平成20年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成20年2月25日

- 理[数理・物理・地環]・工・医[医]・歯学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ から1問選択．数II・III・A・B・C(120分)
- 理[生命化]，医[理学療法]・農・水産学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ 数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康]学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{9}$ 必答，$\boxed{2}$, $\boxed{10}$ の2題から1問選択．数II・A・Bまたは数III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 方程式 $x^3-1=0$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^4+\omega^2+1$ の値を求めよ．

(2) $-2 \leqq m < 2$ かつ $-2 < n \leqq 2$ であるような整数の組 $(m,\ n)$ のうち，条件「$1 \leqq m$ または $n < 0$」を満たすものの個数を求めよ．

(3) 半径 r の円Oの外部の点Pからこの円に引いた接線の接点の一つをTとする．Tを端点とする円Oの直径TQをとる．三角形PTQの辺PQと円Oとの交点をRとするとき，PRの長さを求めよ．ただし，$\angle \mathrm{QPT} = 30^\circ$ とする．

(4) 正六角形の頂点の中から異なる3点を選んで三角形を作る．この三角形が正三角形にも二等辺三角形にもならない確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)$ は $f(0)=0$ および $f(-1)=f(1)=3a$ を満たす2次関数とし，関数 $g(x)$ を

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\frac{4}{a}$$

とする．ただし，a は0でない定数である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 直線 $y=3x+2$ が曲線 $y=g(x)$ に接するように定数 a の値を定めよ．さらに，その接点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ e を自然対数の底とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt$ を計算することにより，次の等式を証明せよ．

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt$$

(2) すべての自然数 n について，等式

$$e^x = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(3) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$e^x > 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面に四角形 ABCD があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とおくとき，頂点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}$$

を満たすものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 直線 AB と DC の交点を E，直線 AD と BC の交点を F とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 線分 BD の中点を Q，線分 EF の中点を R とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 AC の中点を P とするとき，3 点 P，Q，R は同一直線上にあることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 行列 A を，$A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ により与え，xy 平面での y 軸に関する点の対称移動を表す行列を B とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(2) 行列 AB は xy 平面の原点を中心とする角 θ ($0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$) の回転移動を表す行列である．$\theta$ の値を求めよ．

(3) xy 平面の原点を中心とした 60° の回転移動を表す行列を C とするとき，$C^nB = A^n$ となる 6 以下の自然数 n を求めよ．

$\boxed{6}$ 極方程式 $r = a\cos\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で与えられる曲線を C_1 とする．ただし，a は正の定数である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 上の点 P と極 O を結ぶ直線 OP の点 P の側の延長上に $\mathrm{PQ} = a$ となるように点 Q をとる．点 P が C_1 上を動くときの点 Q の軌跡 C_2 の極方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた曲線 C_2 上の点 $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ を通り，点 Q と極 O を結ぶ直線に垂直な直線を l とする．直線 l の直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた直線 l は，点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とし半径が a の円に接することを証明せよ．

$\boxed{7}$ 1，2，3，4 の番号をつけた 4 枚のカードがある．この中からカードを 1 枚取り出しそこに書かれている番号を見る，という試行を繰り返す．ただし，取り出したカードはもとに戻さない．この試行は，取り出したカードに書かれた番号の合計が 3 の倍数になるか，または 4 枚全部を取り出したときに終了する．取り出したカードに書かれた番号の合計が 3 の倍数になったとき，この試行は成功したとよぶ．4 枚全部を取り出したとき，この試行は失敗したとよぶ．この試行の得点 X は，成功したときは取り出したカードの枚数とし，失敗しときは 0 点とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 確率 $P(X=1)$ および $P(X=2)$ を求めよ．

(2) この試行が成功する確率を求めよ．また，得点の平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(3) 取り出したカードに書かれた番号の和が 6 となる確率を求めよ．さらに，取り出したカードに書かれた番号の和が 6 であることが分かっているとき，$X=3$ である条件つき確率を求めよ．

$\boxed{8}$ 確率変数 Z が平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとするとき，$P(Z > 1.65) = 0.05$，$P(Z > 1.96) = 0.025$ であるとして，次の各問いに答えよ．

(1) 確率変数 X は平均 65，分散 20^2 の正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとする．確率 $P(X > c)$ が 0.05 となるような c を求めよ．

(2) 母平均 m，母分散 20^2 の母集団から大きさ 100 の無作為標本を抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とする．標本の大きさ 100 は十分大きい数であるとみなせるとする．このとき，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を答えよ．また，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間を $\overline{X}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 数列 $\{a_n\}$ は関係式

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3^n - a_n - 6$$

を満たしているとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2\cdot3^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3) 一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ xy 座標平面において，曲線

$$y = \cos x \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \qquad \cdots ①$$

と直線

$$y = -\frac{2}{\pi}x + 1 \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \qquad \cdots ②$$

で囲まれた図形を D とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) ① および ② のグラフを描き，領域 D を図示せよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) ω は方程式 $x^3-1=0$ の解であるから　$\omega^3-1=0$　$\cdots$①

したがって　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

ω は虚数であるから，$\omega-1\neq 0$ より　$\omega^2+\omega+1=0$　$\cdots$②

①，② より

$$\begin{aligned}\omega^4+\omega^2+1&=\omega^3\omega+\omega^2+1\\&=\omega+\omega^2+1=\mathbf{0}\end{aligned}$$

(2) 「$1\leqq m$ または $n<0$」の整数の組は

$$\begin{aligned}(m,\ n)=&(1,-1),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\\&(-2,-1),\ (-1,-1),\ (0,-1)\end{aligned}$$

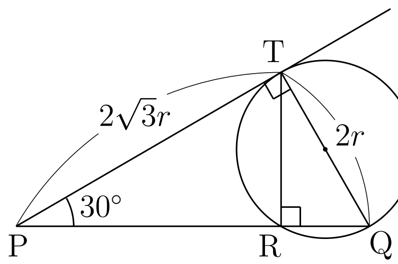
よって，求める整数の組の個数は　**7** (個)

(3) 直角三角形 TPQ において，

TQ $=2r$ より　PT $=2\sqrt{3}r$

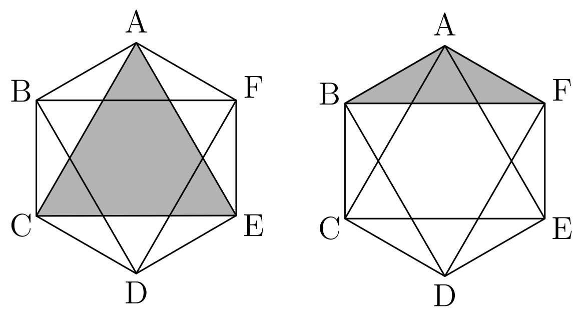
直角三角形 TPR により

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}&=\mathrm{PT}\cos 30^\circ\\&=2\sqrt{3}r\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{3r}\end{aligned}$$



(4) 三角形の総数は　${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ (個)

正三角形が 2 個，正三角形でない二等辺三角形 6 個



よって，求める確率は　$\dfrac{20-(2+6)}{20}=\dfrac{12}{20}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(0)=0$ より，$f(x)=px^2+qx$ とおくと，$f(-1)=f(1)=3a$ より

$$p-q=3a,\quad p+q=3a \quad \text{よって} \quad p=3a,\ q=0$$

よって　　$\boldsymbol{f(x)=3ax^2}$

(2) (1) の結果により

$$g(x)=\int_0^x 3at^2\,dt+\frac{4}{a}$$
$$=\Big[\ at^3\ \Big]_0^x+\frac{4}{a}=ax^3+\frac{4}{a}$$

$g(x)$ を微分すると　　$g'(x)=3ax^2$

$y=3x+2$ と $y=g(x)$ の接点の座標を $(p,\ 3p+2)$ とすると，$g'(p)=3$，$g(p)=3p+2$ より

$$3ap^2=3,\quad ap^3+\frac{4}{a}=3p+2$$

第 1 式から，$a=\dfrac{1}{p^2}\cdots$①，これを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{p^2}\cdot p^3+4p^2=3p+2 \quad \text{整理すると} \quad 2p^2-p-1=0$$

これを解いて　$p=1,-\dfrac{1}{2}$

① より，$p=1$ のとき $a=1$，$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき $a=4$

よって
$$\begin{cases}\boldsymbol{a=1}\ \textbf{のとき　接点}\ \boldsymbol{(1,\ 5)}\\ \boldsymbol{a=4}\ \textbf{のとき　接点}\ \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\int_0^x (x-t)e^t\,dt=\int_0^x (x-t)(e^t)'\,dt=\Big[\ (x-t)e^t\ \Big]_0^x-\int_0^x (x-t)'e^t\,dt$$
$$=-x+\int_0^x e^t\,dt=-x+\Big[\ e^t\ \Big]_0^x=-x+e^x-1$$

よって　　$e^x=1+x+\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t\,dt$

(2) すべての自然数 n について，等式

$$e^x = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt \quad \cdots (*)$$

とおく．

(i) $n=1$ のとき，(1) の結果から，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$e^x = 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k e^t\,dt \quad \cdots ①$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k e^t\,dt &= -\frac{1}{(k+1)!}\int_0^x \{(x-t)^{k+1}\}' e^t\,dt \\ &= -\frac{1}{(k+1)!}\Big[\,(x-t)^{k+1}e^t\,\Big]_0^x \\ &\qquad + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^x (x-t)^{k+1}(e^t)'\,dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^x (x-t)^{k+1}e^t\,dt \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② より

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p!}x^p + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^x (x-t)^{k+1}e^t\,dt \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{k+1} \frac{1}{p!}x^p + \frac{1}{(k+1)!}\int_0^x (x-t)^{k+1}e^t\,dt\end{aligned}$$

上式から，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

(3) $0 \leqq t < x$ において，$(x-t)e^t > 0$ であるから $\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt > 0$

よって，$(*)$ より，すべての自然数 n に対して，次式が成り立つ．

$$e^x > 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}x^p$$

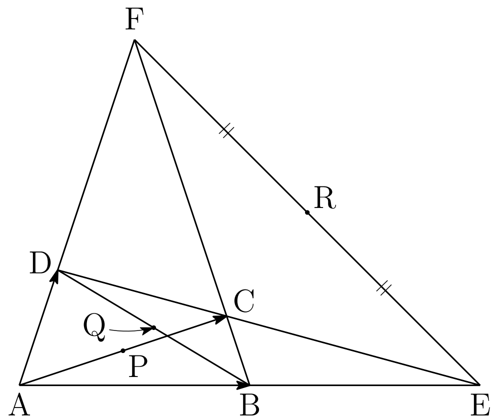
参照 http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$$= \left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) - \vec{d} = \frac{2}{5}(2\vec{b} - \vec{d})$$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$= \left(\frac{4}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{d}\right) - \vec{b} = \frac{1}{5}(-\vec{b} + 3\vec{d})$$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{d} + \alpha(2\vec{b} - \vec{d}) = 2\alpha\vec{b} + (1-\alpha)\vec{d}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b} + \beta(-\vec{b} + 3\vec{d}) = (1-\beta)\vec{b} + 3\beta\vec{d}$$

E，F はそれぞれ直線 AB，AC 上の点であるから

$$1-\alpha = 0,\quad 1-\beta = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \alpha = \beta = 1$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\vec{b}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AF}} = 3\vec{d}}$

(2) Q は線分 BD の中点であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$

R は線分 EF の中点であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}}{2} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{AR}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{2\vec{b} + 3\vec{d}}{2} - \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{b} + \vec{d}}$

(3) P は AC の中点であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{2}{5}\vec{b} + \dfrac{3}{10}\vec{d}$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{d}\right) - \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} = -\frac{1}{10}\vec{b} - \frac{1}{5}\vec{d}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = -\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{QR}}$　　よって，3 点 P，Q，R は同一直線上にある．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると　$A^2 - E = O$

i) n が偶数のとき $(n = 2k)$

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = E^k = \boldsymbol{E}$$

ii) n が奇数のとき $(n = 2k+1)$

$$A^n = A^{2k+1} = (A^2)^k A = E^k A = \boldsymbol{A}$$

(2) B は y 軸に関する対称移動を表す行列であるから

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

xy 平面上の任意の点 $(x,\ y)$ について，上式は成り立つので

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 300^\circ}$

(3) $C^n B = A^n$ に (1)，(2) の結果および $B^2 = E$ を適用する．

i) n が偶数のとき，$C^n B = E$ である．この両辺に右から B を掛けると，$C^n = B$ であるから

$$\begin{pmatrix} \cos(60^\circ \times n) & -\sin(60^\circ \times n) \\ \sin(60^\circ \times n) & \cos(60^\circ \times n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

両辺の (1,1) 成分および (2,2) 成分から，これを満たす自然数 n はない．

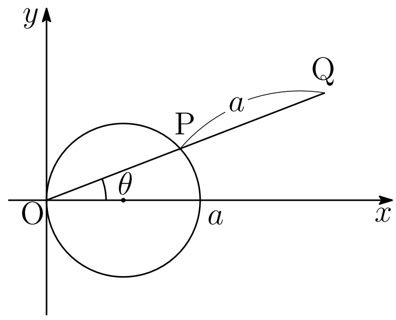
ii) n が奇数のとき，$C^n B = A$ である．この両辺に右から B を掛けると，$C^n = AB$ であるから

$$\begin{pmatrix} \cos(60^\circ \times n) & -\sin(60^\circ \times n) \\ \sin(60^\circ \times n) & \cos(60^\circ \times n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{pmatrix}$$

n は 6 以下の自然数であるから，これを満たす n は　5

よって　　$\boldsymbol{n = 5}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) C_2 の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると



$$\begin{aligned} r &= \mathrm{OP} + \mathrm{PQ} = a\cos\theta + a \\ &= a(\cos\theta + 1) \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{r = a(\cos\theta + 1)}$

(2) 点 $\mathrm{Q}(r_0,\ \theta_0)$ の直交座標は　$(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = r_0(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0)$$

点 $\mathrm{Q}(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ を通り，法線ベクトルの 1 つが $(\cos\theta_0,\ \sin\theta_0)$ である直線が l であるから，その方程式は

$$\cos\theta_0(x - r_0\cos\theta_0) + \sin\theta_0(y - r_0\sin\theta_0) = 0$$

整理すると　　$\boldsymbol{x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0 - r_0 = 0}$

(3) 点 $(a,\ 0)$ から直線 l までの距離を d とすると，$r_0 = a(\cos\theta_0 + 1)$ より

$$d = \frac{|a\cos\theta_0 - r_0|}{\sqrt{\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0}} = |a\cos\theta_0 - a(\cos\theta_0 + 1)| = a$$

よって，l は，点 Q に関係なく常に点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 a の接する．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $X=1$ となるのは，最初に取り出したカードが 3 のときであるから

$$\boldsymbol{P(X=1)=\frac{1}{4}}$$

$X=2$ となるのは，1 回目，2 回目のカードがそれぞれ

$$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)$$

のときであり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}$ であるから，求める確率は

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 4=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) $X=3$ となるのは，1 回目，2 回目，3 回目のカードがそれぞれ

$$(1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 3,\ 4),\ (4,\ 3,\ 2)$$

のときであり，それぞれの確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}$ であるから

$$P(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4=\frac{1}{6}$$

よって，この試行が成功する確率は

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

また　　$E(X)=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=\boldsymbol{\dfrac{17}{12}}$

(3) 番号の和が 6 となるのは，(1) で示した (2, 4)，(4, 2) と (2) で示した (1, 3, 2)，(2, 3, 1) のときであるから，その確率は

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

したがって，番号の和が 6 であるとき，$X=3$ である条件つき確率は

$$\frac{\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2}{\dfrac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) X が正規分布 $N(65,\ 20^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-65}{20}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X>c)=P\left(Z>\frac{c-65}{20}\right)=0.05$$

であるとき，$P(Z>1.65)=0.05$ により

$$\frac{c-65}{20}=1.65 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{c=98}$$

(2) 標本の大きさ 100 を十分大きいとみなしてよいから，$\overline{X}$ は

$$\textbf{正規分布}\ \boldsymbol{N\left(m,\ \frac{20^2}{100}\right)}$$

に従う．$\dfrac{20^2}{100}=2^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{2}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，$P(Z>1.96)=0.025$ より

$$P\left(-1.96\leqq\frac{\overline{X}-m}{2}\leqq 1.96\right)=1-0.025\times 2=0.95$$

したがって $$-1.96\leqq\frac{\overline{X}-m}{2}\leqq 1.96$$

よって，母平均 m の信頼度 95%の信頼区間は

$$\boldsymbol{\overline{X}-3.92\leqq m\leqq\overline{X}+3.92}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) 与えられた関係式に $n=1$ を代入すると

$$2a_1 = 3 - a_1 - 6 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a_1 = -1}$$

(2) 与えられた関係式から

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3^n - a_n - 6, \quad 2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3^{n+1} - a_{n+1} - 6$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと $(n \geqq 1)$

$$2a_{n+1} = 2\cdot3^n - a_{n+1} + a_n \quad ゆえに \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2\cdot3^{n-1}$$

(3) (2) の結果の式の両辺に 3^{n+1} を掛けると

$$3^{n+1}a_{n+1} = 3^n a_n + 2\cdot3^{2n} \quad ゆえに \quad 3^{n+1}a_{n+1} - 3^n a_n = 18\cdot9^{n-1}$$

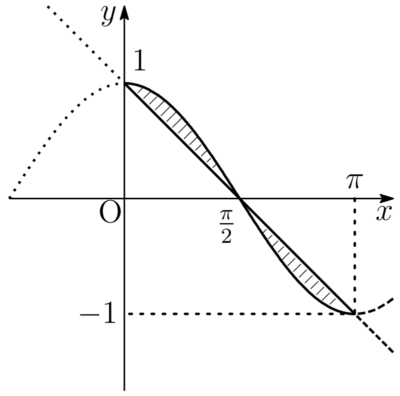
$n \geqq 2$ のとき $$\sum_{k=1}^{n-1}(3^{k+1}a_{k+1} - 3^k a_k) = 18\sum_{k=1}^{n-1} 9^{n-1}$$

$$3^n a_n - 3a_1 = 18 \times \frac{9^{n-1}-1}{9-1}$$

$a_1 = -1$ を代入して $3^n a_n = \dfrac{9^n}{4} - \dfrac{21}{4}$ ゆえに $a_n = \dfrac{3^n}{4} - \dfrac{7}{4\cdot3^{n-1}}$

上式は，$n=1$ のときも成立するから $\boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n}{4} - \dfrac{7}{4\cdot3^{n-1}}}$

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) 領域 D の表す領域は図の斜線部分で，境界線を含む.



(2) D は点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であるから，求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{2} &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx - \frac{1}{3}\times\pi\cdot1^2\times\frac{\pi}{2}\\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx - \frac{\pi^2}{6}\\ &= \pi\left[\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6}\\ &= \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi^2}{6}}$