平成 19 年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成 19 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理・地環]・工・医 [医] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [生命化]，医 [理学療法]・歯・農・水産学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{11}$.
数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康] 学部は，$\boxed{10}$, $\boxed{11}$ 必答，$\boxed{1}$, $\boxed{9}$ の 2 題から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b は実数で，関数

$$f(x) = 2^{3x} - a2^{2x} + a2^{x+1} - b$$

のグラフは x 軸と相異なる 3 点 $0,\ \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ で交わるものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $2^x = t$ とおいて，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とする．$g(t)$ を求めよ．

(2) b および $\alpha + \beta$ を，a を用いて表せ．

(3) α，β が

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}t + 1\right) dt = 2(\beta - \alpha)$$

を満たすとき，a の値を求めよ．さらに，そのときの α，β の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ の導関数を定義に従って求めよ．

(2) a を実数とするとき，関数 $y = (1 + x^2)^a$ の導関数を求めよ．

(3) 関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形をかけ．

(4) n が正の整数であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{1+n^2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 10桁の自然数で，各桁の数の合計がちょうど3になるものはいくつあるか．

(2) 10桁以下の自然数で，各桁の数の合計がちょうど4になるものはいくつあるか．

(3) 右から読んでも左から読んでも同じ数になる自然数を「回文数」と呼ぶ．例えば1233321，467764は回文数であるが，12333210は回文数ではない．10桁以下の自然数の中に回文数はいくつあるか．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 4点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$，$\mathrm{D}(\vec{d})$ を頂点する四面体ABCDについて，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて，次の各問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABCの重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ と，$\triangle$BCDの重心Hの位置ベクトル $\vec{h}$ を求めよ．

(2) 2点D，Gを通る直線 l_1 の方程式を求めよ．2点A，Hを通る直線 l_2 の方程式を求めよ．

(3) (2)の2直線 l_1，l_2 は交点を持つことを示し，その交点の位置ベクトルを求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2次の正方行列 A，B について，次の各問いに答えよ．

(1) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ となるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示せ．

(2) E を単位行列とする．行列 P を用いて $A = P + E$ と表されるとき，行列 X について，$AX = XA$ となるための必要十分条件は $PX = XP$ であることを示せ．

(3) q は0でない数とする．$A = \begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$AX = XA$ となる行列 X は $X = kA + lE$ ($k,\ l$ は実数) の形に表されることを示せ．

6 次のように，円 C_1 は直交座標に関する方程式で表され，曲線 C_2 は極方程式で表されている．

$$C_1 : \quad x^2 + y^2 + 6x - 2y + 7 = 0$$
$$C_2 : \quad r = \frac{1}{\sqrt{2} - \sin\theta}$$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 円 C_1 を媒介変数を用いて表せ．

(2) 曲線 C_2 はどんな曲線になるか．また，その概形もかけ．

(3) 円 C_1 の中心を通り曲線 C_2 に接する直線の方程式を求めよ．

7 A チームと B チームは毎日 1 回野球の試合をする．毎回勝敗を決定し，引き分けはないものとする．どちらかのチームが 3 連勝したときにそのチームの優勝とする．1 回目の試合では，A チームの勝つ確率は B チームの勝つ確率の 2 倍である．また，2 回目の試合からは，A チームが勝つ確率は，前日の試合で勝ったときは B チームの勝つ確率の 2 倍であり，負けたときは B チームの勝つ確率の $\dfrac{1}{3}$ 倍である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 1 回目の試合で A チームが勝つ確率 P_A と B チームが勝つ確率 P_B を求めよ．

(2) 前日の試合で A チームが勝ったとき，今日の試合で A チームが勝つ確率 P_{AA} と，前日の試合で B チームが勝ったとき，今日の試合で B チームが勝つ確率 P_{BB} を求めよ．

(3) 4 回以内の試合で優勝が決まる確率を求めよ．

(4) 5 回目の試合で優勝が決まったことがわかっている．このとき A チームが優勝している確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z \geqq 1.53) = 0.063, \quad P(Z \geqq 1.96) = 0.025, \quad P(Z \geqq 2.32) = 0.010$$

である．

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$\dfrac{X-a}{b}$ は，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．また，確率変数 Y が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$\dfrac{Y-c}{d}$ は，n が十分大きいならば，近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．このとき，a，b，c，d を m，σ，n，p を用いて表せ．

(2) 確率変数 X のとる値 x の範囲が $0 \leqq x \leqq 2$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている．

$$f(x) = k - |x-1|$$

このとき，次の (a)，(b) に答えよ．

(a) k の値を求めよ．

(b) X の平均と標準偏差を求めよ．

(3) ある工場で 1kg 入りと表示する製品が生産されている．この製品の重さは，平均 1kg，標準偏差 50g の正規分布に従っているという．この工場より 1000 個の製品を仕入れた．この中に 902g 以下の製品は何個あると推測されるか．

$\boxed{\mathbf{9}}$ a，b，c，d は実数で，$a > 0$ とする．関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が極値をもつための条件を，a，b，c，d を用いて表せ．

(2) $f(x)$ が常に変曲点を持つことを示し，その変曲点を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ を中心とする 2 つの円が 2 点 A，B で交わっているとする．$\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ は線分 AB 上にはないものとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 線分 AB は直線 $\mathrm{O_1O_2}$ と直交していることを証明せよ．

(2) 点 B を通り線分 $\mathrm{O_1O_2}$ と平行な直線 g は，円 $\mathrm{O_1}$ と接していないことを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $a > 0$ とする．項数 3 の 2 つの有限数列

$$4,\ a,\ b \quad \text{および} \quad b,\ c,\ 36$$

はともに等比数列であり，

$$a,\ b,\ c$$

は等差数列とする．このとき，a，b，c の値を求めよ．

(2) (1) で求めた a に対し，数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 4$，$a_2 = a$ の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ は $b_1 = 4$ を満たし，その階差数列が $\{a_n\}$ に等しいとする．このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(3) 初項を p とする数列 $\{p_n\}$ において，その階差数列が元の数列と等しいとする．このとき，この数列の一般項 p_n を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\begin{aligned} f(x) &= 2^{3x} - a2^{2x} + a2^{x+1} - b \\ &= (2^x)^3 - a(2^x)^2 + 2a2^x - b \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{g(t) = t^3 - at^2 + 2at - b}$

(2) $g(t) = 0$ の解が $1(= 2^0),\ 2^\alpha,\ 2^\beta$ であるから，解と係数の関係により

$$1 + 2^\alpha + 2^\beta = a, \quad 2^\alpha + 2^\beta + 2^{\alpha+\beta} = 2a, \quad 2^{\alpha+\beta} = b \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ の第 1 式と第 2 式から　　$2^{\alpha+\beta} = a + 1$

これと $(*)$ の第 3 式から　$\boldsymbol{b = a + 1,\ \alpha + \beta = \log_2(a + 1)}$

(3) $$\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}t + 1\right) dt = \left[\,\frac{1}{3}t^2 + t\,\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{3}(\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha)$$

条件より，$\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\frac{2}{3}t + 1\right) dt = 2(\beta - \alpha)$ であるから $(\alpha \neq \beta)$

$$\frac{1}{3}(\beta^2 - \alpha^2) + (\beta - \alpha) = 2(\beta - \alpha) \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = 3$$

これを (2) の結果に代入すると

$$\log_2(a + 1) = 3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = 7},\ b = 8$$

これらを $(*)$ に代入すると　　$2^\alpha + 2^\beta = 6$，$2^{\alpha+\beta} = 8$

$\alpha < \beta$ より，$2^\alpha = 2,\ 2^\beta = 4$ であるから　　$\boldsymbol{\alpha = 1,\ \beta = 2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 導関数の定義により

$$\begin{aligned} \{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right\} \end{aligned}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

また，微分可能ならば連続であるから　　$\displaystyle\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

よって　　$\boldsymbol{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$

(2) $\boldsymbol{y' = 2ax(1+x^2)^{a-1}}$

(3) $y = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ であるから，(1)，(2) の結果から

$$y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + x\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} = -3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

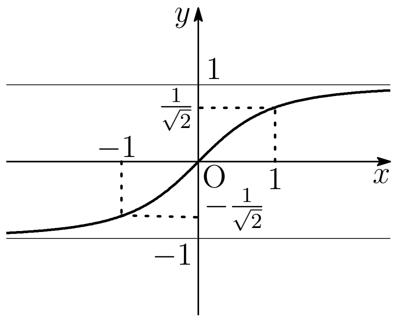
また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{1+(-t)^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = -1$$

よって，関数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ の増減，グラフの凹凸，漸近線およびグラフは概形は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$
y''	$+$	0	$-$
y	⤴	0	⤴

漸近線 $y=1$，$y=-1$



(4) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，(3) の結果から，$f(x)$ は単調増加であるから，k を自然数とすると

$$\int_{k-1}^{k}\{f(k)-f(x)\}\,dx > 0 \quad ゆえに \quad \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < f(k)$$

上式の k について，1 から n まで加えると

$$\int_0^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

このとき　$\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx = \Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^n = \sqrt{1+n^2}-1$

よって　$\displaystyle\sqrt{1+n^2}-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) (i) 最高位が「3」のとき
残りの 9 個の位に「0」が並ぶ　1 (通り)

(ii) 最高位が「2」のとき
残りの 9 個の位に「1」が 1 個と「0」が 8 個並ぶ　9 (通り)

(iii) 最高位が「1」のとき
残りの 9 個の位に「2」が 1 個と「0」が 8 個並ぶ　9 (通り)
また「1」が 2 個と「0」が 7 個並ぶ　${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ (通り)

(i)〜(iii) から　$1 + 9 + 9 + 36 = \mathbf{55}$ (通り)

(2) (i) 「4」が 1 個,「0」が 9 個並ぶ　10 (通り)

(ii) 「3」が 1 個,「1」が 1 個,「0」が 8 個並ぶ　$\dfrac{10!}{8!} = 90$ (通り)

(iii) 「2」が 2 個,「0」が 8 個並ぶ　$\dfrac{10!}{2!8!} = 45$ (通り)

(iv) 「2」が 1 個,「1」が 2 個,「0」が 7 個並ぶ　$\dfrac{10!}{2!7!} = 360$ (通り)

(v) 「1」が 4 個,「0」が 6 個並ぶ　$\dfrac{10!}{4!6!} = 210$ (通り)

(i)〜(v) から　$10 + 90 + 45 + 360 + 210 = \mathbf{715}$ (通り)

(3) $2n$ 桁の回文数は，上位 n 桁を決めればよいので $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$，その最高位が 0 でないことに注意して

$$9 \cdot 10^{n-1} \quad (\text{通り})$$

$2n - 1$ 桁の回文数は，上位 n 桁を決めればよいので $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$，その最高位が 0 でないことに注意して

$$9 \cdot 10^{n-1} \quad (\text{通り})$$

よって，求める回文数の総数は

$$2 \sum_{n=1}^{5} 9 \cdot 10^{n-1} = 18 \sum_{n=1}^{5} 10^{n-1} = 18 \times 11111 = \mathbf{199998} \quad (\text{通り})$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\boldsymbol{\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$，$\boldsymbol{\vec{h} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}$

(2) s を媒介変数とすると，l_1 上の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \vec{d} + s(\vec{g} - \vec{d}) \\ &= \vec{d} + s\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} - \vec{d}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{s}{3}\vec{a} + \frac{s}{3}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} + (1-s)\vec{d}}\end{aligned}$$

t を媒介変数とすると，l_2 上の点 $\mathrm{Q}(\vec{q})$ は

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{a} + t(\vec{h} - \vec{a}) \\ &= \vec{a} + t\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3} - \vec{a}\right) \\ &= \boldsymbol{(1-t)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c} + \frac{t}{3}\vec{d}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果において，$s = t = \dfrac{3}{4}$ とすると

$$\vec{p} = \vec{q} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d}$$

したがって，2 直線 l_1，l_2 は交点をもち，その位置ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $$\begin{aligned}(A-B)^2-(A^2-2AB+B^2) &= (A-B)(A-B)-A^2+2AB-B^2\\ &= A^2-AB-BA+B^2-A^2+2AB-B^2\\ &= AB-BA\end{aligned}$$

ゆえに，$(A-B)^2-(A^2-2AB+B^2)=O$ であることと $AB-BA=O$ であることは，同値である．よって，$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ となるための必要十分条件は $AB=BA$ である．

(2) $A=P+E$ により

$$\begin{aligned}AX-XA &= (P+E)X-X(P+E)\\ &= PX+X-XP-X\\ &= PX-XP\end{aligned}$$

ゆえに，$AX-XA=O$ であることと $PX-XP=O$ であることは，同値である．よって，$AX=XA$ となるための必要十分条件は $PX=XP$ である．

(3) $A=\begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ より，$P=\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$A=P+E$ と表される．$AX=XA$ となる行列 X を，$X=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ とおくと (2) の結果から $PX=XP$ であるから

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} pr & ps \\ qr & qs \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} pr+qs & 0 \\ pt+qu & 0 \end{pmatrix}$$

上式の両辺の (2,2) 成分から，$q\neq 0$ より，$s=0$ である．これにより，両辺の (1,1) 成分，(1,2) 成分は成立する．また，両辺の (2,1) 成分から

$$qr=pt+qu \quad \text{ゆえに} \quad r=\frac{pt}{q}+u$$

したがって

$$A=\begin{pmatrix} \frac{pt}{q}+u & 0 \\ t & u \end{pmatrix}=\frac{t}{q}\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{t}{q}P+tE$$

よって，X は $X=kA+lE$ ($k,\ l$ は実数) の形に表される．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $C_1 : x^2+y^2+6x-2y+7=0$ より　$(x+3)^2+(y-1)^2=3$

C_1 は，中心 $(-3,\ 1)$，半径 $\sqrt{3}$ の円であるから

$$\boldsymbol{x=-3+\sqrt{3}\cos\theta,\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta}$$

(2) $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sin\theta}$ より　$\sqrt{2}r=r\sin\theta+1$

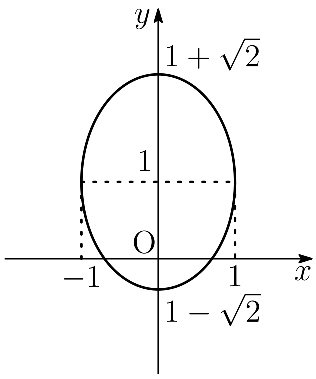
このとき，$r\sin\theta=y$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ である

ことに注意して，上式の両辺を平方すると

$$2(x^2+y^2)=(y+1)^2$$

すなわち　$\boldsymbol{x^2+\dfrac{(y-1)^2}{2}=1}$

よって，C_2 の概形は右のようになる．



(3) C_2 上の点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は C_2 上にあるから

$$p^2+\frac{(q-1)^2}{2}=1 \quad \cdots ①$$

C_2 の P における接線の方程式は

$$px+\frac{1}{2}(q-1)(y-1)=1 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ が C_1 の中心 $(-3,\ 1)$ を通るとき

$$-3p=1 \quad \text{ゆえに} \quad p=-\frac{1}{3} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入することにより　　$q=\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3}$

C_2 上の点 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$ における接線の方程式は，$(*)$ により

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}-1\right)(y-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad x-2y+5=0$$

また，C_2 上の点 $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ における接線の方程式は，$(*)$ により

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-1\right)(y-1)=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2y+1=0$$

よって，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{x-2y+5=0,\quad x+2y+1=0}$$

$\boxed{7}$ (1) $P_A=2P_B$，$P_A+P_B=1$ より　$\boldsymbol{P_A=\dfrac{2}{3}}$**,** $\boldsymbol{P_B=\dfrac{1}{3}}$

(2) $P_{AA}=2P_{AB}$，$P_{AA}+P_{AB}=1$ より　$P_{AA}=\dfrac{2}{3}$, $P_{AB}=\dfrac{1}{3}$

$P_{BA}=\dfrac{1}{3}P_{BB}$，$P_{BA}+P_{BB}=1$ より　$P_{BA}=\dfrac{1}{4}$, $P_{BB}=\dfrac{3}{4}$

よって　$\boldsymbol{P_{AA}=\dfrac{2}{3}}$**,** $\boldsymbol{P_{BB}=\dfrac{3}{4}}$

(3) 3 回で優勝が決まる確率は (AAA と BBB の場合)

$$P_A\cdot(P_{AA})^2+P_B\cdot(P_{BB})^2=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{8}{27}+\frac{3}{16}$$

4 回で優勝が決まる確率は ($BAAA$ と $ABBB$ の場合)

$$P_B\cdot P_{BA}\cdot(P_{AA})^2+P_A\cdot P_{AB}\cdot(P_{BB})^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{27}+\frac{1}{8}$$

よって，4 回以内に優勝が決まる確率は

$$\left(\frac{8}{27}+\frac{3}{16}\right)+\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{3}+\frac{5}{16}=\boldsymbol{\frac{31}{48}}$$

(4) 5 回目に A が優勝する確率は ($ABAAA$ と $BBAAA$ の場合)

$$\begin{aligned}&P_A\cdot P_{AB}\cdot P_{BA}\cdot(P_{AA})^2+P_B\cdot P_{BB}\cdot P_{BA}\cdot(P_{AA})^2\\=&\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{17}{324}\end{aligned}$$

5 回目に B が優勝する確率は ($BABBB$ と $AABBB$ の場合)

$$\begin{aligned}&P_B\cdot P_{BA}\cdot P_{AB}\cdot(P_{BB})^2+P_A\cdot P_{AA}\cdot P_{AB}\cdot(P_{BB})^2\\=&\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{19}{192}\end{aligned}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{\dfrac{17}{324}}{\dfrac{17}{324}+\dfrac{19}{192}}=\boldsymbol{\dfrac{272}{785}}$

$\boxed{8}$ (1) $\boldsymbol{a = m,\ b = \sigma,\ c = np,\ d = \sqrt{np(1-p)}}$

(2) (a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (k - |\,x-1\,|)\,dx$

$$= 2k + \int_0^1 (x-1)\,dx - \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= 2k + \left[\ \frac{1}{2}(x-1)^2\ \right]_0^1 - \left[\ \frac{1}{2}(x-1)^2\ \right]_1^2 = 2k-1$$

$f(x)$ は確率密度関数であるから，$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 1$ より

$2k - 1 = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{k = 1}$

(b) (a) の結果から　$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 2-x & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$

平均 $E(X)$ および分散 $V(X)$ は

$$E(X) = \int_0^2 xf(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx$$

$$= \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 + \left[\ x^2 - \frac{x^3}{3}\ \right]_1^2 = 1,$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \int_0^2 x^2 f(x)\,dx - 1^2$$

$$= \int_0^1 x^2\cdot x\,dx - \int_1^2 x^2(2-x)\,dx - 1^2$$

$$= \left[\ \frac{x^4}{4}\ \right]_0^1 - \left[\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\ \right]_1^2 - 1 = \frac{1}{6}$$

よって　平均 $\boldsymbol{E(X) = 1}$，標準偏差 $\sqrt{V(X)} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

(3) 製品の重さ X(g) は，正規分布 $(1000,\ 50^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X-1000}{50}$ は，正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

$$P(X \leqq 902) = P\left(Z \leqq \frac{902-1000}{50}\right)$$

$$= P(Z \leqq -1.96) = P(Z \geqq 1.96) = 0.025$$

よって，902g 以下の製品の個数は

$$1000 \times 0.025 = \mathbf{25}\ (\text{個})$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を微分すると　　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよいので　$\boldsymbol{b^2 - 3ac > 0}$

(2) $f''(x) = 6ax + 2b$

$$x < -\frac{b}{3a} \text{ のとき} \quad f''(x) < 0$$

$$x > -\frac{b}{3a} \text{ のとき} \quad f''(x) > 0$$

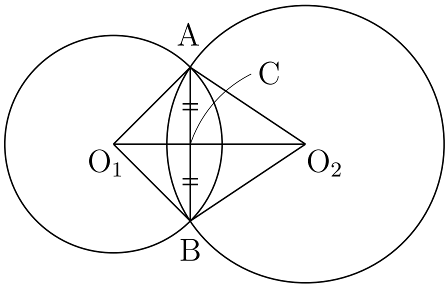
ゆえに，$f(x)$ は変曲点をもつ．

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{3a}\right) &= a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d \\ &= \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a} + d \end{aligned}$$

よって　　**変曲点** $\boldsymbol{\left(-\frac{b}{3a},\ \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right)}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 線分 AB の中点を C とする．

$\triangle \mathrm{O_1AC}$ と $\triangle \mathrm{O_1BC}$ について



$\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$

$\mathrm{O_1A} = \mathrm{O_1B}$　　($\mathrm{O_1}$の半径)

$\mathrm{O_1C}$ は共通

3 辺の長さがそれぞれ等しいので　　$\triangle \mathrm{O_1AC} \equiv \triangle \mathrm{O_1BC}$

$\angle \mathrm{ACO_1} = \angle \mathrm{BCO_1}$，$\angle \mathrm{ACO_1} + \angle \mathrm{BCO_1} = 180^\circ$ より

$$\angle \mathrm{ACO_1} = \angle \mathrm{BCO_1} = 90^\circ \quad \cdots ①$$

また，$\triangle \mathrm{O_1AC}$ と $\triangle \mathrm{O_1BC}$ についても同様にして

$$\angle \mathrm{ACO_2} = \angle \mathrm{BCO_2} = 90^\circ \quad \cdots ②$$

①，② により　　$\boldsymbol{\mathrm{AB} \perp \mathrm{O_1O_2}}$　$\cdots$③

(2) g が円 $\mathrm{O_1}$ に接していると仮定すると，B は円 $\mathrm{O_1}$ の接点であるから

$$\mathrm{O_1B} \perp g \quad \cdots ④$$

$\mathrm{O_1O_2} /\!/ g$ であるから，③ より

$$\mathrm{AB} \perp g \quad \cdots ⑤$$

④，⑤ より　　$\mathrm{O_1B} /\!/ \mathrm{AB}$

これは，$\mathrm{O_1}$ が線分 AB 上にあることになり，条件に反する．

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) 題意より

$$a^2 = 4b \quad \cdots ①, \quad c^2 = 36b \quad \cdots ②, \quad a + c = 2b \quad \cdots ③$$

① − ② より　$a^2 - c^2 = -32b$

ゆえに　$(a+c)(a-c) = -32b$

これに ③ を代入すると　$2b(a-c) = -32b$

$a > 0$ であるから，① より，$b \neq 0$ であることに注意して

$$a - c = -16 \quad \text{ゆえに} \quad c = a + 16 \quad \cdots ④$$

④ を ③ に代入すると

$$a + (a+16) = 2b \quad \text{ゆえに} \quad b = a + 8 \quad \cdots ⑤$$

⑤ を ① に代入すると

$$a^2 = 4(a+8) \quad \text{ゆえに} \quad (a+4)(a-8) = 0$$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 8}$

これを ④，⑤ に代入して　$\boldsymbol{b = 16}$，$\boldsymbol{c = 24}$

(2) $\{a_n\}$ の公比は　$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

ゆえに　$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 2^{k-1} \\ &= 4 + \frac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} \end{aligned}$$

$n = 1$ のときも上式は成り立つので　$\boldsymbol{b_n = 2^{n+1}}$

(3) $p_{n+1} - p_n = p_n$　ゆえに　$p_{n+1} = 2p_n$

したがって，$\{p_n\}$ は初項が p，公比が 2 の等比数列.

よって　$\boldsymbol{p_n = p \cdot 2^{n-1}}$