

平成 21 年度 鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部 平成 21 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医]・歯学部 ① ② ③ ④ 必答,
⑤ ⑥ ⑦ ⑧ から 1 問選択. 数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化], 医 [理学療法]・農・水産学部 ① ② ④ 数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育] 学部 ① ⑨ 必答, ② ⑩ から 1 問選択.
数 II・A・B または 数 III・A・B(90 分)

① 次の各問いに答えよ.

- (1) 実数 x, y に関する次の各命題の真偽を述べよ. 真ならば証明し, 偽ならば反例をあげよ.
 - (a) $x \geq y$ ならば $x^2 \geq y^2$ である.
 - (b) $x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y^2$ ならば $x \geq y$ である.
- (2) $20! = 2^m k$ (k は奇数) が成り立つとき, 整数 m の値を求めよ.
- (3) 1, 2, 3, 4, 5 の 5 種類の数字を, 同じ数字を繰り返し用いることを許して 3 桁の整数をつくる時, 各位の数字の和が 3 の倍数になる整数は何個あるか.
- (4) $AB \neq AC$ である鋭角三角形 ABC の外心を O, 重心を G とする. 直線 OG と A から辺 BC におろした垂線との交点を H, BC の中点を M とするとき, $AH : OM$ を求めよ.

② 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 $4x - 3y = a$ が放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ と接するとき, a の値と接点の座標を求めよ.
- (2) 点 (x, y) が連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 25, y \leq -x^2 + 6x - 5$ の表す領域を動くとき, $4x - 3y$ の最小値と最大値を求めよ.

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log |x| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とすると、次の各問いに答えよ。

- (1) $0 < x < 1$ のとき、 $0 < -\log x < \frac{1}{x}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 微分係数の定義を用いて $f'(0) = 0$ であることを示せ。
- (3) $x \neq 0$ のとき $f'(x)$ を求めよ。
- (4) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

4 次の数列について、各問いに答えよ。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{第1群} & \text{第2群} & \text{第3群} & & \text{第}k\text{群} & & \\ \underbrace{1} & \underbrace{1 \ 2} & \underbrace{1 \ 2 \ 3} & \cdots & \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ \cdots \ k} & \cdots & \\ \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, & \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, & \cdots & \frac{1}{k}, \frac{2}{k-1}, \frac{3}{k-2}, \cdots, \frac{k}{1}, & \cdots & \end{array}$$

- (1) $\frac{n}{m}$ は第何群の第何項か。ただし、 m と n は正の整数とする。
- (2) $\frac{n}{m}$ は数列の先頭から数えると何番目の項か。
- (3) 数列の先頭から数えて 1000 番目の項 a を求めよ。
- (4) a と値が等しい項のうちで最初に現れるのは、数列の先頭から数えて何番目か。

5 $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする。正方行列 A, B が

$$\alpha A + \beta B = M, \quad A + B = E, \quad AB = O$$

を満たしているとき、次の各問いに答えよ。ただし、 α, β は $\alpha > \beta$ を満たす実数、 E は単位行列、 O は零行列である。

- (1) $A^2 = A, B^2 = B, BA = O$ であることを示せ。
- (2) A, B を α, β を用いて表せ。
- (3) α, β および A, B を求めよ。
- (4) n を自然数とすると、 M^n を求めよ。

6 次の各問いに答えよ.

- (1) 平面上の二点 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ からの距離の和が $2a$ ($a > 1$) である楕円 C の方程式を求めよ.
- (2) 楕円 C が直線 $x + y = 2$ と接するとき, a の値と接点 P の座標を求めよ.
- (3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき

$$\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{QF_1}{QF_2}$$

であることを示せ.

7 容器の中にある種類の生物がいて, この容器の中では増殖しない. この生物に関して, 次の性質を満たす定数 p があることが知られている.

[性質] この生物の個体は k 日目に生存していれば, 他の個体が何匹いるかにかかわらずなく, $k + 1$ 日目には確率 p で生存している ($k = 1, 2, 3, \dots$).

k 日目に生存している個体数を X_k で表す. $X_1 = n$ とするとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) $X_2 = 0$ となる確率を求めよ.
- (2) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ.
- (3) $X_k > 0$ であるが $X_{k+1} = 0$ となる確率を求めよ.

8 次の各問いに答えよ.

- (1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leq x \leq 1$ で, その確率密度関数 $f(x)$ が, 次の式で与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (-1 \leq x < 0) \\ -x+k & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

- (a) k の値と X の平均を求めよ.
 (b) 確率 $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$ を求めよ.
- (2) 母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき, その標本平均を \bar{X} とする. 標本平均 \bar{X} は, n の値が大きいとき, 近似的に正規分布 $N(x, y)$ に従う. ただし, 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うならば, $P(Z \geq 1.00) = 0.1587$, $P(Z \geq 2.00) = 0.0228$ である.
- (a) x と y を m, σ, n を用いて表せ.
 (b) 母平均 50, 母標準偏差 20 の母集団から, 大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき, 確率 $P(46 \leq \bar{X} \leq 52)$ を求めよ. ただし, 標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする.

9 n を正の整数, r を 1 でない実数とし,

$$S = \sum_{k=1}^n r^{k-1}, \quad T = \sum_{k=1}^n k r^{k-1}, \quad U = \sum_{k=1}^n k^2 r^{k-1}$$

とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) S を \sum を用いずに, r, n で表せ.
 (2) T を \sum を用いずに, S, r, n で表せ. ただし, S を必ず用いること.
 (3) U を \sum を用いずに, S, T, r, n で表せ. ただし, S と T を必ず用いること.

10 区間 $[1, e]$ において, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \log x - x$$

とするとき, 次の各問いに答えよ. e は自然対数の底である.

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
 (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
 (3) 定積分 $\int_1^e f(x) dx$ を求めよ.

解答例

1 (1) (a) 偽 反例 : $x = 1, y = -2$

(b) 真

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \geq 0$$

ここで $x \geq 0, y \geq 0$ より $x + y \geq 0$ であるから

$$x - y \geq 0 \quad \text{よって} \quad x \geq y$$

(2) 2 を因数にもつのは、次の 10 個

$$\begin{array}{cccccc} 2 = 2, & 4 = 2^2, & 6 = 2 \cdot 3, & 8 = 2^3, & 10 = 2 \cdot 5, \\ 12 = 2^2 \cdot 3, & 14 = 2 \cdot 7, & 16 = 2^4, & 18 = 2 \cdot 3^2, & 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array}$$

$$\text{よって} \quad m = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 = 18$$

(3) $A = \{1, 4\}, B = \{2, 5\}, C = \{3\}$ とする.

A の要素だけからなる 3 桁の整数は 2^3 個

B の要素だけからなる 3 桁の整数は 2^3 個

C の要素だけからなる 3 桁の整数は 1 個

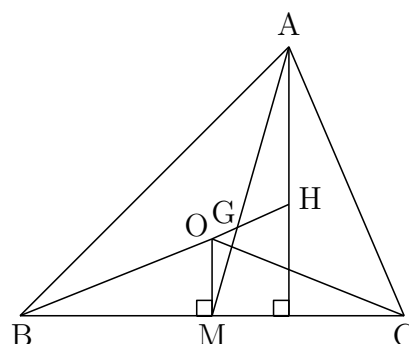
A, B, C の要素 1 個ずつからなる 3 桁の整数は

$$2 \times 2 \times 1 \times 3! = 24 \text{ (個)}$$

よって、求める 3 桁の整数の個数は $2^3 + 2^3 + 1 + 24 = 41$ (個)

- (4) $\triangle OBM$ と $\triangle OCM$ について, 条件から
 $OB = OC$, $BM = CM$, OM は共通で
 あるから, $\triangle OBM \cong \triangle OCM$.
 したがって $OM \parallel AH$
 ゆえに $\triangle OMG \sim \triangle HAG$
 また, $AG : GM = 2 : 1$ であるから

$$AH : OM = 2 : 1$$



別解 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とすると

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

$\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトルは $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

BC の中点 M の位置ベクトルは $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

ゆえに $\overrightarrow{OH} = \alpha \overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}) \dots \textcircled{1}$

ここで $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2) = 0$

$\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{BC}$ であるから $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OM} \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より $\frac{\alpha}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OM}$

ゆえに $\left(\frac{\alpha}{3} - 1\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{2}{3}\alpha - \beta\right)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

$\frac{\alpha}{3} - 1 \neq 0$ のとき, $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OM}$ となり, このとき, A は BC の垂直二等分線上にあり, $AB = AC$ となり不適. したがって

$$\frac{\alpha}{3} - 1 = 0, \quad \frac{2}{3}\alpha - \beta = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha = 3, \beta = 2$$

$\beta = 2$ を $\textcircled{2}$ に代入することにより $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

よって $AH : OM = 2 : 1$ ■

- 2 (1) $4x - 3y = a \cdots \textcircled{1}$ と $y = -x^2 + 6x - 5 \cdots \textcircled{2}$ から, y を消去すると

$$3x^2 - 14x + 15 - a = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

上の2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-7)^2 - 3(15 - a) = 4 + 3a$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が接するとき, $D = 0$ であるから

$$4 + 3a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = -\frac{4}{3}$$

$\textcircled{3}$ から, 接点の x 座標は $x = -\frac{-14}{2 \cdot 3} = \frac{7}{3}$

上の a と x の値を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$4 \cdot \frac{7}{3} - 3y = -\frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{32}{9}$$

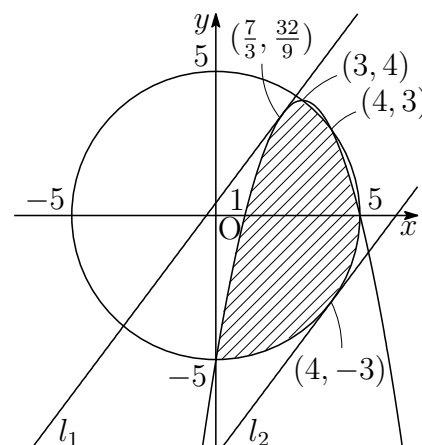
よって, 接点の座標は $\left(\frac{7}{3}, \frac{32}{9}\right)$

- (2) 円 $x^2 + y^2 = 25$ と放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + (-x^2 + 6x - 5)^2 &= 25 \\ x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x &= 0 \\ x(x-3)(x-4)(x-5) &= 0 \\ x &= 0, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

したがって, 連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad y \leq -x^2 + 6x - 5$$



の表す領域は, 右の図の斜線部分で, 境界線を含む.

(1) で求めた接線を $l_1: 4x - 3y = -\frac{4}{3}$ とし, 円周上の点 $(4, -3)$ における接線を $l_2: 4x - 3y = 25$ とすると, l_1, l_2 の接点は領域内の点である.

したがって, $4x - 3y$ のこの領域内における値は

$$-\frac{4}{3} \leq 4x - 3y \leq 25$$

よって 最小値 $-\frac{4}{3}$ $\left(x = \frac{7}{3}, y = \frac{32}{9} \text{ のとき}\right)$

最大値 25 $(x = 4, y = -3 \text{ のとき})$



3 (1) $0 < x < 1$ のとき, $\log x < 0$ より $0 < -\log x \dots \textcircled{1}$

$$g(x) = \frac{1}{x} + \log x \text{ とすると}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

$0 < x < 1$ において, $g'(x) < 0$ であるから, $g(x)$ は単調減少である.
また, $g(1) = 1 > 0$ より, この区間において, $g(x) > 0$ であるから

$$\frac{1}{x} + \log x > 0 \quad \text{すなわち} \quad -\log x < \frac{1}{x} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad 0 < -\log x < \frac{1}{x}$$

(2) 微分係数の定義により

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \log |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|^2 \log |h|$$

(1) の結果から, $0 < |h| < 1$ のとき

$$0 < -\log |h| < \frac{1}{|h|} \quad \text{ゆえに} \quad -|h| < |h|^2 \log |h| < 0$$

$\lim_{h \rightarrow 0} (-|h|) = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h|^2 \log |h| = 0 \quad \text{すなわち} \quad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} (3) \quad f'(x) &= (x^3)' \log |x| + x^3 (\log |x|)' \\ &= 3x^2 \log |x| + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 (3 \log |x| + 1) \end{aligned}$$

(4) (2), (3) の結果から, $f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = -e^{-\frac{1}{3}}, 0, e^{-\frac{1}{3}}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	\dots	$-e^{-\frac{1}{3}}$	\dots	0	\dots	$e^{-\frac{1}{3}}$	\dots
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{3e}$	\searrow	0	\searrow	$-\frac{1}{3e}$	\nearrow

よって $x = -e^{-\frac{1}{3}}$ のとき, 極大値 $\frac{1}{3e}$

$x = e^{-\frac{1}{3}}$ のとき, 極小値 $-\frac{1}{3e}$



4 (1) 第 k 群にある分数の分母と分子の和は $k+1$ であるから, $\frac{n}{m}$ は $m+n-1$ 群にある. よって, $\frac{n}{m}$ は $m+n-1$ 群の第 n 項.

(2) $m+n-2$ 群までの項数に n を加えたものであるから

$$\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + n \quad (\text{番目})$$

(3) 1000 番目の項が第 k 群にあるとすると

$$\frac{1}{2}(k-1)k < 1000 \leq \frac{1}{2}k(k+1)$$

ここで $\frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 45 = 990$, $\frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 = 1035$, $1000 = 990 + 10$

したがって, 1000 番目の項 a は第 45 群の第 10 項である.

$a = \frac{n}{m}$ とすると, (1) の結果から

$$m+n-1 = 45, \quad n = 10 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{n}{m} = \frac{10}{36}$$

(4) $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ であるから, $m' = 18$, $n' = 5$ とすると, (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m'+n'-2)(m'+n'-1) + n' &= \frac{1}{2}(18+5-2)(18+5-1) + 5 \\ &= 236 \quad (\text{番目}) \end{aligned}$$



- 5 (1) $A + B = E$ の両辺に左から A を掛けると $A^2 + AB = A$
 $A + B = E$ の両辺に右から B を掛けると $AB + B^2 = B$
 上の2式にそれぞれ $AB = O$ を代入すると $A^2 = A, B^2 = B$
 $A + B = E$ の両辺に右から A を掛けると $A^2 + BA = A$
 $A^2 = A$ をこれに代入すると $BA = O$

(2) $\alpha A + \alpha B = M, A + B = E$ より $A = \frac{M - \beta E}{\alpha - \beta}, B = \frac{M - \alpha}{\beta - \alpha}$

ゆえに
$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 5 - \beta & 4 \\ -2 & -1 - \beta \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 5 - \alpha & 4 \\ -2 & -1 - \alpha \end{pmatrix}$$

- (3) $AB = O$ より $M^2 - (\alpha + \beta)M + \alpha\beta E = O$
 M にハミルトン・ケリーの定理を適用すると $M^2 - 4M + 3E = O$
 上の2式から $(\alpha + \beta - 4)M = (\alpha\beta - 3)E$
 $\alpha + \beta - 3 \neq 0$ のとき, M は E の実数倍となり, 不適.
 よって $\alpha + \beta - 4 = 0, \alpha\beta - 3 = 0$
 $\alpha > \beta$ に注意して, これを解くと $\alpha = 3, \beta = 1$
 これらを (2) の結果に代入すると

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (4) $M = 3A + B, A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = O$ より

$$\begin{aligned} M^n &= (3A + B)^n \\ &= 3^n A + B \\ &= 3^n \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 1 & 2 \cdot 3^n - 2 \\ -3^n + 1 & -3^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

参照 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf のスペクトル分解



- 6 (1) 楕円 C の x 軸 (長軸) との交点の x 座標は $x = \pm a$
 また, C の y 軸 (短軸) との交点の y 座標を $y = \pm b$ とすると

$$1^2 + b^2 = a^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2 = a^2 - 1$$

$$\text{よって, } C \text{ の方程式は} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

- (2) $x + y = 2 \cdots \textcircled{1}$ および C の方程式から y を消去し, 整理すると

$$(2a^2 - 1)x^2 - 4a^2x + a^2(5 - a^2) = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-2a^2)^2 - 2(2a^2 - 1)a^2(5 - a^2) \\ &= a^2(a^2 - 1)(2a^2 - 5) \end{aligned}$$

C と直線 $\textcircled{1}$ が接するとき, $D = 0$ であるから, $a > 1$ に注意して

$$2a^2 - 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

これを $(*)$ に代入すると $4x^2 - 10x + \frac{25}{4} = 0$ すなわち $x = \frac{5}{4}$

よって, $\textcircled{1}$ から $\mathbf{P}\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$(3) (2) \text{ の結果から} \quad \text{PF}_1 = \sqrt{\left(\frac{5}{4} + 1\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{PF}_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\text{PF}_1}{\text{PF}_2} = \frac{3\sqrt{10}}{4} \div \frac{\sqrt{10}}{4} = 3$$

P における C の法線の方程式は

$$y - \frac{3}{4} = x - \frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad y = x - \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{Q}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{したがって} \quad \text{QF}_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad \text{QF}_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\text{QF}_1}{\text{QF}_2} = 3$$

$$\text{よって} \quad \frac{\text{PF}_1}{\text{PF}_2} = \frac{\text{QF}_1}{\text{QF}_2}$$

■

- 7 (1) 1個体が1日目に生存し、2日目にも生存している確率が p であるから、2日目に生存していない確率は $1-p$ 。よって、 $X_2 = 0$ となるのは、2日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$(1-p)^n$$

- (2) 1個体が1日目に生存し、3日目にも生存している確率が p^2 であるから、3日目に生存していない確率は $1-p^2$ 。よって、 $X_3 = 0$ となるのは、3日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$(1-p^2)^n$$

- (3) k 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率を $P(X_k = 0)$ とすると

$$P(X_k = 0) = (1-p^{k-1})^n$$

求める確率は、 k 日目に少なくとも1個の個体が生存し、 $k+1$ 日目には n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$P(X_{k+1} = 0) - P(X_k = 0) = (1-p^k)^n - (1-p^{k-1})^n$$



8 (1) (a) 与えられた確率密度関数から

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (x+k) dx + \int_0^1 (-x+k) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + kx \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + kx \right]_0^1 = 2k - 1\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \text{ より } 2k - 1 = 1 \text{ これを解いて } \mathbf{k = 1}$$

$$\begin{aligned}\text{したがって } E(X) &= \int_{-1}^1 xf(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x(x+1) dx + \int_0^1 x(-x+1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b) } P(-0.5 \leq X \leq 0.5) &= \int_{-0.5}^{0.5} f(x) dx \\ &= \int_{-0.5}^0 (x+1) dx + \int_0^{0.5} (-x+1) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-0.5}^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{0.5} = \mathbf{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$\text{(2) (a) } \mathbf{x = m, y = \frac{\sigma^2}{n}}$$

(b) 標本の大きさ 100 は十分大きいとみなせるので、標本平均 \bar{X} は、 $N\left(50, \frac{20^2}{100}\right) = N(50, 2^2)$ に従うので、 $Z = \frac{\bar{X} - 50}{2}$ とおくと、 Z は $N(0, 1)$ に従う。

$$\begin{aligned}P(46 \leq \bar{X} \leq 52) &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= 1 - \{P(Z \leq -2) + P(Z \geq 1)\} \\ &= 1 - \{P(Z \geq 2) + P(Z \geq 1)\} \\ &= 1 - (0.0228 + 0.1587) \\ &= \mathbf{0.8185}\end{aligned}$$

■

- 9 (1) S は、初項 1、公比 $r \neq 1$ 、項数 n の等比数列の和であるから

$$S = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

(2) $T = \sum_{k=1}^n kr^{k-1}$ より

$$\begin{aligned} T &= 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1} \\ rT &= r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-r)T &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \\ &= S - nr^n \end{aligned}$$

よって $T = \frac{S - nr^n}{1 - r}$

(3) $U = \sum_{k=1}^n k^2 r^{k-1}$ より

$$\begin{aligned} U &= 1 + 2^2r + 3^2r^2 + \cdots + n^2r^{n-1} \\ rU &= r + 2^2r^2 + \cdots + (n-1)^2r^{n-1} + nr^n \end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-r)U &= 1 + 3r + 5r^2 + \cdots + (2n-1)r^{n-1} - n^2r^n \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1)r^{k-1} - n^2r^n \\ &= 2 \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{k=1}^n r^{k-1} - n^2r^n \\ &= 2T - S - n^2r^n \end{aligned}$$

よって $U = \frac{2T - S - n^2r^n}{1 - r}$ ■

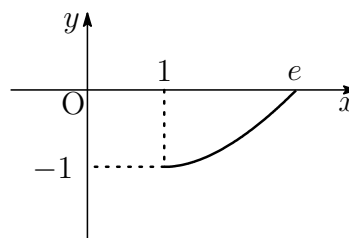
10 (1) $f(x) = x \log x - x$ を微分すると

$$f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x$$

(2) (1) の結果から $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	1	...	e
$f'(x)$		+	
$f''(x)$		+	
$f(x)$	-1	↗	0



よって, $y = f(x)$ のグラフは, 右の図のようになる.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e (x \log x - x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{3}{4} x^2 \right]_1^e \\
 &= \frac{1}{4} (3 - e^2)
 \end{aligned}$$

■