

(4) $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に互いに異なる 3 点 O，A，B があり，それらは同一直線上にはないものとする．OA $= 2$，OB $= 3$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b} = t$ とおく．∠AOB の二等分線と線分 AB との交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，∠AOB と OC を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ 次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) n を自然数とする．x の関数 $f(x) = x^n e^{1-x}$ について，$0 < x < 1$ ならば $0 < f(x) < 1$ であることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ とおくとき，I_1 を求めよ．さらに，I_{n+1} と I_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) (2) の I_n に対して $a_n = \dfrac{I_n}{n!}$ とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = a_1 - a_n$ であることを示せ．

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = e - 1$ であることを示せ．

$\boxed{\textbf{5}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ と自然数 n について，次の各問いに答えよ．

(1) 次の等式を満たす α，β，p，q を求めよ．ただし，$\alpha < \beta$ とする．

$$A\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた p に対して $A^n\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(3) A^n を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ 極方程式 $r = \dfrac{a}{2+\cos\theta}$ で与えられる 2 次曲線がある．ただし，a は正の定数とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) この 2 次曲線を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表せ．

(2) (1) で求めた 2 次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動した 2 次曲線を C で表す．C を直交座標 x，y の方程式で表せ．また，この 2 次曲線 C は x 軸と 2 点 A，B で交わる．この 2 点 A，B の座標を求めよ．ただし，B の x 座標は正とする．

(3) (2) で求めた 2 次曲線 C 上の x 軸上にない点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から x 軸に下ろした垂線を PH とする．さらに P と x 軸に関して対称な点を Q とするとき，次の値は定数であることを証明せよ．

$$\frac{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH}}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}}$$

7 1 個買うごとに景品を 1 個もらえる商品がある．景品は全部で n 種類あり，それぞれ 1 から n までの番号がつけてある．また，1 から n までの数字が 1 つずつ記入された n 枚のカードがある．n 枚のカードは外から数字が見えない箱の中に入れてあり，購入した商品 1 個ごとに箱の中から 1 枚引いて数字を確認して景品と交換する．引いたカードは，そのつど箱に戻すものとする．もらえる景品の番号は，引いたカードの数字と同じ番号のものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) この商品を m 個購入したとき，番号 1 の景品が少なくとも 1 個もらえる確率を求めよ．ただし，$m > n$ とする．

(2) この商品を n 個購入したとき，全種類の景品がそろわない確率を求めよ．

(3) この商品を $n+1$ 個購入したとき，全種類の景品がもらえる確率を求めよ．

8 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.025, \quad P(Z > 2.58) = 0.005, \quad \frac{2.58}{1.96} \fallingdotseq 1.32$$

であるとして，次の各問いに答えよ．

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，その確率密度関数が $f(x) = k(1 - x^2)$ で与えられている．このとき，定数 k の値と X の平均を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 10 の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．

(a) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間を求めよ．

(b) 母平均 m を信頼度 99%の信頼区間を用いて区間推定するとき，信頼区間の幅を (a) で求めた幅より小さくするためには，標本の大きさ n をいくつ以上にとればよいか求めよ．

9 e を自然数の底とし，$\log x$ を自然対数とする．次の各問いに答えよ．

(1) p，q を $p > 0$，$q > 1$ を満たす定数とする．曲線 $y = p\log x$ と直線 $x = q$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を p，q を使って表せ．

(2) 2 つの曲線 $y = \log x$，$y = 3\log x$ と 2 つの直線 $x = e$，$x = e^2$ で囲まれた部分を D とする．D の面積を求めよ．

(3) (2) で与えられた D を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) KADAIの5文字の並べ方の総数は $\dfrac{5!}{2!}=60$ (通り)

その中で2つのAが隣り合う並べ方の総数は $4!=24$ (通り)

したがって，求める場合の総数は $60-24=\mathbf{36}$ (通り)

(2) $x^2-9x+14>0$ を満たさない整数は，$x^2-9x+14\leqq 0$ を満たす整数．

ゆえに，$2\leqq x\leqq 7$ を満たす整数で，3の倍数でないものは **2，4，5，7**

(3) BE，CDは，△ABCの中線であるから，その交点(重心)をGとすると

$$\mathrm{GB}=\frac{2}{3}\mathrm{BE},\quad \mathrm{GE}=\frac{1}{3}\mathrm{BE},\quad \mathrm{GC}=\frac{2}{3}\mathrm{CD},\quad \mathrm{GD}=\frac{1}{3}\mathrm{CD}$$

$\angle\mathrm{BGD}=\angle\mathrm{CGE}$ であるから，$\mathrm{BE}=\mathrm{CD}$ のとき，$\triangle\mathrm{BGD}\equiv\triangle\mathrm{CGE}$

ゆえに　$\mathrm{BD}=\mathrm{CE}$　よって　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $t=2^x+2^{-x}$ より

$$8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})=t^3-3t$$
$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$$

したがって　$g(t)=(t^3-3t)-9(t^2-2)+27t-26$

$\qquad\qquad\qquad =\boldsymbol{t^3-9t^2+24t-8}$

(2) 相加平均・相乗平均の関係により

$$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2 \quad よって \quad \boldsymbol{t\geqq 2}$$

(3) $g(t)=t^3-9t^2+24t-8$ を微分すると

$$g'(t)=3t^2-18t+24$$
$$=3(t-2)(t-4)$$

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	12	↘	8	↗

$g(t)$ の増減は右の表のようになる．

(4) (3)の結果から，$f(x)$ の最小値は **8**

このとき，$t=4$ より

$$2^x+2^{-x}=4 \quad ゆえに \quad (2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$$

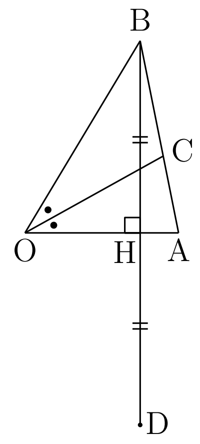
$x\geqq 0$ より，$2^x\geqq 1$ であるから，最小値を与える x の値は

$$2^x=2+\sqrt{3} \quad よって \quad \boldsymbol{x=\log_2(2+\sqrt{3})}$$

3 (1) 直線 OC は，∠AOB の二等分線であるから

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=2:3$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}}$



(2) B から直線 OA に垂線 BH を引く．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b}-k\vec{a}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$ であるから

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}-k\vec{a})=0 \quad ゆえに \quad \vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{a}|^2=0$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=t$，$|\vec{a}|=2$ より　$t-k\cdot 2^2=0$　ゆえに　$k=\dfrac{t}{4}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HD}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(-\overrightarrow{\mathrm{HB}})=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\cdot\frac{t}{4}\vec{a}-\vec{b}=\boldsymbol{\frac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ であるから

$$\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\cdot\left(\frac{t}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0 \quad ゆえに \quad (3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(t\vec{a}-2\vec{b})=0$$

したがって　$3t|\vec{a}|^2+(2t-6)\vec{a}\cdot\vec{b}-4|\vec{b}|^2=0$

$$3t\cdot 2^2+(2t-6)t-4\cdot 3^2=0$$

整理すると　$(t-3)(t+6)=0$　ゆえに　$t=3,-6$

(i) $t=3$ のとき　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

(ii) $t=-6$ のとき　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{2\cdot 3}=-1$　ゆえに　$\angle\mathrm{AOB}=\pi$

条件により，O，A，B は一直線上にないので，不適．

よって　$\boldsymbol{\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}}$

また　$\mathrm{OC}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{1}{5}|3\vec{a}+2\vec{b}|=\dfrac{1}{5}\sqrt{9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{9\cdot 2^2+12\cdot 3+4\cdot 3^2}=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=x^ne^{1-x}$ を微分すると　$f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{1-x}$

$0<x<1$ において，$f'(x)>0$ であるから

$$f(0)<f(x)<f(1) \qquad \text{よって} \qquad 0<f(x)<1$$

(2)
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{1-x}\,dx = -\int_0^1 x(e^{1-x})'\,dx \\ &= -\Big[\ xe^{1-x}\ \Big]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx \\ &= -1+\Big[\ -e^{1-x}\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{e-2} \end{aligned}$$

また　$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx = -\int_0^1 x^{n+1}(e^{1-x})'\,dx$

$$\begin{aligned} &= -\Big[\ x^{n+1}e^{1-x}\ \Big]_0^1 + \int_0^1 (n+1)x^ne^{1-x}\,dx \\ &= -1+(n+1)I_n \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{I_{n+1}=(n+1)I_n-1}$

(3) $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$ の両辺を $(n+1)!$ で割ると

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{I_n}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}=a_n-\frac{1}{(n+1)!}$$

$n\geqq 2$ のとき $a_{n-1}-a_n=\dfrac{1}{n!}$ であるから

$$\sum_{k=2}^{n}(a_{k-1}-a_k)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{よって} \quad a_1-a_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

(4) (3) の結果から　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=1+a_1-a_n$

また　$a_1=\dfrac{I_1}{1!}=e-2$

$0<f(x)<1$ および $I_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ から　$0<I_n<1$

ゆえに　$0<a_n<\dfrac{1}{n!}$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1+(e-2)-0=e-1$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\vec{v}=\lambda\vec{v}\cdots(*)$ とすると

$(A-\lambda E)\vec{v}=\vec{0}$　すなわち　$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad\cdots(**)$

$A-\lambda E$ が正則であれば，$\vec{v}=\vec{0}$ となり条件に反する．
ゆえに，$\det(A-\lambda E)=0$ であるから

$$(1-\lambda)(4-\lambda)-(-2)\cdot 1=0\quad \text{これを解いて}\quad \lambda=2,\ 3$$

$\alpha<\beta$ に注意して　$\alpha=2$，$\beta=3$

i) $(**)$ に $\lambda=2$，$x=p$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad p=-2$$

ii) $(**)$ に $\lambda=3$，$x=q$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad \text{ゆえに}\quad q=-1$$

よって　$\boldsymbol{\alpha=2,\ \beta=3,\ p=-2,\ q=-1}$

(2) $(*)$ に $\lambda=2$，$x=-2$ を代入すると　$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって　$A^n\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{-2^{n+1}} \\ \boldsymbol{2^n} \end{pmatrix}$

(3) (∗) に $\lambda = 3$，$x = -1$ を代入すると　$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって　$A^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n \\ 3^n \end{pmatrix}$

これと (2) の結果から　$A^n\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}$

よって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -3^n & -2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & -2\cdot 3^n + 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n & 2\cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

6 (1) $r = \dfrac{a}{2+\cos\theta}$ より　$2r + r\cos\theta = a$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$，$r\cos\theta = x$ を代入すると

$$2\sqrt{x^2+y^2} + x = a$$

$2\sqrt{x^2+y^2} = a - x$ の両辺を平方すると

$$4(x^2+y^2) = (a-x)^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{3x^2 + 4y^2 + 2ax - a^2 = 0}$$

(2) (1) で求めた 2 次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動すると

$$3\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + 4y^2 + 2a\left(x - \frac{a}{3}\right) - a^2 = 0$$

整理すると　$\boldsymbol{3x^2 + 4y^2 - \dfrac{4}{3}a^2 = 0}$

2 次曲線 C と x 軸との交点は，上式に $y = 0$ を代入して

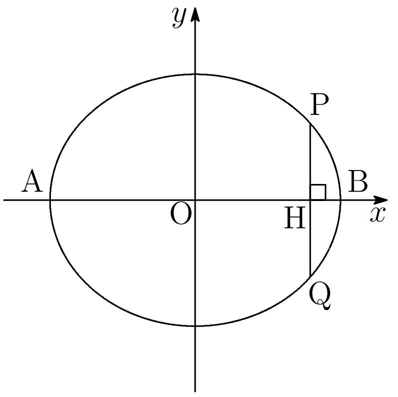
$$3x^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\frac{2}{3}a$$

2 つの交点 A，B について，B の x 座標は正であるから

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{-\frac{2}{3}a,\ 0}\right),\ \mathbf{B}\left(\boldsymbol{\frac{2}{3}a,\ 0}\right)$$

(3) $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は x 軸上にないから　$\beta \neq 0$

また，$\mathrm{Q}(\alpha, -\beta)$，$\mathrm{H}(\alpha,\ 0)$ より



$$\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH} = \mathrm{PH}^2 = \beta^2$$

$$\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH} = \left(\alpha + \frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a - \alpha\right) = \frac{4}{9}a^2 - \alpha^2$$

P は C 上の点であるから

$$3\alpha^2 + 4\beta^2 - \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad ゆえに \quad \frac{4}{9}a^2 - \alpha^2 = \frac{4}{3}\beta^2$$

よって　$$\frac{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH}}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}} = \frac{\beta^2}{\frac{4}{9}a^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\frac{4}{3}\beta^2} = \frac{3}{4}$$

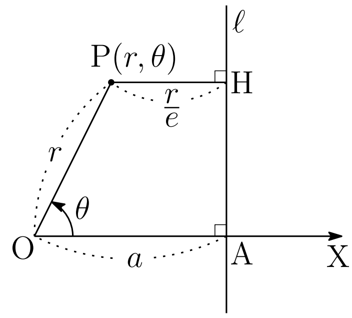
2 次曲線を表す極方程式

始線 OX 上の点 A$(a,\ 0)$ を通り，始線に垂直な直線を ℓ とする．点 P$(r,\ \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

の値が一定であるような点 P の軌跡は，2 次曲線になる．

右の図において，線分 PH の長さを 2 通りに表すと



$$\mathrm{PH} = \frac{r}{e},\quad \mathrm{PH} = a - r\cos\theta$$

よって　$\dfrac{r}{e} = a - r\cos\theta$

ゆえに　$r = \dfrac{ea}{1 + e\cos\theta}$　$\cdots$①

① が点 P の軌跡を表す極方程式である．

① の表す曲線は，e のとる値によって，次のような 2 次曲線に分類される．

この e の値を離心率という．

［1］ $0 < e < 1$ のとき　　O を焦点の 1 つとする楕円

［2］ $e = 1$ のとき　　O を焦点，ℓ を準線とする放物線

［3］ $e > 1$ のとき　　O を焦点の 1 つとする双曲線

極方程式 $r = \dfrac{a}{2+\cos\theta} = \dfrac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$ から，離心率 $e = \frac{1}{2}$ の楕円である．

A$(a,\ 0)$ とし，楕円の長軸上の頂点は，OA を $e : 1$ に内分および外分する点であるから，それぞれ，B，C とすると，B$(\frac{1}{3}a,\ 0)$，C$(-a,\ 0)$．

楕円の中心 (BC の中点) を M とすると，M$(-\frac{1}{3}a,\ 0)$．楕円の短軸は $x = -\frac{1}{3}a$ であるから，短軸上の頂点を N$(-\frac{1}{3}a,\ b)$ とすると，ON $=$ MB より

$$\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + b^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = \frac{1}{3}a^2$$

よって，与えられた極方程式を直交座標 $(x,\ y)$ で表すと

$$\frac{\left(x+\frac{1}{3}a\right)^2}{\frac{4}{9}a^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}a^2} = 1$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 番号 1 の景品をもらえない確率は　$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^m$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^m}$

(2) 全種類の景品がそろう確率は　$\dfrac{n!}{n^n}$

求めるのはこの余事象の確率であるから　$\boldsymbol{1-\dfrac{n!}{n^n}}$

(3) $n+1$ 個購入したとき，景品のもらい方の総数は　n^{n+1} (通り)

1 種類だけ景品を 2 個もらうので，その総数は　$n\times\dfrac{(n+1)!}{2!}$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{n\times\dfrac{(n+1)!}{2!}}{n^{n+1}}=\boldsymbol{\dfrac{(n+1)!}{2n^n}}$

クーポン・コレクター問題 (Coupon collector's problem)

$\boxed{\mathbf{7}}$ について，商品 m 個購入したときに丁度 n 種類の景品がそろう確率とその期待値について以下に述べる．

準備 1 商品を m 個購入したとき，$1, 2, 3, \cdots, k$ の k 種類の景品がそろう場合の総数を ${}_m\mathrm{Q}_k$ とすると

$$\begin{aligned}
{}_m\mathrm{Q}_1 &= 1 \\
{}_m\mathrm{Q}_2 &= 2^m - {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_m\mathrm{Q}_1 \\
{}_m\mathrm{Q}_3 &= 3^m - {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_m\mathrm{Q}_1 - {}_3\mathrm{C}_2 \cdot {}_m\mathrm{Q}_2 \\
{}_m\mathrm{Q}_4 &= 4^m - {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_m\mathrm{Q}_1 - {}_4\mathrm{C}_2 \cdot {}_m\mathrm{Q}_2 - {}_4\mathrm{C}_3 \cdot {}_m\mathrm{Q}_3 \\
&\cdots\cdots \\
{}_m\mathrm{Q}_i &= i^m - \sum_{j=1}^{i-1} {}_i\mathrm{C}_j \cdot {}_m\mathrm{Q}_j \qquad (1)
\end{aligned}$$

例 1 m 個購入したときに丁度 2 種類の景品がそろう確率を $P_2(m)$ とすると

$$P_2(m) = \frac{2 \times {}_{m-1}\mathrm{Q}_1}{2^m} = \frac{2 \times 1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

また，景品が 2 種類そろうまで購入する商品の個数の期待値を E_2 とすると [1]

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{m=2}^{\infty} m P_2(m) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3 \quad (\text{個})
\end{aligned}$$

例 2 m 個購入したときに丁度 3 種類の景品がそろう確率を $P_3(m)$ とすると

$$P_3(m) = \frac{3 \times {}_{m-1}\mathrm{Q}_2}{3^m} = \frac{3(2^{m-1} - 2)}{3^m} = \frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}}$$

また，景品が 3 種類そろうまで購入する商品の個数の期待値を E_3 とすると

$$\begin{aligned}
E_3 &= \sum_{m=3}^{\infty} m P_3(m) = \sum_{m=3}^{\infty} m \cdot \frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}} = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{2^{m-1} - 2}{3^{m-1}} \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} - 2m \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \right\} \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個})
\end{aligned}$$

---

[1] $|r| < 1$ のとき $\displaystyle\sum_{m=2}^{\infty} m r^{m-1} = \frac{1}{(1-r)^2} - 1$

例 3 m 個購入したときに丁度 4 種類の景品がそろう確率を $P_4(m)$ とすると

$$P_4(m) = \frac{4 \times {}_{m-1}\mathrm{Q}_3}{4^m} = \frac{4\{3^{m-1} - 3{\cdot}1 - 3{\cdot}(2^{m-1} - 2)\}}{4^m} = \frac{3^{m-1} - 3{\cdot}2^{m-1} + 3}{4^{m-1}}$$

また，景品が 4 種類そろうまで購入する商品の個数の期待値を E_4 とすると

$$\begin{aligned} E_4 &= \sum_{m=4}^{\infty} mP_4(m) = \sum_{m=4}^{\infty} m{\cdot}\frac{3^{m-1} - 3{\cdot}2^{m-1} + 3}{4^{m-1}} = \sum_{m=2}^{\infty} m{\cdot}\frac{3^{m-1} - 3{\cdot}2^{m-1} + 3}{4^{m-1}} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ m\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} - 3m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + 3m\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \right\} \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} - 1 - 3\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right\} + 3\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1\right\} = \frac{25}{3} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

準備 2 前ページの準備 1 (1) より

$$\sum_{j=1}^{i} {}_i\mathrm{C}_j{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_j = i^m$$

を得る．したがって

$$\begin{array}{lll} i = 1 \text{ のとき} & {}_1\mathrm{C}_1{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_1 & = 1 \\ i = 2 \text{ のとき} & {}_2\mathrm{C}_1{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_1 + {}_2\mathrm{C}_2{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_2 & = 2^m \\ i = 3 \text{ のとき} & {}_3\mathrm{C}_1{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_1 + {}_3\mathrm{C}_2{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_2 + {}_3\mathrm{C}_3{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_3 & = 3^m \\ & \cdots & \\ i = m \text{ のとき} & {}_m\mathrm{C}_1{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_1 + {}_m\mathrm{C}_2{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_2 + {}_m\mathrm{C}_3{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_3 + \quad \cdots + {}_m\mathrm{C}_m{\cdot}{}_m\mathrm{Q}_m & = m^m \end{array}$$

ここで，m 次正方行列 C_m および m 次列ベクトル q_m，v_m を

$$C_m = \begin{pmatrix} {}_1\mathrm{C}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_2\mathrm{C}_1 & {}_2\mathrm{C}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ {}_3\mathrm{C}_1 & {}_3\mathrm{C}_2 & {}_3\mathrm{C}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}_m\mathrm{C}_1 & {}_m\mathrm{C}_2 & {}_m\mathrm{C}_3 & \cdots & {}_m\mathrm{C}_m \end{pmatrix}, \quad q_m = \begin{pmatrix} {}_m\mathrm{Q}_1 \\ {}_m\mathrm{Q}_2 \\ {}_m\mathrm{Q}_3 \\ \vdots \\ {}_m\mathrm{Q}_m \end{pmatrix}, \quad v_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 2^m \\ 3^m \\ \vdots \\ m^m \end{pmatrix}$$

とおくと

$$C_m q_m = v_m \tag{2}$$

が成り立つ．

さらに，$1 \leqq j \leqq n$, $1 \leqq k \leqq n$ に対して

$$d_{jk} = \begin{cases} (-1)^{j+k}{}_j\mathrm{C}_k & (j \geqq k) \\ 0 & (j < k) \end{cases}$$

を成分とする m 次正方行列 D_m を次のようにとる．

$$D_m = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}$$

定理 1 m 次正方行列 C_mD_m は単位行列である．

証明 C_mD_m の (i,k) 成分を δ_{ik} とする．

(i) $i < k$ のとき，明らかに，$\delta_{ik} = 0$

(ii) $i = k$ のとき

$$\delta_{kk} = {}_k\mathrm{C}_k \cdot d_{kk} = {}_k\mathrm{C}_k \cdot (-1)^{k+k}{}_k\mathrm{C}_k = 1$$

(iii) $i > k$ のとき

$$\begin{aligned}
\delta_{ik} &= \sum_{j=1}^{i} {}_i\mathrm{C}_j \cdot d_{jk} = \sum_{j=k}^{i} {}_i\mathrm{C}_j \cdot d_{jk} \\
&= \sum_{j=k}^{i} {}_i\mathrm{C}_j (-1)^{j+k}{}_j\mathrm{C}_k = \sum_{j=k}^{i} \frac{i!}{j!(i-j)!} \times (-1)^{j+k} \frac{j!}{k!(j-k)!} \\
&= \sum_{j=k}^{i} (-1)^{j+k} \frac{i!}{k!(i-k)!} \times \frac{(i-k)!}{(i-j)!(j-k)!} \\
&= (-1)^k \frac{i!}{k!(i-k)!} \sum_{j=k}^{i} (-1)^j \frac{(i-k)!}{(i-j)!(j-k)!} \\
&= (-1)^k \frac{i!}{k!(i-k)!} \sum_{j=0}^{i-k} (-1)^j \frac{(i-k)!}{(i-k-j)!j!} \\
&= (-1)^k {}_i\mathrm{C}_k \sum_{j=0}^{i-k} (-1)^j {}_{i-k}\mathrm{C}_j \\
&= (-1)^k {}_i\mathrm{C}_k \times 0 = 0
\end{aligned}$$

証終

定理 1 により，(2) から $q_m = D_m v_m$ を得る．すなわち

$$\begin{pmatrix} {}_m\mathrm{Q}_1 \\ {}_m\mathrm{Q}_2 \\ {}_m\mathrm{Q}_3 \\ \vdots \\ {}_m\mathrm{Q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2^m \\ 3^m \\ \vdots \\ m^m \end{pmatrix}$$

したがって

$$ {}_m\mathrm{Q}_n = \sum_{k=1}^{n} d_{nk} k^m = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} {}_n\mathrm{C}_k \cdot k^m \tag{3}$$

が成り立つ．すなわち

$$\begin{aligned} {}_m\mathrm{Q}_1 &= 1 \\ {}_m\mathrm{Q}_2 &= -2 + 2^m \\ {}_m\mathrm{Q}_3 &= 3 - 3\cdot 2^m + 3^m \\ {}_m\mathrm{Q}_4 &= -4 + 6\cdot 2^m - 4\cdot 3^m + 4^m \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

また，(3) は，商品を m 個購入したとき，n 種類の景品がそろう場合の総数であるから，$1 \leqq m < n$ のとき，${}_m\mathrm{Q}_n = 0$ である．実際，上の諸式に代入すると

$${}_1\mathrm{Q}_2 = 0, \quad {}_1\mathrm{Q}_3 = {}_2\mathrm{Q}_3 = 0, \quad {}_1\mathrm{Q}_4 = {}_2\mathrm{Q}_4 = {}_3\mathrm{Q}_4 = 0, \quad \cdots$$

である．

準備 3 自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} {}_n\mathrm{C}_k}{k} \tag{4}$$

が成り立つ．

証明 $n = 1$ のとき，明らか．

$n > 1$ のとき，$x \neq 0$ とすると

$$\sum_{k=1}^{n} (x+1)^{k-1} = \frac{(x+1)^n - 1}{(x+1) - 1} = \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$$

である．

$$f(x) = 1 + \sum_{k=2}^{n} (x+1)^{k-1} = n + \sum_{k=2}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{k-1}$$

とし，$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ を計算することにより，(4) を得る．　証終

例 4 m 個購入したときに丁度 n 種類の景品がそろう確率を $P_n(m)$ とすると

$$P_n(m)=\frac{n\times{}_{m-1}\mathrm{Q}_{n-1}}{n^m}=\frac{{}_{m-1}\mathrm{Q}_{n-1}}{n^{m-1}}$$

また，景品が n 種類そろうまで購入する個数の期待値を E_n とすると

$$\begin{aligned}
E_n&=\sum_{m=n}^{\infty}mP_n(m)=\sum_{m=n}^{\infty}m\cdot\frac{{}_{m-1}\mathrm{Q}_{n-1}}{n^{m-1}}=\sum_{m=2}^{\infty}m\cdot\frac{{}_{m-1}\mathrm{Q}_{n-1}}{n^{m-1}}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}m(-1)^{n-1+k}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{k}{n}\right)^{m-1}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}m(-1)^{2n-1-k}{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{m-1}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k}\sum_{m=2}^{\infty}m\left(\frac{n-k}{n}\right)^{m-1}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-k}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{n-k}{n}\right)^2}-1\right\}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\left(\frac{n\cdot{}_n\mathrm{C}_k}{k}-{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)\\
&=n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\\
&=n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}+(-1)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\\
&=n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}+n\cdot\frac{(-1)^{n-1}{}_n\mathrm{C}_n}{n}\\
&=n\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Coupon collector's problem

n 種類の景品すべてがそろうまで購入する商品の個数の期待値 E_n は

$$E_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

実際　$E_2=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3,\quad E_3=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{2},\quad E_4=4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{3}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ より

$$\int_{-1}^{1} k(1-x^2)\,dx = 2k\left[\,x - \frac{x^3}{3}\,\right]_0^1 = \frac{4}{3}k = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{3}{4}}$$

また　$E(X) = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x - x^3)\,dx = \mathbf{0}$

(2) (a) 標本平均 $\overline{X}$ は，100 を大きい数とみなせるので，近似的に次の標準正規分布に従う．

$$N\left(m,\ \frac{10^2}{100}\right) \quad \text{すなわち} \quad N(m,\ 1)$$

ゆえに，$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{1}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．
$P(Z > 1.96) = 0.025$ から

$$P(|Z| \leqq 1.96) = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$$

したがって　$P(|\overline{X} - m| \leqq 1.96) = 0.95$
ゆえに　$P(\overline{X} - 1.96 \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96) = 0.95$
よって，求める信頼区間は　$\boldsymbol{[\overline{X} - 1.96,\ \overline{X} + 1.96]}$

(b) 標本平均 $\overline{X}$ は，正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{10^2}{n}\right)$ に従う．
$P(Z > 2.58) = 0.005$ から

$$P(|Z| \leqq 2.58) = 1 - 2 \times 0.005 = 0.99$$

したがって　$P\left(\left|\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right| \leqq 2.58\right) = 0.99$

ゆえに　$P\left(\overline{X} - 2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$

信頼区間 $\left[\overline{X} - 2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right]$ が，(a) で求めた信頼区間より小さくするには

$$2.58\frac{10}{\sqrt{n}} < 1.96 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{n} > \frac{2.58}{1.96} \times 10 \fallingdotseq 1.32 \times 10 = 13.2$$

したがって　$n > 13.2^2 = 174.24$
よって，n を **175** 以上にとればよい．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 求める面積を S_1 とすると

$$S_1 = \int_1^q p\log x\,dx = p\Big[\ x\log x - x\ \Big]_1^q = \boldsymbol{p(q\log q - q + 1)}$$

(2) 求める面積を S_2 とすると

$$S_2 = \int_e^{e^2} (3\log x - \log x)dx = 2\Big[\ x(\log x - 1)\ \Big]_e^{e^2} = \boldsymbol{2e^2}$$

(3) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_e^{e^2} \left\{(3\log x)^2 - (\log x)^2\right\} dx \\ &= 8\pi\int_e^{e^2} (\log x)^2 dx \\ &= 8\pi\Big[\ x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\ \Big]_e^{e^2} \\ &= \boldsymbol{8\pi(2e^2 - e)} \end{aligned}$$