平成23年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成23年2月25日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ から1問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・農・水産学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{9}$ の2題から1問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $0 < a < 1$ とする．次の不等式を解け．

$$\log_a(2x-1) + \log_a(x-1) \leqq 0$$

(2) $(2x-y+z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ．

(3) 三角形の3辺の長さ a，b，c の比が $a:b:c = 7:6:5$ であり，面積が $12\sqrt{6}$ のとき，a の値を求めよ．

(4) m と n を正の整数とする．n を m で割ると7余り，$n+13$ は m で割り切れるとき，m の値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $0 \leqq x \leqq 1$ とする．このとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|\, dt$$

と定義する．次の各問いに答えよ．

(1) t の関数 $g(t) = |t^2 - xt|$ のグラフの概形をかけ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 四角形 ABCD に対して次の ① と ② が成り立つとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}} \qquad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}} \qquad \cdots ②$$

このとき，四角形 ABCD は向かい合う辺の長さが等しくなる (すなわち平行四辺形になる) ことを示せ．

4 $f(x)$ は数直線上の連続関数で，次の条件 (i) と (ii) をみたすものとする．

(i) $f(x)$ は周期 1 の周期関数，すなわち，すべての x で $f(x+1)=f(x)$ が成り立つ．

(ii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

次の各問いに答えよ．

(1) 条件 (i) と (ii) をみたす恒等的に 0 でない連続関数 $f(x)$ の例を 1 つ挙げよ．

(2) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ とおくと，$F(x)$ も周期 1 の周期関数であることを示せ．

(3) $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$\dfrac{d}{dx}F(nx)$ を f を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1 xf(nx)\,dx \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定める．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ．

5 次の行列 A を考える．

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ．

(1) 2×2 行列 X に対して，$E-X$ が逆行列を持つとき

$$E+X+X^2+\cdots+X^n=(E-X^{n+1})(E-X)^{-1}$$

が成立することを示せ．E は 2×2 の単位行列である．

(2) A^2 と A^3 を計算せよ．さらに A^{100} と A^{101} を計算せよ．

(3) $E+A+A^2+\cdots+A^{100}$ を計算せよ．

6 曲線 C は極方程式 $r=2\cos\theta$ で定義されているとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 C を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表し，さらに図示せよ．

(2) 点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き k の直線を考える．この直線が曲線 C と 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(3) (2) のもとで，2 交点の中点の軌跡を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を考える．この試行で，大きいさいころの出た目を X，小さいさいころの出た目を Y とする．$T = 2X - Y$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) 確率 $P(T = 6)$，$P(T \geqq 0)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$，平均 $E(T)$ を求めよ．

(3) $V(aT) = 25$ となる定数 a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 確率変数 X は 0 以上 3 以下の値をとり，その確率密度関数 $f(x)$ は次で与えられているとする．このとき，定数 k，平均 $E(X)$ を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leqq x < 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{4}x + k & (1 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) Z を標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数とする．また，任意の x $(x \geqq 0)$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x) = P(0 \leqq Z \leqq x)$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

(a) 確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ を関数 g で表せ．ただし，a と b は定数で $a < b$ とする．

(b) 母平均 50．母標準偏差 $3\sqrt{10}$ の母集団から大きさ 10 の標本を抽出するとき，標本平均が 41.0 以上 48.5 以下になる確率を関数 g で表せ．

(c) $0 < p < 1$ とし，l_p は $g(l_p) = \dfrac{p}{2}$ をみたすものとする．母分散 25 の母集団から大きさ 20 の標本を抽出したところ，標本平均が 45 であった．母平均 m に対する信頼度 $100p\%$ の信頼区間の区間幅を l_p を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \cos x + \int_0^{2\pi} f(y)\sin(x - y)\,dy$$

をみたすものとする．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は

$$f(x) = a\sin x + b\cos x$$

の形に表されることを示せ．ただし，a と b は定数である．

(2) $f(x)$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 真数は正であるから

$$2x-1>0 \quad \text{かつ} \quad x-1>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

与えられた不等式から　$\log_a(2x-1)(x-1) \geqq \log_a 1$

底 a は $0<a<1$ であるから　$(2x-1)(x-1) \geqq 1$

$$x(2x-3) \geqq 0$$

① に注意して　$\boldsymbol{x \geqq \dfrac{3}{2}}$

(2) $(2x-y+z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の項は

$$\frac{8!}{2!3!3!}(2x)^2(-y)^3z^3 = -2240x^2y^3z^3$$

よって，$x^2y^3z^3$ の係数は　$\boldsymbol{-2240}$

(3) $a:b:c=7:6:5$ より

$$a=7k,\quad b=6k,\quad c=5k$$

とおくと (k は正の定数)，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(6k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 6k\cdot 5k} = \frac{1}{5}$$

ゆえに　$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\dfrac{1}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\dfrac{1}{2}bc\sin A = 12\sqrt{6}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 6k\cdot 5k \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 12\sqrt{6} \quad \text{これを解いて} \quad k=\sqrt{2}$$

よって　$a = \boldsymbol{7\sqrt{2}}$

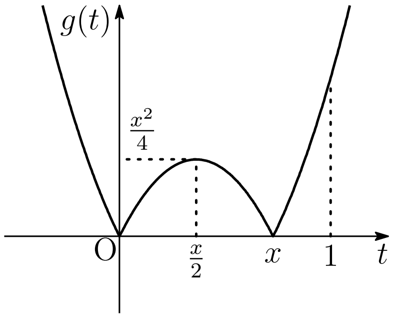
(4) n を m で割った商を q とすると　$n=mq+7$ $(m>7)$

したがって　$(n+13)-mq=20$

上式の左辺が m で割り切れるから，$m>7$ に注意して　$\boldsymbol{m=10,\ 20}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $g(t) = |t(t-x)| = \begin{cases} t^2 - xt & (t \leqq 0,\ x \leqq t) \\ -t^2 + xt & (0 < x < t) \end{cases}$

したがって，グラフの概形は，次のようになる．



(2) t の関数 $t^2 - xt$ の原始関数の 1 つを $G(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{xt^2}{2}$ とすると，

$0 \leqq x \leqq 1$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 |t^2 - xt| = -\int_0^x (t^2 - xt)dt + \int_x^1 (t^2 - xt)dt \\ &= -\Big[\ G(t)\ \Big]_0^x + \Big[\ G(t)\ \Big]_x^1 \\ &= G(0) + G(1) - 2G(x) \end{aligned}$$

ここで　　$G(0) = 0$，$G(1) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}x$，$G(x) = -\dfrac{1}{6}x^3$

よって　　$f(x) = 0 + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}x\right) - 2\left(-\dfrac{1}{6}x^3\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}}$

(3) (2) の結果から　$f'(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

よって　$x = 0$ のとき**最大値** $\dfrac{1}{3}$，$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$　$\cdots(*)$

与えれた条件から　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{a},\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}$　$\cdots(**)$

$(*)$ から，$\vec{d}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ を $(**)$ に代入すると

$$\begin{aligned} \vec{b}\cdot\vec{c}&=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} & \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}&=-\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \\ |\vec{a}|^2&=-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a} & \qquad |\vec{c}|^2&=-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a} \end{aligned}$$

上の 2 式から　$|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2$　ゆえに　$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$

同様に，$(*)$ から，$\vec{a}=-(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ を $(**)$ に代入すると

$$\begin{aligned} \vec{b}\cdot\vec{c}&=-\vec{d}\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) & \qquad -(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}&=\vec{c}\cdot\vec{d} \\ |\vec{d}|^2&=-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{d}\cdot\vec{b} & \qquad -\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{d}\cdot\vec{b}&=|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

上の 2 式から　$|\vec{d}|^2=|\vec{b}|^2$　ゆえに　$\mathrm{CD}=\mathrm{AB}$

よって，2 組の対辺がそれぞれ等しいので，四角形 ABCD は平行四辺形である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\boldsymbol{f(x)=\sin 2\pi x}$，$\boldsymbol{f(x)=\cos 2\pi x}$ など

(2) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ および $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=0$ より

$$\begin{aligned} F(x+1)&=\int_0^{x+1} f(y)\,dy \\ &=\int_0^1 f(y)dy+\int_1^{x+1} f(y)\,dy=\int_1^{x+1} f(y)\,dy \end{aligned}$$

$y=t+1$ とおくと　$dy=dt$

y	$1\longrightarrow x+1$
t	$0\longrightarrow\ \ x$

したがって

$$F(x+1)=\int_1^{x+1} f(y)\,dy=\int_0^x f(t+1)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$$

よって，$F(x)$ は周期 1 の周期関数である．

(3) $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(y)\,dy$ であるから　$\dfrac{d}{dt}F(t)=f(t)$

$t=nx$ とすると，$\dfrac{dt}{dx}=n$ より

$$\frac{d}{dx}F(t)=\left\{\frac{d}{dt}F(t)\right\}\frac{dt}{dx}=f(t)n \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\frac{d}{dx}F(nx)=nf(nx)}$$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^1 xf(nx)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^1 x\{F(nx)\}'\,dx\\&=\frac{1}{n}\Big[\,xF(nx)\,\Big]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1 F(nx)\,dx\\&=\frac{1}{n}F(n)-\frac{1}{n}\int_0^1 F(nx)\,dx \quad \cdots①\end{aligned}$$

(2) の結果から　$F(n)=F(1)=\displaystyle\int_0^1 f(y)\,dy=0 \quad \cdots②$

$t=nx$ とおくと　$dx=\dfrac{dt}{n}$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow n$

したがって

$$\frac{1}{n}\int_0^1 F(nx)\,dx=\frac{1}{n^2}\int_0^n F(t)\,dt=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}F(t)\,dt \quad \cdots③$$

さらに，$t=u+k-1$ とおくと　$dt=du$

t	$k-1\longrightarrow k$
u	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}F(t)\,dt&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 F(u+k-1)\,du\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 F(u)\,du=\frac{1}{n}\int_0^1 F(u)\,du \quad \cdots④\end{aligned}$$

③，④ より　$\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 F(nx)\,dx=\frac{1}{n}\int_0^1 F(u)\,du$

上式および ② を ① に代入すると　$a_n=-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 F(u)\,du$

このとき，$\displaystyle\int_0^1 F(u)\,du$ は定数であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

別解 $$a_n = \int_0^1 xf(nx)\,dx$$

上式について，$y = nx$ とおくと　$dx = \dfrac{dy}{n}$

x	$0 \longrightarrow 1$
y	$0 \longrightarrow n$

$$a_n = \frac{1}{n^2}\int_0^n yf(y)\,dy = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} yf(y)\,dy$$

さらに，$y = u + k - 1$ とおくと　$dy = du$

y	$k-1 \longrightarrow k$
u	$0 \quad \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (u+k-1)f(u+k-1)\,dy \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (u+k-1)f(u)\,du \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^1 uf(u)\,du + (k-1)\int_0^1 f(u)\,du\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{n\int_0^1 uf(u)\,du + \frac{1}{2}n(n-1)\int_0^1 f(u)\,du\right\} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 uf(u)\,du
\end{aligned}$$

このとき，$\displaystyle\int_0^1 uf(u)\,du$ は定数であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)
$$\begin{aligned}&(E+X+X^2+\cdots+X^n)(E-X)\\=&(E+X+X^2+\cdots+X^n)-(X+X^2+X^3+\cdots+X^{n+1})\\=&E-X^{n+1}\end{aligned}$$

$E-X$ が逆行列をもつとき，上式より，次式が成り立つ．

$$E+X+X^2+\cdots+X^n=(E-X^{n+1})(E-X)^{-1}$$

(2) $A=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&0\end{pmatrix}$ より

$$A^2=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-4}\\\mathbf{4}&\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$
$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{8}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{8}\end{pmatrix}$$

上の結果および $A^3=2^3E$ であることから

$$A^{100}=(A^3)^{33}A=(2^3E)^{33}A=2^{99}\begin{pmatrix}-2&2\\-2&0\end{pmatrix}=\mathbf{2^{100}}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$
$$A^{101}=(A^3)^{33}A^2=(2^3E)^{33}A^2=2^{99}\begin{pmatrix}0&-4\\4&-4\end{pmatrix}=\mathbf{2^{101}}\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

(3) $E-A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&2\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\end{pmatrix}$ より

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$$

上式および (1)，(2) の結果を利用して

$$\begin{aligned}E+A+A^2+\cdots+A^{100}&=(E-A^{101})(E-A)^{-1}\\&=\frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-2^{101}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&2^{101}\\-2^{101}&1+2^{101}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2^{102}+1&3\cdot2^{101}+2\\-3\cdot2^{101}-2&2^{101}+3\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $r = 2\cos\theta$ の両辺に r をかけると

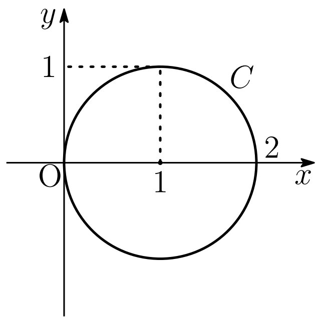
$$r^2 = 2r\cos\theta$$

$r^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$ であるから

$$x^2 + y^2 = 2x$$

ゆえに　$\boldsymbol{(x-1)^2 + y^2 = 1}$　$\cdots$①

C の表す図形は，中心 $(1,\ 0)$，半径 1 の円で，右の図のようになる．



(2) 点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き k の直線は　$y = k(x+1)$　$\cdots$②

①，② から y を消去すると　$(x-1)^2 + k^2(x+1)^2 = 1$

x について整理すると　$(k^2+1)x^2 + 2(k^2-1)x + k^2 = 0$　$\cdots$③

方程式 ③ の判別式を D とすると

$$D/4 = (k^2-1)^2 - (k^2+1)k^2 = 1 - 3k^2$$

直線 ② が C と 2 点で交わるから

$$1 - 3k^2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}} < k < \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(3) 直線と C の 2 つの交点の x 座標を α，β とすると，2 つの交点の中点の座標は，② により

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ k\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)\right)$$

方程式 ③ の解と係数の関係により　$\alpha + \beta = \dfrac{2(1-k^2)}{k^2+1}$

ゆえに，中点の座標を $(x,\ y)$ とすると　$x = \dfrac{1-k^2}{k^2+1}$，$y = \dfrac{2k}{k^2+1}$

ここで，$k = \tan\theta$ とすると，(2) の結果から　$-\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{6}$

したがって　$x = \dfrac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

$$y = \frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$-\dfrac{\pi}{3} < 2\theta < \dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\dfrac{1}{2} < x \leqq 1$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < y < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1\ \left(\frac{1}{2} < x \leqq 1\right)}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $T=6$ となるのは，次の 3 通り

$$(X,\ Y)=(4,\ 2),\ (5,\ 4),\ (6,\ 6)$$

したがって　$P(T=6)=\dfrac{3}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$

また，$T<0$ となるは，次の 6 通り

$$(X,\ Y)=(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6)$$

したがって　$P(T<0)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

よって　$P(T\geqq 0)=1-P(T<0)=1-\dfrac{1}{6}=\mathbf{\dfrac{5}{6}}$

(2)
$$E(X)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$
$$E(X^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$$

よって　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{91}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\mathbf{\dfrac{35}{12}}$

また，$E(Y)=E(X)$ であるから

$$E(T)=E(2X-Y)=2E(X)-E(Y)=E(X)=\mathbf{\frac{7}{2}}$$

(3)
$$\begin{aligned}E(T^2)&=E((2X-Y)^2)=E(4X^2-4XY+Y^2)\\&=4E(X^2)-4E(XY)+E(Y^2)\end{aligned}$$

X と Y は独立であるから　$E(XY)=E(X)E(Y)$

また，$E(Y^2)=E(X^2)$ であるから

$$E(T^2)=5E(X^2)-4\{E(X)\}^2=5\times\frac{91}{6}-4\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{161}{6}$$

ゆえに　$V(T)=E(T^2)-\{E(T)\}^2=\dfrac{161}{6}-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{175}{12}$

したがって　$V(aT)=a^2V(T)=\dfrac{175}{12}a^2$

よって　$\dfrac{175}{12}a^2=25$　これを解いて　$\boldsymbol{a=\pm\dfrac{2\sqrt{21}}{7}}$

補足 独立な確率変数 X，Y について，$\mu = E(X), \nu = E(Y)$ とすると

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - \{E(X+Y)\}^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - \{E(X) + E(Y)\}^2 \\
&= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (\mu + \nu)^2 \\
&= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - \mu^2 - 2\mu\nu - \nu^2 \\
&= E(X^2) + 2\mu\nu + E(Y^2) - \mu^2 - 2\mu\nu - \nu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2 + E(Y^2) - \nu^2 \\
&= V(X) + V(Y)
\end{aligned}$$

確率変数 X，Y について，次の線形性が成り立つ．

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad E(aX) = aE(X)$$

とくに，X と Y が独立であるとき

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \qquad V(aX) = a^2V(X)$$

別解 分散の線形性を用いると

$$\begin{aligned}
V(T) &= V(2X - Y) = V(2X + (-Y)) \\
&= V(2X) + V(-Y) \\
&= 2^2V(X) + (-1)^2V(Y) \\
&= 4V(X) + V(X) \qquad\qquad (\text{本題では}, V(Y) = V(X)) \\
&= 5V(X) = 5 \times \frac{35}{12} = \frac{175}{12}
\end{aligned}$$

したがって　　$V(aT) = a^2V(T) = \dfrac{175}{12}a^2$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x)$ は確率密度関数であるから，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 1$ より

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x + k\right) dx$$
$$= \left[\ \frac{1}{2}x\ \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{8}x^2 + kx\ \right]_1^3$$
$$= -\frac{1}{2} + 2k$$

ゆえに　$-\dfrac{1}{2} + 2k = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{k = \dfrac{3}{4}}$

したがって　$E(X) = \displaystyle\int_0^3 xf(x)\,dx$

$$= \int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right) dx$$
$$= \left[\ \frac{1}{4}x^2\ \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{8}x^2\ \right]_1^3$$
$$= \boldsymbol{\frac{13}{12}}$$

(2) (a) (i) $0 \leqq a$ のとき

$$P(a \leqq Z \leqq b) = P(0 \leqq Z \leqq b) - P(0 \leqq Z \leqq a)$$
$$= \boldsymbol{g(b) - g(a)}$$

(ii) $a \leqq 0 \leqq b$ のとき

$$P(a \leqq Z \leqq b) = P(a \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq b)$$
$$= P(0 \leqq Z \leqq -a) + P(0 \leqq Z \leqq b)$$
$$= \boldsymbol{g(-a) + g(b)}$$

(iii) $b \leqq 0$ のとき

$$P(a \leqq Z \leqq b) = P(-b \leqq Z \leqq -a)$$
$$= P(0 \leqq Z \leqq -a) - P(0 \leqq Z \leqq -b)$$
$$= \boldsymbol{g(-a) - g(-b)}$$

(b) 標本平均は，正規分布 $N\left(50,\ \dfrac{(3\sqrt{10})^2}{10}\right) = N(50,\ 3^2)$ に従う．

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P\left(\frac{41.0-50}{3} \leqq Z \leqq \frac{48.5-50}{3}\right) &= P(-3 \leqq Z \leqq -0.5) \\ &= P(0.5 \leqq Z \leqq 3) \\ &= \boldsymbol{g(3) - g(0.5)} \end{aligned}$$

(c) 標本平均 $\overline{X}$ を標準化した

$$Z = \frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{20}}}$$

は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので

$$\begin{aligned} P(|Z| \leqq l_p) &= P(-l_p \leqq Z \leqq l_p) \\ &= 2P(0 \leqq Z \leqq l_p) \\ &= 2g(l_p) = 2 \times \frac{p}{2} = p \end{aligned}$$

したがって，母平均 m に対する信頼度 $100p\%$ の信頼区間は

$$-l_p \leqq \frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{20}}} \leqq l_p \quad \text{すなわち} \quad \overline{X} - \frac{5}{\sqrt{20}}l_p \leqq m \leqq \overline{X} + \frac{5}{\sqrt{20}}l_p$$

よって，求める信頼区間の区間幅は　$2 \times \dfrac{5}{\sqrt{20}}l_p = \boldsymbol{\sqrt{5}\,l_p}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(y)\sin(x-y)\,dy = \int_0^{2\pi} f(y)(\sin x\cos y - \cos x\sin y)\,dy$

$$= \sin x\int_0^{2\pi} f(y)\cos y\,dy - \cos x\int_0^{2\pi} f(y)\sin y\,dy$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(y)\cos y\,dy$，$\displaystyle -\int_0^{2\pi} f(y)\sin y\,dy$ は定数であるから

$$a = \int_0^{2\pi} f(y)\cos y\,dy, \qquad b-1 = -\int_0^{2\pi} f(y)\sin y\,dy$$

とおくと，$f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + a\sin x + (b-1)\cos x \\ &= a\sin x + b\cos x \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{2\pi} (a\sin y + b\cos y)\cos y\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} (a\sin y\cos y + b\cos^2 y)\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{2}\sin 2y + b\cdot\frac{1+\cos 2y}{2}\right)dy \\ &= \left[-\frac{a}{4}\cos 2y + \frac{b}{2}\left(y + \frac{1}{2}\sin 2y\right)\right]_0^{2\pi} = \pi b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b-1 &= -\int_0^{2\pi} (a\sin y + b\cos y)\sin y\,dy \\ &= -\int_0^{2\pi} (a\sin^2 y + b\sin y\cos y)\,dy \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(a\cdot\frac{1-\cos 2y}{2} + \frac{b}{2}\sin 2y\right)dy \\ &= -\left[\frac{a}{2}\left(y - \frac{1}{2}\sin 2y\right) - \frac{b}{4}\cos 2y\right]_0^{2\pi} = -\pi a \end{aligned}$$

したがって　$a = \pi b$，$b-1 = \pi a$　これを解いて　$a = \dfrac{\pi}{\pi^2+1}$，$b = \dfrac{1}{\pi^2+1}$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\pi}{\pi^2+1}\sin x + \dfrac{1}{\pi^2+1}\cos x}$