平成21年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成21年2月25日

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ から1問選択．数II・III・A・B・C(120分)
- 理[生命化]，医[理学療法]・農・水産学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ 数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・国語・社会・英語・特別支援教育・健康教育]学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{9}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{10}$ の2題から1問選択．数II・A・Bまたは数III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 実数 x，y に関する次の各命題の真偽を述べよ．真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(a) $x \geqq y$ ならば $x^2 \geqq y^2$ である．

(b) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^2 \geqq y^2$ ならば $x \geqq y$ である．

(2) $20! = 2^m k$ (k は奇数) が成り立つとき，整数 m の値を求めよ．

(3) 1，2，3，4，5の5種類の数字を，同じ数字を繰り返し用いることを許して3桁の整数をつくるとき，各位の数字の和が3の倍数になる整数は何個あるか．

(4) $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ である鋭角三角形ABCの外心をO，重心をGとする．直線OGとAから辺BCにおろした垂線との交点をH，BCの中点をMとするとき，AH : OM を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 直線 $4x - 3y = a$ が放物線 $y = -x^2 + 6x - 5$ と接するとき，a の値と接点の座標を求めよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が連立不等式 $x^2 + y^2 \leqq 25$，$y \leqq -x^2 + 6x - 5$ の表す領域を動くとき，$4x - 3y$ の最小値と最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log|\,x\,| & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $0 < x < 1$ のとき，$0 < -\log x < \dfrac{1}{x}$ が成り立つことを示せ．

(2) 微分係数の定義を用いて $f'(0) = 0$ であることを示せ．

(3) $x \neq 0$ のとき $f'(x)$ を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の数列について，各問いに答えよ．

$$\overbrace{\frac{1}{1}}^{\text{第 1 群}},\ \overbrace{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}}^{\text{第 2 群}},\ \overbrace{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}}^{\text{第 3 群}},\ \cdots\ \overbrace{\frac{1}{k},\ \frac{2}{k-1},\ \frac{3}{k-2},\ \cdots,\ \frac{k}{1}}^{\text{第 } k \text{ 群}},\ \cdots$$

(1) $\dfrac{n}{m}$ は第何群の第何項か．ただし，m と n は正の整数とする．

(2) $\dfrac{n}{m}$ は数列の先頭から数えると何番目の項か．

(3) 数列の先頭から数えて 1000 番目の項 a を求めよ．

(4) a と値が等しい項のうちで最初に現れるのは，数列の先頭から数えて何番目か．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とする．正方行列 A，B が

$$\alpha A + \beta B = M,\quad A + B = E,\quad AB = O$$

を満たしているとき，次の各問いに答えよ．ただし，α，β は $\alpha > \beta$ を満たす実数，E は単位行列，O は零行列である．

(1) $A^2 = A$，$B^2 = B$，$BA = O$ であることを示せ．

(2) A，B を α，β を用いて表せ．

(3) α，β および A，B を求めよ．

(4) n を自然数とするとき，M^n を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 平面上の二点 $\mathrm{F}_1(-1,\ 0)$，$\mathrm{F}_2(1,\ 0)$ からの距離の和が $2a$ $(a>1)$ である楕円 C の方程式を求めよ．

(2) 楕円 C が直線 $x+y=2$ と接するとき，a の値と接点 P の座標を求めよ．

(3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき

$$\frac{\mathrm{PF}_1}{\mathrm{PF}_2}=\frac{\mathrm{QF}_1}{\mathrm{QF}_2}$$

であることを示せ．

$\boxed{\textbf{7}}$ 容器の中にある種類の生物がいて，この容器の中では増殖しない．この生物に関して，次の性質を満たす定数 p があることが知られている．

［性質］この生物の個体は k 日目に生存していれば，他の個体が何匹いるかにかかわりなく，$k+1$ 日目には確率 p で生存している $(k=1,2,3,\cdots)$．

k 日目に生存している個体数を X_k で表す．$X_1=n$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $X_2=0$ となる確率を求めよ．

(2) $X_3=0$ となる確率を求めよ．

(3) $X_k>0$ であるが $X_{k+1}=0$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $-1 \leqq x \leqq 1$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が，次の式で与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} x + k & (-1 \leqq x < 0) \\ -x + k & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

(a) k の値と X の平均を求めよ．

(b) 確率 $P(-0.5 \leqq X \leqq 0.5)$ を求めよ．

(2) 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本平均 $\overline{X}$ は，n の値が大きいとき，近似的に正規分布 $N(x,\ y)$ に従う．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うならば，$P(Z \geqq 1.00) = 0.1587$，$P(Z \geqq 2.00) = 0.0228$ である．

(a) x と y を m，σ，n を用いて表せ．

(b) 母平均 50，母標準偏差 20 の母集団から，大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき，確率 $P(46 \leqq \overline{X} \leqq 52)$ を求めよ．ただし，標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．

$\boxed{\mathbf{9}}$ n を正の整数，r を 1 でない実数とし，

$$S = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1}, \quad T = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}, \quad U = \sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$$

とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) S を $\sum$ を用いずに，r，n で表せ．

(2) T を $\sum$ を用いずに，S，r，n で表せ．ただし，S を必ず用いること．

(3) U を $\sum$ を用いずに，S，T，r，n で表せ．ただし，S と T を必ず用いること．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 区間 $[1,\ e]$ において，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \log x - x$$

とするとき，次の各問いに答えよ．e は自然対数の底である．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (a) 偽 反例：$x=1$，$y=-2$

(b) 真

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y) \geqq 0$$

ここで $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より　$x+y \geqq 0$ であるから

$$x-y \geqq 0 \quad \text{よって} \quad x \geqq y$$

(2) 2 を因数にもつのは，次の 10 個

$$\begin{array}{lllll} 2=2, & 4=2^2, & 6=2\cdot 3, & 8=2^3, & 10=2\cdot 5, \\ 12=2^2\cdot 3, & 14=2\cdot 7, & 16=2^4, & 18=2\cdot 3^2, & 20=2^2\cdot 5 \end{array}$$

よって　　$m=1+2+1+3+1+2+1+4+1+2=\mathbf{18}$

(3) $A=\{1,\ 4\}$，$B=\{2,\ 5\}$，$C=\{3\}$ とする．

A の要素だけからなる 3 桁の整数は　2^3 個

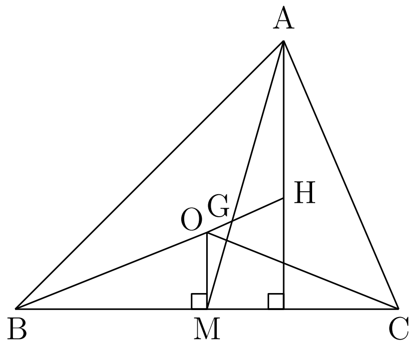
B の要素だけからなる 3 桁の整数は　2^3 個

C の要素だけからなる 3 桁の整数は　1 個

A，B，C の要素 1 個ずつからなる 3 桁の整数は

$$2\times 2\times 1\times 3!=24\ (\text{個})$$

よって，求める 3 桁の整数の個数は　$2^3+2^3+1+24=\mathbf{41}$ (個)



(4) $\triangle$OBM と $\triangle$OCM について，条件から
OB $=$ OC，BM $=$ CM，OM は共通であるから，$\triangle$OBM $\equiv$ OCM.
したがって　　OM//AH
ゆえに　　$\triangle$OMG $\backsim$ $\triangle$HAG
また，AG : GM $= 2 : 1$ であるから

$$\mathbf{AH : OM = 2 : 1}$$

別解 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

$\triangle$ABC の重心 G の位置ベクトルは　　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

BC の中点 M の位置ベクトルは　　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\alpha}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}})$　$\cdots$①

ここで　　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\dfrac{1}{2}(|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}}$　$\cdots$②

①，② より　　$\dfrac{\alpha}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OM}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

ゆえに　　$\left(\dfrac{\alpha}{3}-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\dfrac{2}{3}\alpha-\beta\right)\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$

$\dfrac{\alpha}{3}-1\neq 0$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となり，このとき，A は BC の垂直二等分線上にあり，AB $=$ AC となり不適．したがって

$$\frac{\alpha}{3}-1=0,\quad \frac{2}{3}\alpha-\beta=0\quad \text{これを解いて}\quad \alpha=3,\ \beta=2$$

$\beta=2$ を ② に代入することにより　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

よって　　AH : OM $= 2 : 1$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $4x-3y=a\cdots$① と $y=-x^2+6x-5\cdots$② から，y を消去すると

$$3x^2-14x+15-a=0 \quad \cdots ③$$

上の 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-7)^2-3(15-a)=4+3a$$

① と ② が接するとき，$D=0$ であるから

$$4+3a=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-\frac{4}{3}}$$

③ から，接点の x 座標は $\quad x=-\dfrac{-14}{2\cdot 3}=\dfrac{7}{3}$

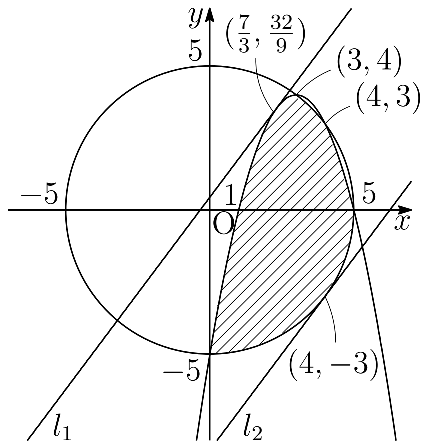
上の a と x の値を ① に代入すると

$$4\cdot\frac{7}{3}-3y=-\frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{32}{9}$$

よって，接点の座標は $\quad \boldsymbol{\left(\frac{7}{3},\ \frac{32}{9}\right)}$

(2) 円 $x^2+y^2=25$ と放物線 $y=-x^2+6x-5$ の共有点の x 座標は

$$x^2+(-x^2+6x-5)^2=25$$
$$x^4-12x^3+47x^2-60x=0$$
$$x(x-3)(x-4)(x-5)=0$$
$$x=0,\ 3,\ 4,\ 5$$



したがって，連立不等式

$$x^2+y^2 \leqq 25, \quad y \leqq -x^2+6x-5$$

の表す領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含む．

(1) で求めた接線を $l_1: 4x-3y=-\dfrac{4}{3}$ とし，円周上の点 $(4,-3)$ における接線を $l_2: 4x-3y=25$ とすると，l_1，l_2 の接点は領域内の点である．

したがって，$4x-3y$ のこの領域内における値は

$$-\frac{4}{3} \leqq 4x-3y \leqq 25$$

よって　　**最小値** $\boldsymbol{-\frac{4}{3}}$ $\left(x=\dfrac{7}{3},\ y=\dfrac{32}{9}\text{のとき}\right)$

最大値 25 $(x=4,\ y=-3\text{ のとき})$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $0<x<1$ のとき，$\log x<0$ より　$0<-\log x \quad \cdots$①

$g(x)=\dfrac{1}{x}+\log x$ とすると

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$$

$0<x<1$ において，$g'(x)<0$ であるから，$g(x)$ は単調減少である．

また，$g(1)=1>0$ より，この区間において，$g(x)>0$ であるから

$$\frac{1}{x}+\log x>0 \quad \text{すなわち} \quad -\log x<\frac{1}{x} \quad \cdots②$$

①，② より　　$0<-\log x<\dfrac{1}{x}$

(2) 微分係数の定義により

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3\log|h|}{h}=\lim_{h\to 0}|h|^2\log|h|$$

(1) の結果から，$0<|h|<1$ のとき

$$0<-\log|h|<\frac{1}{|h|} \quad \text{ゆえに} \quad -|h|<|h|^2\log|h|<0$$

$\lim\limits_{h\to 0}(-|h|)=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{h\to 0}|h|^2\log|h|=0 \quad \text{すなわち} \quad f'(0)=0$$

(3) $f'(x)=(x^3)'\log|\,x\,|+x^3(\log|\,x\,|)'$

$=3x^2\log|\,x\,|+x^3\cdot\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{x^2(3\log|\,x\,|+1)}$

(4) (2)，(3) の結果から，$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=-e^{-\frac{1}{3}},\ 0,\ e^{-\frac{1}{3}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-e^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3e}$	$\nearrow$

よって　　$x=-e^{-\frac{1}{3}}$ のとき，**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{3e}}$

$x=e^{-\frac{1}{3}}$ のとき，**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3e}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 第 k 群にある分数の分母と分子の和は $k+1$ であるから，$\dfrac{n}{m}$ は $m+n-1$ 群にある．よって，$\dfrac{n}{m}$ は $\boldsymbol{m+n-1}$ **群の第** $\boldsymbol{n}$ **項.**

(2) $m+n-2$ 群までの項数に n を加えたものであるから

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+n}\ \ \textbf{(番目)}$$

(3) 1000 番目の項が第 k 群にあるとすると

$$\frac{1}{2}(k-1)k < 1000 \leqq \frac{1}{2}k(k+1)$$

ここで　　$\dfrac{1}{2}\cdot 44\cdot 45 = 990$，$\dfrac{1}{2}\cdot 45\cdot 46 = 1035$，$1000 = 990+10$

したがって，1000 番目の項 a は第 45 群の第 10 項である．

$a = \dfrac{n}{m}$ とすると，(1) の結果から

$$m+n-1 = 45,\quad n = 10 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{n}{m} = \boldsymbol{\frac{10}{36}}$$

(4) $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$ であるから，$m' = 18$，$n' = 5$ とすると，(2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(m'+n'-2)(m'+n'-1)+n' &= \frac{1}{2}(18+5-2)(18+5-1)+5\\ &= \mathbf{236}\ (\text{番目})\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $A+B=E$ の両辺に左から A を掛けると　$A^2+AB=A$

$A+B=E$ の両辺に右から B を掛けると　$AB+B^2=B$

上の 2 式にそれぞれ $AB=O$ を代入すると　$A^2=A$，$B^2=B$

$A+B=E$ の両辺に右から A を掛けると　$A^2+BA=A$

$A^2=A$ をこれに代入すると　$BA=O$

(2) $\alpha A+\alpha B=M$，$A+B=E$ より　$A=\dfrac{M-\beta E}{\alpha-\beta}$，$B=\dfrac{M-\alpha}{\beta-\alpha}$

ゆえに　$\boldsymbol{A=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}5-\beta & 4\\ -2 & -1-\beta\end{pmatrix}}$，

$\boldsymbol{B=\dfrac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix}5-\alpha & 4\\ -2 & -1-\alpha\end{pmatrix}}$

(3) $AB=O$ より　$M^2-(\alpha+\beta)M+\alpha\beta E=O$

M にハミルトン・ケリーの定理を適用すると　$M^2-4M+3E=O$

上の 2 式から　$(\alpha+\beta-4)M=(\alpha\beta-3)E$

$\alpha+\beta-3\neq 0$ のとき，M は E の実数倍となり，不適.

よって　$\alpha+\beta-4=0$，$\alpha\beta-3=0$

$\alpha>\beta$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{\alpha=3}$，$\boldsymbol{\beta=1}$

これらを (2) の結果に代入すると

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}},\quad \boldsymbol{B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}$$

(4) $M=3A+B$，$A^2=A$，$B^2=B$，$AB=BA=O$ より

$$\begin{aligned}M^n &= (3A+B)^n\\ &= 3^nA+B\\ &= 3^n\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ &= \boldsymbol{\begin{pmatrix}2\cdot 3^n-1 & 2\cdot 3^n-2\\ -3^n+1 & -3^n+2\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

参照 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf のスペクトル分解

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 楕円 C の x 軸 (長軸) との交点の x 座標は $x=\pm a$

また，C の y 軸 (短軸) との交点の y 座標を $y=\pm b$ とすると

$$1^2+b^2=a^2 \quad \text{ゆえに} \quad b^2=a^2-1$$

よって，C の方程式は $\quad \boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1}$

(2) $x+y=2\cdots$ ① および C の方程式から y を消去し，整理すると

$$(2a^2-1)x^2-4a^2x+a^2(5-a^2)=0 \quad \cdots(*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (-2a^2)-2-(2a^2-1)a^2(5-a^2) \\ &= a^2(a^2-1)(2a^2-5) \end{aligned}$$

C と直線 ① が接するとき，$D=0$ であるから，$a>1$ に注意して

$$2a^2-5=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

これを $(*)$ に代入すると $\quad 4x^2-10x+\dfrac{25}{4}=0 \quad$ すなわち $\quad x=\dfrac{5}{4}$

よって，① から $\quad \mathbf{P}\boldsymbol{\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)}$

(3) (2) の結果から $\quad \mathrm{PF_1}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}+1\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$

$$\mathrm{PF_2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

したがって $\quad \dfrac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{4}\div\dfrac{\sqrt{10}}{4}=3$

P における C の法線の方程式は

$$y-\frac{3}{4}=x-\frac{5}{4} \quad \text{すなわち} \quad y=x-\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$$

したがって $\quad \mathrm{QF_1}=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，$\mathrm{QF_2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}=3$

よって $\quad \dfrac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 1 個体が 1 日目に生存し，2 日目にも生存している確率が p であるから，2 日目に生存していない確率は $1-p$．よって，$X_2=0$ となるのは，2 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$\boldsymbol{(1-p)^n}$$

(2) 1 個体が 1 日目に生存し，3 日目にも生存している確率が p^2 であるから，2 日目に生存していない確率は $1-p^2$．よって，$X_3=0$ となるのは，3 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$\boldsymbol{(1-p^2)^n}$$

(3) k 日目に n 個の個体すべてが生存していない確率を $P(X_k=0)$ とすると

$$P(X_k=0)=(1-p^{k-1})^n$$

求める確率は，k 日目に少なくとも 1 個の個体が生存し，$k+1$ 日目には n 個の個体すべてが生存していない確率であるから

$$P(X_{k+1}=0)-P(X_k=0)=\boldsymbol{(1-p^k)^n-(1-p^{k-1})^n}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) (a) 与えられた確率密度関数から

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x+k)\,dx + \int_{0}^{1}(-x+k)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}+kx\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2}+kx\right]_{0}^{1} = 2k-1$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ より　$2k-1=1$　これを解いて　$\boldsymbol{k=1}$

したがって　$\displaystyle E(X) = \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} x(-x+1)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \mathbf{0}$$

(b) $\displaystyle P(-0.5 \leqq X \leqq 0.5) = \int_{-0.5}^{0.5} f(x)\,dx$

$$= \int_{-0.5}^{0}(x+1)\,dx + \int_{0}^{0.5}(-x+1)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-0.5}^{0} + \left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{0.5} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(2) (a) $\boldsymbol{x = m}$, $\boldsymbol{y = \dfrac{\sigma^2}{n}}$

(b) 標本の大きさ100は十分大きいとみなせるので，標本平均$\overline{X}$は，$N\left(50,\ \dfrac{20^2}{100}\right) = N(50,\ 2^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{\overline{X}-50}{2}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(46 \leqq \overline{X} \leqq 52) &= P(-2 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 1 - \{P(Z \leqq -2) + P(Z \geqq 1)\} \\ &= 1 - \{P(Z \geqq 2) + P(Z \geqq 1)\} \\ &= 1 - (0.0228 + 0.1587) \\ &= \mathbf{0.8185} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) S は，初項 1，公比 $r \neq 1$，項数 n の等比数列の和であるから

$$\boldsymbol{S = \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$

(2) $T = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ より

$$\begin{array}{rl} T = & 1 + 2r + 3r^2 + \cdots \qquad\qquad + nr^{n-1} \\ rT = & \qquad r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \end{array}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-r)T &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n \\ &= S - nr^n \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{T = \frac{S - nr^n}{1 - r}}$

(3) $U = \sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1}$ より

$$\begin{array}{rl} U = & 1 + 2^2r + 3^2r^2 + \cdots \qquad\qquad + n^2r^{n-1} \\ rU = & \qquad r + 2^2r^2 + \cdots + (n-1)^2r^{n-1} + nr^n \end{array}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-r)U &= 1 + 3r + 5r^2 + \cdots + (2n-1)r^{n-1} - n^2r^n \\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)r^{k-1} - n^2r^n \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - n^2r^n \\ &= 2T - S - n^2r^n \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{U = \frac{2T - S - n^2r^n}{1 - r}}$

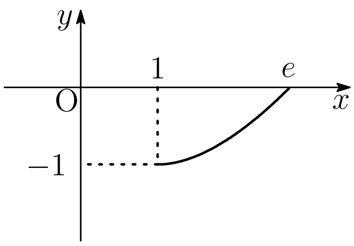
$\boxed{\textbf{10}}$ (1) $f(x) = x\log x - x$ を微分すると

$$f'(x) = \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \boldsymbol{\log x}$$

(2) (1) の結果から　$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0



よって，$y = f(x)$ のグラフは，右の図のようなる．

(3)
$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e (x\log x - x)\,dx \\ &= \Big[\,\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3}{4}x^2\,\Big]_1^e \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(3 - e^2)}\end{aligned}$$