平成22年度　鹿児島大学2次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成22年2月25日

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ から1問選択．数II・III・A・B・C(120分)
- 理[生命化]，医[理学療法]・農・水産学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{3}$ 数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育]学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{2}$，$\boxed{9}$ の2題から1問選択．数II・A・Bまたは数III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 正の実数 a に関する次の各命題の真偽を述べよ．また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(a) a が自然数ならば $\sqrt{a}$ は無理数である．

(b) a が無理数ならば $\sqrt{a}$ も無理数である．

(2) 4個のさいころを同時に投げるとき，目の和が7になる確率を求めよ．

(3) $\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{A} = 75^\circ$，$\angle\mathrm{B} = 60^\circ$，AB $= 1$ とする．頂点Aを通り辺BCに垂直な直線と $\triangle$ABC の外接円との交点をPとする．このとき，線分APの長さを求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 直線 $l : y = ax + b$ が原点を中心とする半径1の円と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ で接しているとする．また，直線 l は放物線 $C : y = x^2 - \sqrt{3}x + c$ とも接しているとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(a) 定数 a，b の値を求めよ．

(b) 放物線 C と直線 l との接点の座標および定数 c の値を求めよ．

(c) 放物線 C と直線 l および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，

$$5\sin^2\theta + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$$

を満たす θ の中で最大のものを α とするとき，$\cos\alpha$ と $\tan 2\alpha$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標平面において，点 C$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とし，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を S とする．S 上に点 N$(0,\ 1)$ をとり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \vec{n}$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，O は原点を表すものとする．

(1) x 軸上に点 P$(x,\ 0)$ をとり，直線 NP と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\vec{p} + b\vec{n}$ の形で表したとき，a，b を x で表せ．

(2) x 軸上に 2 点 P$_1(x_1,\ 0)$，P$_2(x_2,\ 0)$ をとる．直線 NP$_1$ と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q$_1$ とし，直線 NP$_2$ と円 S との交点のうち，N と異なるものを Q$_2$ とする．このとき，$x_1x_2 = -1$ が成り立っていれば

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ_1}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ_2}} = \vec{0}$$

が成立することを証明せよ．ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表すものとする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を 0 以上の実数とし，$x > -1$ で定義された関数

$$f(x) = 2x^2 + (1 - a^2)\log(x + 1)$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) 方程式 $f'(x) = 0$ が $x > -1$ で異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(3) a が (1) で求めた範囲にあるとき，関数 $f(x)$ の極小値は $\dfrac{1 - 2\log 2}{2}$ より大きいことを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2次の正方行列 A，B について，次の各問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は原点のまわりの回転移動を表し，$b>0$ である．行列 A を求めよ．

(2) 行列 B の表す移動 (1次変換) に続いて行列 A の表す移動を行うことで得られる合成移動 (合成変換) は y 軸に関する対称移動になる．行列 B を求めよ．

(3) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集まりは直線となることを示せ．また，その直線を表す式を求めよ．

(4) $B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす列ベクトル $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ を求めよ．また，この列ベクトルと自然数 n に対し，$B^n\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $x^2-y^2=2$ で表される曲線を C とし，$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を C 上の点とする．次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 C の点 P における接線 l の方程式は

$$x_0x-y_0y=2$$

となることを証明せよ．

(2) 原点 O から l に下ろした垂線を OH とする．H の座標を $(x_1,\ y_1)$ とするとき，x_1，y_1 を x_0 と y_0 で表せ．

(3) $\mathrm{F}(1,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-1,\ 0)$ とする．$\mathrm{FH}\cdot\mathrm{F'H}$ は点 P の取り方によらず一定であることを証明せよ．また，その値を求めよ．

$\boxed{7}$ 袋の中に1の数字が書かれている球が5個，2の数字が書かれている球が3個，5の数字が書かれている球が2個の合計10個の球が入っている．1個の球を取り出して，その球に書かれている数を確認し，もとに戻すことを繰り返す．i 回目に取り出した球に書かれている数を X_i とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) X_1 の確率分布を表で表せ．また，X_1 の平均と分散を求めよ．

(2) $Z = X_1 + X_2$ の確率分布を表で表せ．また，確率 $P(Z \leqq 4)$ の値を求めよ．

(3) $S = X_1 - X_2$ とするとき

$$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$$

を満たす整数 a の最大値を求めよ．

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ が $n+1$ となる確率を求めよ．

$\boxed{8}$ 数字1が書かれたカードが1枚，数字2が書かれたカードが2枚，数字3が書かれたカードが1枚の合計4枚のカードがある．この4枚のカードを母集団とし，カードに書かれている数字を変量とする．このとき，次の各問いに答えよ．ただし，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを1個ずつ取り出すことを復元抽出といい，取り出したものをもとに戻さずに続けて抽出することを非復元抽出という．

(1) 母平均 m と母標準偏差 σ を求めよ．

(2) この母集団から，非復元抽出によって，大きさ2の無作為標本を抽出し，そのカードの数字を取り出した順に Y_1，Y_2 とする．標本平均 $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2}$ の確率分布，期待値 $E(\overline{Y})$，標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ を求めよ．

(3) この母集団から，復元抽出によって，大きさ200の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．このとき，標本平均 $\overline{X}$ が近似的に正規分布に従うとみなすことができるとして，$P(\overline{X} < a) = 0.05$ を満たす定数 a を求めよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$ とする．

$\boxed{\mathbf{9}}$ a を正の定数とし，関数

$$f(x) = (x-a)e^{-x}$$

について，次の各問いに答えよ．ただし e は自然対数の底である．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，そのグラフの概形をかけ．

(4) n を正の整数とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a + n$ とで囲まれた部分の面積 S_n を n と a で表せ．また，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) **偽，反例　$\boldsymbol{a=4}$**

(b) **真**

対偶：「$\sqrt{a}$ が有理数ならば，a も有理数である」を証明する．

［証明］$\sqrt{a}$ が有理数のとき，整数 m と 0 でない整数 n を用いて

$$\sqrt{a}=\frac{m}{n}$$

と表される．この式の両辺を平方すると

$$a=\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{m^2}{n^2}$$

m^2 は整数で，n^2 も 0 でない整数なので，a は有理数である．
対偶が証明されたので，本命題も真である．

(2) 起こり得る場合の総数は　6^4 (通り)
4 個のさいころの目の和が 7 になるのは

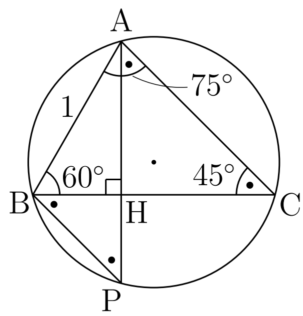
$$\{1,\ 1,\ 1,\ 4\}\quad\cdots\quad\frac{4!}{3!}=4\ (\text{通り})$$

$$\{1,\ 1,\ 2,\ 3\}\quad\cdots\quad\frac{4!}{2!}=12\ (\text{通り})$$

$$\{1,\ 2,\ 2,\ 2\}\quad\cdots\quad\frac{4!}{3!}=4\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　$\dfrac{4+12+4}{6^4}=\dfrac{20}{6^4}=\boldsymbol{\dfrac{5}{324}}$

(3) AP と BC の交点を H とすると，



$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin 60^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\cos 60^\circ=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

右の図から　　$\mathrm{HP}=\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\mathrm{AP}=\mathrm{AH}+\mathrm{HP}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) (a) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線方程式は

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y=1$　ゆえに　$y=\sqrt{3}x-2$　よって　$\boldsymbol{a=\sqrt{3},\ b=-2}$

(b) $y=x^2-\sqrt{3}x+c$ と $y=\sqrt{3}x-2$ から y を消去すると

$$x^2-2\sqrt{3}x+c+2=0 \quad \cdots①$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4=(-\sqrt{3})^2-1\cdot(c+2)=1-c$$

C と l が接するのは，$D=0$ のときであるから

$$1-c=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c=1}$$

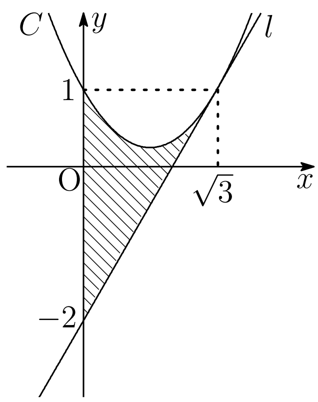
これを ① に代入すると

$$x^2-2\sqrt{3}x+3=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-\sqrt{3})^2=0$$

したがって　$x=\sqrt{3}$　これを l の方程式に代入して　$y=1$

よって　$\boldsymbol{(\sqrt{3},\ 1)}$

(c) (b) の結果から，求める面積を S とすると，右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{3}} \{(x^2-\sqrt{3}x+1)-(\sqrt{3}x-2)\}dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} (x-\sqrt{3})^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^3\ \right]_0^{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2) $5\sin^2\theta + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$ より

$$5(1-\cos^2\theta) + 14\cos\theta - 13 \geqq 0$$
$$5\cos^2\theta - 14\cos\theta + 8 \leqq 0$$

整理すると $(\cos\theta - 2)(5\cos\theta - 4) \leqq 0$

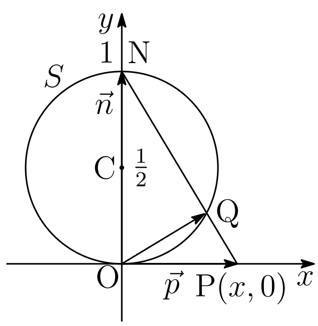
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから $\dfrac{4}{5} \leqq \cos\theta \leqq 1$

これを満たす θ で最大なものが α であるから $\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{4}{5}}$

このとき $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

よって $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\times\dfrac{3}{4}}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{24}{7}}$

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\vec{p} + b\vec{n}$ について，Q は線分 NP 上の点であるから



$$a + b = 1 \quad \cdots ①$$

$\angle\mathrm{OQN} = 90^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}} = 0$ より

$$(a\vec{p} + b\vec{n})\cdot(\vec{p} - \vec{n}) = 0$$
$$a|\vec{p}|^2 + (b-a)\vec{p}\cdot\vec{n} - b|\vec{n}|^2 = 0$$

$|\vec{p}|^2 = x^2$，$\vec{p}\cdot\vec{n} = 0$，$|\vec{n}| = 1$ であるから

$$ax^2 + (b-a)\cdot 0 - b\cdot 1^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ax^2 - b = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{1+x^2}}$，$\boldsymbol{b = \dfrac{x^2}{1+x^2}}$

別解 1 N と Q は異なるので，実数 t を用いて $(t \neq 0)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} + t\overrightarrow{\mathrm{NP}} = (0,\ 1) + t(x, -1)\\ &= (tx,\ 1-t)\end{aligned}$$

Q は S 上の点であるから

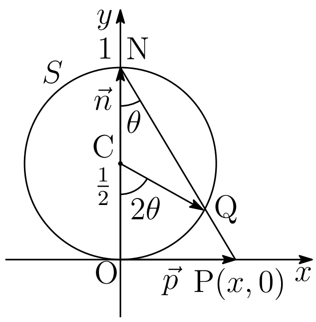
$$(tx)^2 + \left\{(1-t) - \frac{1}{2}\right\}^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad t\{(1+x^2)t - 1\} = 0$$

$t \neq 0$ より，$t = \dfrac{1}{1+x^2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} + \frac{1}{1+x^2}\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \vec{n} + \frac{1}{1+x^2}(\vec{p} - \vec{n})\\ &= \frac{1}{1+x^2}\vec{p} + \frac{x^2}{1+x^2}\vec{n}\end{aligned}$$

よって　　$a = \dfrac{1}{1+x^2}$，$b = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

別解 2 $x = \tan\theta$ とおくと $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}}\\ &= \frac{1}{2}(0,\ 1)\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}(\sin 2\theta,\ 1 - \cos 2\theta)\end{aligned}$$

- 動径 CQ は x 軸の正の向きに対し，$-\frac{\pi}{2}$ だけ回転し，さらに $+2\theta$ だけ回転した位置にある．

ここで

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{1+x^2},\ 1 - \dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \left(\dfrac{x}{1+x^2},\ \dfrac{x^2}{1+x^2}\right)$

$$= \frac{1}{1+x^2}(x,\ 0) + \frac{x^2}{1+x^2}(0,\ 1) = \frac{1}{1+x^2}\vec{p} + \frac{x^2}{1+x^2}\vec{n}$$

よって　　$a = \dfrac{1}{1+x^2}$，$b = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \frac{1}{1+x^2}\vec{p} + \frac{x^2}{1+x^2}\vec{n} = \frac{1}{1+x^2}(x,\ 0) + \frac{x^2}{1+x^2}(0,\ 1)\\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{1+x^2}\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{CQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2}{1+x^2}\right) - \left(0,\ \frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\frac{x}{1+x^2},\ \frac{x^2-1}{2(1+x^2)}\right)\end{aligned}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1} = \left(\dfrac{x_1}{1+{x_1}^2},\ \dfrac{{x_1}^2-1}{2(1+{x_1}^2)}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2} = \left(\dfrac{x_2}{1+{x_2}^2},\ \dfrac{{x_2}^2-1}{2(1+{x_2}^2)}\right)$

$x_1x_2 = -1$ のとき，$x_2 = -\dfrac{1}{x_1}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_2} = \left(\frac{-\frac{1}{x_1}}{1+\frac{1}{{x_1}^2}},\ \frac{\frac{1}{{x_1}^2}-1}{2\left(1+\frac{1}{{x_1}^2}\right)}\right) = -\left(\frac{x_1}{1+{x_1}^2},\ \frac{{x_1}^2-1}{2(1+{x_1}^2)}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}_2} = \vec{0}$

別解 (1) の別解 2 において

$$x_1 = \tan\theta_1,\ x_2 = \tan\theta_2$$

とおく．$x_1x_2 = -1$ が成り立つとき，$x_1 < 0 < x_2$ とすると

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

であるから

$$\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 = 0, \quad \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 = 0$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}_1} + \overrightarrow{\mathrm{CQ}_2} = \frac{1}{2}(\sin 2\theta_1, -\cos 2\theta_1) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta_2, -\cos 2\theta_2) = \vec{0}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=2x^2+(1-a^2)\log(x+1)$ を微分すると

$$f'(x)=4x+\frac{1-a^2}{x+1}=\frac{4x(x+1)+1-a^2}{x+1}$$
$$=\frac{(2x+1)^2-a^2}{x+1}=\frac{(2x+1+a)(2x+1-a)}{x+1}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-\frac{a+1}{2},\ \frac{a-1}{2}$

$a>0$ であるから　　$-\frac{a+1}{2}<\frac{a-1}{2}$

$x>-1$ で $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$a>0$ に注意して

$$-\frac{a+1}{2}>-1 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{0<\boldsymbol{a}<1}$$

(2) (1) の結果から，$0<a<1$ のときの $f(x)$ の増減表は，次ようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{a+1}{2}$	$\cdots$	$\frac{a-1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

極大値は　$f\left(-\frac{a+1}{2}\right)=2\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2+(1-a^2)\log\left(-\frac{a+1}{2}+1\right)$

$$=\boldsymbol{\frac{(a+1)^2}{2}+(1-a^2)\log\frac{1-a}{2}}$$

極小値は　$f\left(\frac{a-1}{2}\right)=2\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+(1-a^2)\log\left(\frac{a-1}{2}+1\right)$

$$=\boldsymbol{\frac{(a-1)^2}{2}+(1-a^2)\log\frac{1+a}{2}}$$

(3) $g(a)=f\left(\frac{a-1}{2}\right)$ とおくと

$$g'(a)=a-1-2a\log\frac{1+a}{2}+(1-a^2)\times\frac{1}{1+a}=-2a\log\frac{1+a}{2}$$

$0<a<1$ より $g'(a)>0$ であるから，$g(a)$ は単調増加．

$0<a<1$ において　$g(a)>g(0)=\frac{1}{2}+\log\frac{1}{2}=\frac{1-2\log 2}{2}$

よって，極小値 $f\left(\frac{a-1}{2}\right)$ は，$\frac{1-2\log 2}{2}$ より大きい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) A を原点を中心に回転角が θ の回転移動を表す行列とすると

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

両辺の成分から

$$\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad -\sin\theta = b, \quad \sin\theta = c, \ \cos\theta = d$$

$b > 0$ より，$\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

よって　　$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}$

(2) AB が y 軸に関する1次変換を表す行列であるから，(1) の結果から

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}}$$

(3) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{すなわち} \quad y = -3x$$

よって，これを満たす点 $(x,\ y)$ の集合は，直線 $\boldsymbol{y = -3x}$ である．

(4) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-\frac{11}{5}} \\ \boldsymbol{-\frac{2}{5}} \end{pmatrix}$$

このとき $B^{-1} = B$ であるから，$B^2 = E$ が成り立つ．

i) $\boldsymbol{n}$ **が偶数のとき**，$B^n = E$ であるから

$$B^n\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-\frac{11}{5}} \\ \boldsymbol{-\frac{2}{5}} \end{pmatrix}$$

ii) $\boldsymbol{n}$ **が奇数のとき**，$B^n = B$ であるから

$$B^n\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $x^2 - y^2 = 2$ を y について微分すると　$2x\dfrac{dx}{dy} - 2y = 0$

C の $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における $\dfrac{dx}{dy}$ は，$x_0 \neq 0$ であるから　$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y_0}{x_0}$

よって，P における C の接線の方程式は

$$x - x_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \text{ゆえに} \quad x_0x - y_0y = {x_0}^2 - {y_0}^2$$

P は C 上の点であるから，${x_0}^2 - {y_0}^2 = 2$ により　$x_0x - y_0y = 2$

別解 $y_0 \neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x_0}{y_0}$ であるから，P における C の接線の方程式は

$$y - y_0 = \frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \quad \text{ゆえに} \quad x_0x - y_0y = 2 \quad \cdots(*)$$

$(x_0,\ y_0) = (\pm\sqrt{2},\ 0)$ における接線の方程式は　$x = \pm\sqrt{2}$　(複号同順)

したがって，C 上のすべての点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ について，$(*)$ が成立する．

(2) (1) で求めた接線 $x_0x-y_0y=2$ に垂直で，原点を通る直線は　$y_0x+x_0y=0$ 上の 2 直線の交点が $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ であるから，これを解いて

$$\boldsymbol{x_1=\frac{2x_0}{x_0{}^2+y_0{}^2},\quad y_1=-\frac{2y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}}$$

(3) $\mathrm{F}(1,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-1,\ 0)$，$\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{FH}^2&=(x_1-1)^2+y_1{}^2=x_1{}^2+y_1{}^2-2x_1+1 &\cdots ①\\ \mathrm{F'H}^2&=(x_1+1)^2+y_1{}^2=x_1{}^2+y_1{}^2+2x_1+1 &\cdots ②\end{aligned}$$

ここで，(2) の結果および $x_0{}^2-y_0{}^2=2$ より

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{2x_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}=\frac{2x_0}{x_0{}^2+(x_0{}^2-2)}=\frac{x_0}{x_0{}^2-1} &\cdots ③\\ x_1{}^2+y_1{}^2&=\left(\frac{2x_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}\right)^2+\left(-\frac{2y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2}\right)^2=\frac{4(x_0{}^2+y_0{}^2)}{(x_0{}^2+y_0{}^2)^2}\\ &=\frac{4}{x_0{}^2+y_0{}^2}=\frac{4}{x_0{}^2+(x_0{}^2-2)}=\frac{2}{x_0{}^2-1} &\cdots ④\end{aligned}$$

③，④ から，①，② は

$$\begin{aligned}\mathrm{FH}^2&=\frac{2}{x_0{}^2-1}-\frac{2x_0}{x_0{}^2-1}+1=1-\frac{2(x_0-1)}{x_0{}^2-1}\\ &=1-\frac{2}{x_0+1}=\frac{x_0-1}{x_0+1}\\ \mathrm{F'H}^2&=\frac{2}{x_0{}^2-1}+\frac{2x_0}{x_0{}^2-1}+1=1+\frac{2(x_0+1)}{x_0{}^2-1}\\ &=1+\frac{2}{x_0-1}=\frac{x_0+1}{x_0-1}\end{aligned}$$

上の 2 式から　$\mathrm{FH}^2{\cdot}\mathrm{F'H}^2=1$　ゆえに　$\mathrm{FH}{\cdot}\mathrm{F'H}=1$

よって，FH·F′H は，P の取り方によらず一定である．

解説 設問で $\mathrm{F}\left(\sqrt{\dfrac{k}{2}},\ 0\right)$，$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{\dfrac{k}{2}},\ 0\right)$ とし，直角双曲線を $x^2-y^2=k$ とすると，次式が成り立つ．

$$\mathrm{FH}{\cdot}\mathrm{F'H}=\frac{k^2}{4}$$

なお，F，F′ は直角双曲線の準線[1] と x 軸の交点である．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf の $\boxed{\mathbf{3}}$ の解説を参照.

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) X_1 の確率分布の表は，次のようになる．

X_1	1	2	5	計
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

平均 $E(X_1)$ は

$$E(X_1) = 1\cdot\frac{5}{10} + 2\cdot\frac{3}{10} + 5\cdot\frac{2}{10} = \mathbf{\frac{21}{10}}$$

分散 $V(X_1)$ は

$$E({X_1}^2) = 1^2\cdot\frac{5}{10} + 2^2\cdot\frac{3}{10} + 5^2\cdot\frac{2}{10} = \frac{67}{10}$$

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E({X_1}^2) - \{E(X_1)\}^2 \\ &= \frac{67}{10} - \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{670}{100} - \frac{441}{100} = \mathbf{\frac{229}{100}} \end{aligned}$$

(2) $Z = X_1 + X_2$ より

$$\begin{aligned} P(Z=2) &= \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100} \\ P(Z=3) &= {}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{30}{100} \\ P(Z=4) &= \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100} \\ P(Z=6) &= {}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{20}{100} \\ P(Z=7) &= {}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{12}{100} \\ P(Z=10) &= \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{4}{100} \end{aligned}$$

$Z = X_1 + X_2$ の確率分布の表は，次のようになる．

Z	2	3	4	6	7	10	計
P	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{4}{100}$	1

よって　$P(Z \leqq 4) = \dfrac{25}{100} + \dfrac{30}{100} + \dfrac{9}{100} = \dfrac{64}{100} = \mathbf{\dfrac{16}{25}}$

(3) $W = X_1 - X_2$ より

$$
\begin{aligned}
P(W=-4) &= \frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{10}{100} \\
P(W=-3) &= \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{6}{100} \\
P(W=-1) &= \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{15}{100} \\
P(W=0) &= \left(\frac{5}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{38}{100} \\
P(W=1) &= \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{15}{100} \\
P(W=3) &= \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{100} \\
P(W=4) &= \frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{10}{100}
\end{aligned}
$$

$W = X_1 - X_2$ の確率分布の表は，次のようになる．

W	-4	-3	-1	0	1	3	4	計
P	$\frac{10}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	1

$$
\begin{aligned}
P(W \leqq -1) &= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{15}{100} = \frac{31}{100} \\
P(W \leqq 0) &= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{15}{100} + \frac{38}{100} = \frac{69}{100}
\end{aligned}
$$

(2) の結果から，$P(Z \leqq 4) = \dfrac{64}{100}$ であるから，$P(W \leqq a) \leqq P(Z \leqq 4)$ を満たす整数 a の最大値は　$\boldsymbol{a = -1}$

(4) $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ が $n+1$ となるのは，数字 1 を $n-1$ 回，数字 2 を 1 回取り出すときであるから，その確率は

$$
{}_n\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{5}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{10} = n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{3}{10} = \boldsymbol{\frac{3n}{5\cdot 2^n}}
$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 母平均 m，標準偏差 σ は

$$m = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{2}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} = \mathbf{2}$$
$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{2}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} - 2^2 = \frac{2}{4}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

別解 標本の数が少ないので，次のように計算してもよい．

$$m = \frac{1+2+2+3}{4} = 2$$
$$\sigma^2 = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^3}{4} = \frac{2}{4}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\overline{Y} = \dfrac{Y_1+Y_2}{2}$ より

$$P\left(\overline{Y} = \frac{3}{2}\right) = \frac{1\cdot2 + 2\cdot1}{4\cdot3} = \frac{1}{3} \qquad \leftarrow (Y_1,\ Y_2) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$
$$P\left(\overline{Y} = 2\right) = \frac{1\cdot1 + 2\cdot1 + 1\cdot1}{4\cdot3} = \frac{1}{3} \quad \leftarrow (Y_1,\ Y_2) = (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$
$$P\left(\overline{Y} = \frac{5}{2}\right) = \frac{2\cdot1 + 1\cdot2}{4\cdot3} = \frac{1}{3} \qquad \leftarrow (Y_1,\ Y_2) = (2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

$\overline{Y} = \dfrac{Y_1+Y_2}{2}$ の確率分布の表は

$\overline{Y}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

平均 $E(\overline{Y})$ は

$$E(\overline{Y}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{2}$$

標準偏差 $\sigma(\overline{Y})$ は

$$V(\overline{Y}) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2\cdot\frac{1}{3} + (2-2)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\sigma(\overline{Y}) = \sqrt{V(\overline{Y})} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\mathbf{6}}$$

(3) (1) で求めた母平均 2，母分散 $\dfrac{1}{2}$ の母集団から抽出された大きさ 200 の標本平均 $\overline{X}$ の分布は，正規分布

$$N\left(2,\ \frac{\frac{1}{2}}{200}\right) = N\left(2,\ \frac{1}{400}\right)$$

に従う．ゆえに

$$Z = \frac{\overline{X}-2}{\frac{1}{20}} = 20(\overline{X}-2)$$

は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$P(Z > 1.65) = 0.05$ より，$P(Z < -1.65) = 0.05$ であるから

$$P(20(\overline{X}-2) < -1.65) = 0.05 \quad \text{ゆえに} \quad P\left(\overline{X} < 2 - \frac{1.65}{20}\right) = 0.05$$

よって　　$a = 2 - \dfrac{1.65}{20} = 2 - \dfrac{33}{400} = \boldsymbol{\dfrac{767}{400}}$

9 (1) $f(x) = (x-a)e^{-x}$ を微分すると

$$f'(x) = e^{-x} - (x-a)e^{-x} = \boldsymbol{\{(a+1)-x\}e^{-x}}$$

(2) (1) の結果をさらに微分すると

$$f''(x) = -e^{-x} - \{(a+1)-x\}e^{-x} = \boldsymbol{\{x-(a+2)\}e^{-x}}$$

(3) (1)，(2) の結果から，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$e^{-(a+1)}$	↘	$2e^{-(a+2)}$	↘

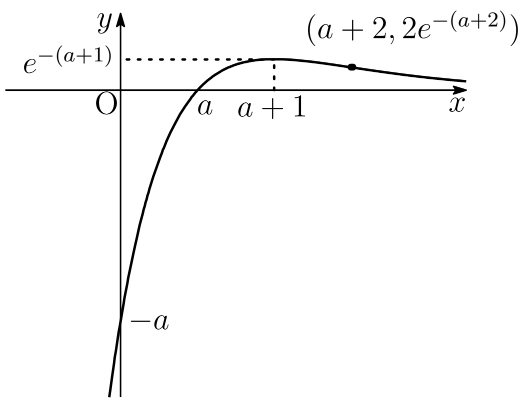
極大値 $f(a+1) = \boldsymbol{e^{-(a+1)}}$

また，変曲点は $\boldsymbol{(a+2,\ 2e^{-(a+2)})}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

よって，グラフは右のようになる．



(4) (3) の結果から，求める面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_a^{a+n} (x-a)e^{-x}\,dx \\ &= \Big[-(x-a+1)e^{-x} \Big]_a^{a+n} \\ &= \boldsymbol{-(n+1)e^{-(a+n)} + e^{-a}} \end{aligned}$$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)e^{-(a+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{a+n}} = 0$

よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S_n = e^{-a}}$

解説 $\displaystyle\int e^{kx}f(x)\,dx = \frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \cdots\right\} + C$

$\displaystyle\int e^{-x}f(x)\,dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C$