平成 18 年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成 18 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理]・工・医 [医] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [地環・生命化]，医 [理学療法]・歯・農・水産学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{9}$ ．数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康] 学部は，$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ 必答，$\boxed{1}$, $\boxed{10}$ の 2 題から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ で定義された x の関数

$$f(x) = \log_2(\cos x + \sqrt{3}\sin x + 2) + 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 2$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $t = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ とおく．$0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ を (1) の t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた t の式を $g(t)$ とおく．この $g(t)$ は $0 \leqq t_1 < t_2$ ならば $g(t_1) < g(t_2)$ を満たすことを示せ．

(4) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とするとき，次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $x > 0$ のとき，すべての自然数 n について不等式 $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

(2) $x \neq 0$ のとき，すべての自然数 n について不等式 $e^{-\frac{1}{|x|}} < n!|\,x\,|^n$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ であることを示せ．

(4) $f'(x) = 0$ となる x の値および $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ の極値を求めよ．

3 三角形ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとし，辺BE，CDの交点をGとする．4点D，B，C，Eが同一円周上にあるとき，次のことを証明せよ．

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ である．

(2) $2\angle\mathrm{ABG} = \angle\mathrm{BAE}$ であるとき，$\angle\mathrm{BAG} = \angle\mathrm{ABG}$ である．

(3) (2)の条件を満たすとき，三角形ABCは正三角形である．

4 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について，$1 < a_n < 2$ であることを示せ．

(2) $x_n = \dfrac{1}{2 - a_n}$ とおくとき，x_{n+1} と x_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

5 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(b > 0)$ が逆行列 A^{-1} をもち，$A^{-1} = E - A$ を満たすとき，次の各問いに答えよ．ただし，E は2次の単位行列とする．

(1) $a + d$，$ad - bc$ の値を求めよ．

(2) 実数 p，q が与えられたとき，x，y に関する連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を解け．

(3) すべての実数 p，q に対して，(2)の解 x，y がつねに $x^2 + y^2 = p^2 + q^2$ を満たすとき，行列 A を求めよ．

6 楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 0でない実数 m が与えられたとき，傾きが m であり y 切片が正である C の接線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) l_1 に直交し y 切片が正である C の接線 l_2 の方程式を求めよ．

(3) l_1 と l_2 の交点Pの座標を求めよ．

(4) m が0でない実数を動くとき，点Pは一つの円周上にあることを示せ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 2 つのさいころを投げ，出た目を X，Y $(X \leqq Y)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $X = 1$ である事象を A，$Y = 5$ である事象を B とする．確率 $P(A \cap B)$，条件つき確率 $P_B(A)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 確率 $P(X = k)$，$P(Y = k)$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(3) $3X^2 + 3Y^2$ の平均 (期待値)$E(3X^2 + 3Y^2)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 次の各問いに答えよ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.0250,\quad P(Z > 2.00) = 0.0228,\quad P(Z > 2.58) = 0.0049$$

である．

(1) 1 枚の硬貨を 100 回投げる試行において，表の出た回数を X とする．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

　(i) X はどのような確率分布に従うかを答えよ．また，$P(X = k)$ を k を用いて表せ．

　(ii) X を正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ で近似するとき，m，σ の値をそれぞれ求めよ．

　(iii) (ii) において，確率 $P(50 \leqq X \leqq 60)$ と，$P(|X - 50| < a) = 0.95$ を満たす値 a をそれぞれ求めよ．

(2) 変形した硬貨が 1 枚ある．この硬貨の表の出る確率 (母比率という) を推定するために，400 回投げたところ，ちょうど 100 回表が出た．このとき，母比率の信頼度 99%の信頼区間の幅を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 + 2x$，$C_2 : y = x^2 - 4x$ と直線 $l : y = \dfrac{3}{2}x - 3$ が与えれている．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 $(1,\ 3)$ を通り，点 $(4,\ 3)$ で直線 l に接する放物線 C_3 の方程式を求めよ．

(2) C_1 と C_3 との交点のうち x 座標が大きい方を点 A，C_2 と C_3 の交点のうち x 座標が大きい方を点 B とする．点 A，B の座標をそれぞれ求めよ．

(3) C_1 の原点 O から点 A までの部分，C_2 の点 O から点 B までの部分，および C_3 の点 A から点 B までの部分によって囲まれた図形の面積 S を求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $y = \sin x$ の導関数を，定義に従って求めよ．
ただし，三角関数の極限値の性質 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は用いてよい．

(2) $y = \sin^2 x$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めよ．

(3) 関数 $y = \sin^2 x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の増減，凹凸および変曲点を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(4) (3) のグラフを C とし，C の変曲点と原点を通る直線を l とする．l と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$t = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \pi$　よって　$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 2}$

(2)
$$\begin{aligned} t^2 &= (\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 3\sin^2 x \\ &= 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 1 \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} f(x) &= \log_2\{(\cos x + \sqrt{3}\sin x) + 2\} \\ &\qquad + (2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \sin x + 1) + 1 \\ &= \boldsymbol{\log_2(t+2) + t^2 + 1} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} g(t_2) - g(t_1) &= \log_2(t_2+2) + {t_2}^2 + 1 - \{\log_2(t_1+2) + {t_1}^2 + 1\} \\ &= \log_2\frac{t_2+2}{t_1+2} + (t_2+t_1)(t_2-t_1) \end{aligned}$$

$0 \leqq t_1 < t_2$ であるから　$\dfrac{t_2+2}{t_1+2} > 1$，$t_2 + t_1 > 0$，$t_2 > t_1$

したがって　$g(t_2) - g(t_1) > 0$　よって　$g(t_2) > g(t_1)$

解説 $g'(t) = \dfrac{1}{(t+2)\log 2} + 2t$ より，区間 $0 < t < 2$ において　$g'(t) > 0$

$g(t)$ は単調増加であるから　$0 \leqq t_1 < t_2$ に対して　$g(t_1) < g(t_2)$
実際，平均値の定理により，$0 \leqq t_1 < t_2$ に対して，

$$\frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} = g'(t_3) \quad t_1 < t_3 < t_2$$

をみたす t_3 が存在するので　$g(t_2) - g(t_1) = g'(t_3)(t_2 - t_1) > 0$

(4) $g(t)$ は単調増加であるから，$f(x)$ の最大値・最小値はそれぞれ

$$g(2) = \log_2(2+2) + 2^2 + 1 = 7, \quad g(0) = \log_2 2 + 1 = 2$$

$$t = 2 \text{ のとき}\quad 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$t = 0 \text{ のとき}\quad 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{5}{6}\pi$$

よって　**最大値 7** $\left(\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3}}\right)$，　**最小値 2** $\left(\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi}\right)$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 証明する不等式を $(*)$ とする．

［1］$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x dt \quad ゆえに \quad e^x-1>x$$

したがって　　$e^x > x+1 > x$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x \frac{t^k}{k!}\,dt \quad ゆえに \quad e^x-1>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって　　$e^x > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+1 > \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成立する．

(2) (1) の結果から，$t>0$ のとき　$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$　これに $t=\dfrac{1}{|x|}$ を代入すると

$$e^{\frac{1}{|x|}} > \frac{1}{n!|x|^n} \qquad よって \qquad e^{-\frac{1}{|x|}} < n!|x|^n$$

(3) (2) の結果から，$x\neq 0$ のとき，$0<e^{-\frac{1}{|x|}}<n!|x|^n$ であるから

$$\left|\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{|x|}}\right| < n!|x|^{n-3} \quad ゆえに \quad \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| < n!|x|^{n-3}$$

上式において，$n \geqq 4$ とすると，$\displaystyle\lim_{x\to 0} n!|x|^{n-3}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

(4) (3) の結果から，$f'(0)=0$．$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減をを調べる．

$x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ より

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$$

このとき，$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

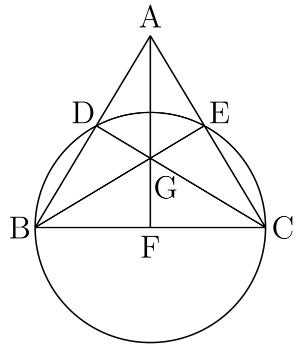
また，$f(x)$ は偶関数であるから

極小値 0　**($x=0$ のとき)**

極大値 $\dfrac{4}{e^2}$　$\left(\boldsymbol{x=\pm\dfrac{1}{2}}\textbf{のとき}\right)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 方べきの定理により



$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB} = \mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC} \quad \cdots ①$$

D，E はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}, \quad \mathrm{AE} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}$$

上の 2 式を ① に代入すると

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC}^2 \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$$

(2) $\triangle$ABC の中線 BE，CD の交点 G は $\triangle$ABC の重心であるから，AG の延長と辺 BC の交点を F とすると，F は辺 BC の中点である．

$\triangle$ABF と $\triangle$ACF について

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}\ ((1)\text{ の結果から}), \quad \mathrm{BF} = \mathrm{CF}, \quad \mathrm{AF}\text{ は共通}$$

3 辺の長さがそれぞれ等しいので　　$\mathrm{ABF} \equiv \mathrm{ACF}$

よって　　　$\angle\mathrm{BAE} = 2\angle\mathrm{BAG} \quad \cdots ②$

これを条件式 $2\angle\mathrm{ABG} = \angle\mathrm{BAE}$ に代入すると

$$2\angle\mathrm{ABG} = 2\angle\mathrm{BAG} \quad \text{よって} \quad \angle\mathrm{BAG} = \angle\mathrm{ABG} \quad \cdots ③$$

(3) (2) の結果から，中線 AF は BC に下ろした垂線であり，G は AF を 2 : 1 に内分する．また，$\triangle$ABG は二等辺三角形であるから，AG = BG.

このとき，直角三角形 BGF において，BG : GF = 2 : 1 であるから

$$\angle\mathrm{GBF} = 30^\circ, \quad \angle\mathrm{BGF} = 60^\circ \quad \cdots ④$$

また，$\triangle$ABG について　$\angle\mathrm{BAG} + \angle\mathrm{ABG} = \angle\mathrm{BGF} \quad \cdots ⑤$

③，④，⑤ より　$\angle\mathrm{BAG} = 30^\circ$　これを ② に代入して　$\angle\mathrm{BAE} = 60^\circ$

さらに，(1) の結果により，$\triangle$ABC は正三角形である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 証明する不等式を $(*)$ とする.

［1］$a_1 = \dfrac{3}{2}$ より，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ.

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると，$a_{k+1} = 3 - \dfrac{2}{a_k}$ より

$$a_{k+1} - 1 = 2 - \frac{2}{a_k} = \frac{2(a_k - 1)}{a_k} > 0$$
$$2 - a_{k+1} = \frac{2}{a_k} - 1 = \frac{2 - a_k}{a_k} > 0$$

よって，$n = k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ.

［1］［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ.

(2) $a_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{a_n}$ より　$2 - a_{n+1} = \dfrac{2 - a_n}{a_n}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2 - a_{n+1}} = \dfrac{a_n}{2 - a_n} = \dfrac{2}{2 - a_n} - 1$　よって　$\boldsymbol{x_{n+1} = 2x_n - 1}$

(3) $x_1 = \dfrac{1}{2 - a_1} = \dfrac{1}{2 - \frac{3}{2}} = 2$

(2) の結果から　$x_{n+1} - 1 = 2(x_n - 1)$

$\{x_n - 1\}$ は，初項が $x_2 - 1 = 1$，公比が 2 の等比数列であるから

$$x_n - 1 = 1\cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x_n = 2^{n-1} + 1}$$

(4) $x_n = \dfrac{1}{2 - a_n}$ より　$a_n = \dfrac{2x_n - 1}{x_n}$　これに (3) の結果を代入すると

$$a_n = \frac{2(2^{n-1} + 1) - 1}{2^{n-1} + 1} = \boldsymbol{\frac{2^n + 1}{2^{n-1} + 1}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $A^{-1} = E - A$ より　$A^2 - A + E = O$

A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$$

上の 2 式から　$(a+d-1)A = (ad-bc-1)E$

$a + d - 1 \neq 0$ のとき，A は E の実数倍となり，A の (1,2) 成分 $b \neq 0$ に反する．したがって，$a+d-1=0$，$ad-bc-1=0$ となる．

よって　$\boldsymbol{a+d=1,\ ad-bc=1}$

(2) A^{-1} は，$\det A = ad - bc = 1 \neq 0$ に注意して

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{pmatrix}$$

よって　$\boldsymbol{x = dp - bq,\ y = -cp + aq}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (dp-bq)^2+(-cp+aq)^2 \\ &= (c^2+d^2)p^2-2(ac+bd)pq+(a^2+b^2)q^2 \end{aligned}$$

$x^2+y^2=p^2+q^2$ であるから，これと上式により

$$(c^2+d^2-1)p^2-2(ac+bd)pq+(a^2+b^2-1)q^2=0$$

このとき，すべての実数 p，q に関して成り立つので

$$c^2+d^2=1,\ ac+bd=0,\ a^2+b^2=1$$

ここで，2 つのベクトル $\vec{u}=(a,\ b)$，$\vec{v}=(c,\ d)$ を考えると，上の結果から

$$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1,\quad \vec{u}\perp\vec{v}$$

したがって，$(c,\ d)=k(-b,\ a)$ とおける $(|\,k\,|=1)$．ゆえに

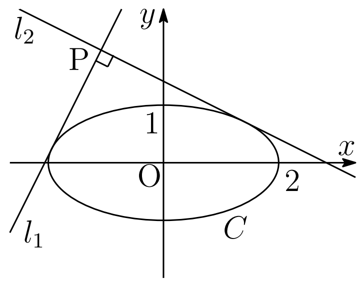
$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -kb & ka \end{pmatrix},\quad \det A=k(a^2+b^2)=k$$

$\det A=1$ であるから，$k=1$，$(c,\ d)=(-b,\ a)$

また，$a+d=1$，$a^2+b^2=1$ $(b>0)$ より　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\boldsymbol{A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$

6 (1) l_1 を $y=mx+k$ とおく．



これを $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に代入して整理すると

$$(4m^2+1)x^2+8mkx+4k^2-4=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= (4mk)^2-(4m^2+1)(4k^2-4) \\ &= 4(4m^2-k^2+1) \end{aligned}$$

C と l_1 は接するので，$D=0$ より　$k^2=4m^2+1$

条件により，$k>0$ であるから　　$k=\sqrt{4m^2+1}$

よって，l_1 の方程式は　　$\boldsymbol{y=mx+\sqrt{4m^2+1}}$　$\cdots$①

(2) (1) の結果の m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換えればよいので

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}}} \quad \cdots ②$$

(3) ①，② から，y を消去すると

$$\begin{aligned} mx+\sqrt{4m^2+1} &= -\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}} \\ \left(m+\frac{1}{m}\right)x &= \sqrt{\frac{m^2+4}{m^2}}-\sqrt{4m^2+1} \end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon=\dfrac{m}{|\,m\,|}$ $(=\mathrm{sign}\ m)$ とおくと

$$\begin{aligned} (m^2+1)x &= \varepsilon\sqrt{m^2+4}-m\sqrt{4m^2+1} \\ x &= \frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon \end{aligned}$$

これを ① に代入すると

$$\begin{aligned} y &= m\cdot\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon+\sqrt{4m^2+1} \\ &= \frac{|m|\sqrt{m^2+4}-m^2\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}+\sqrt{4m^2+1} \\ &= \frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1} \end{aligned}$$

よって，$\varepsilon = \dfrac{m}{|m|}$ とおくと

$$\boldsymbol{P\left(\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon,\ \frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)}$$

(4) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，(3) の結果から

$$X = \frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\varepsilon, \quad Y = \frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}$$

したがって

$$\begin{aligned} X^2+Y^2 &= \left(\frac{\sqrt{m^2+4}-|m|\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{|m|\sqrt{m^2+4}+\sqrt{4m^2+1}}{m^2+1}\right)^2 \\ &= \frac{(m^2+4)+(4m^2+1)}{m^2+1} = 5 \end{aligned}$$

よって，点 P は円 $x^2+y^2=5$ 上にある．

解説 点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に引いた 2 本の接線 l_1，l_2 が直交するとき，それぞれの接線の傾きを m_1，m_2 とすると，$m_1m_2=-1$

点 P を通り，傾き m の直線 l の方程式は　$y-Y=m(x-X)$

ここで，C，l を x 軸を元に，y 軸方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍に拡大した図形をそれぞれ C'，l' とすると

$$C' : x^2+y^2=a^2$$

l' は点 $\left(X,\ \dfrac{aY}{b}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{am}{b}$ の直線であるから

$$y-\frac{aY}{b}=\frac{am}{b}(x-X) \quad \text{すなわち} \quad amx-by-amX+aY=0$$

このとき，l' は C' に接するので

$$\frac{|amX+aY|}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}=a \quad \text{ゆえに} \quad (X^2-a^2)m^2+2XYm+Y^2-b^2=0$$

上の m に関する 2 次方程式の解 m_1，m_2 について，$m_1m_2=-1$ のとき，解と係数の関係により

$$\frac{Y^2-b^2}{X^2-a^2}=-1 \quad \text{すなわち} \quad X^2+Y^2=a^2+b^2$$

よって，P は円 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 上にある．

また，P が $(\pm a,\ \pm b)$ のときも成立する．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $A \cap B$ となるのは，(1, 5), (5, 1) の 2 通りであるから

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

事象 B は，次の 9 通り

$$(1,\ 5),\ (2,\ 5),\ (3,\ 5),\ (4,\ 5),\ (5,\ 5)$$
$$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)$$

したがって　　$P(B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

よって　　$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{18} \div \dfrac{1}{4} = \mathbf{\dfrac{2}{9}}$

補足 $P(B) = P(2\text{ 個とも }5\text{ 以下}) - P(2\text{ 個とも }4\text{ 以下}) = \dfrac{5^2}{6^2} - \dfrac{4^2}{6^2} = \dfrac{1}{4}$

(2)
$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(2\text{ 個とも }k\text{ 以上}) - P(2\text{ 個とも }k+1\text{ 以上}) \\ &= \frac{(6-k+1)^2}{6^2} - \frac{\{6-(k+1)+1\}^2}{6^2} \\ &= \frac{(7-k)^2-(6-k)^2}{36} = \boldsymbol{\frac{13-2k}{36}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(2\text{ 個とも }k\text{ 以下}) - P(2\text{ 個とも }k-1\text{ 以下}) \\ &= \frac{k^2}{6^2} - \frac{(k-1)^2}{6^2} = \boldsymbol{\frac{2k-1}{36}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} E(3X^2+3Y^2) &= 3E(X^2) + 3(Y^2) \\ &= 3\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{13-2k}{36} + 3\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{2k-1}{36} \\ &= \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6}\cdot 6(6+1)(2\cdot 6+1) = \mathbf{91} \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ (1) (i) **2項分布 $\boldsymbol{B\left(100,\ \frac{1}{2}\right)}$ に従う．**

$$P(X=k)={}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}=\boldsymbol{{}_{100}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}$$

(ii) $m=100\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{50}$，$\sigma=\sqrt{100\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)}=\mathbf{5}$

(iii) X は $N(50,\ 5^2)$ に従うので，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned}P(50\leqq X\leqq 60)&=P\left(\frac{50-50}{5}\leqq Z\leqq\frac{60-50}{5}\right)\\&=P(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-P(Z>2)\\&=0.5-0.0228=\mathbf{0.4772}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(|X-50|<a)&=P\left(\left|\frac{X-50}{5}\right|<\frac{a}{5}\right)\\&=P\left(|Z|<\frac{a}{5}\right)=2\left\{0.5-P\left(Z\geqq\frac{a}{5}\right)\right\}=0.95\end{aligned}$$

したがって　$P\left(Z\geqq\dfrac{a}{5}\right)=0.025$

$P\left(Z>1.96\right)=0.025$ であるから　$\dfrac{a}{5}=1.96$　よって　$\boldsymbol{a=9.8}$

(2) $P(|Z|<2.58)=1-2\times0.0049=0.09902\fallingdotseq 0.99$

標本比率 $\overline{P}$ は　$\overline{P}=\dfrac{100}{400}=\dfrac{1}{4}$

母比率 P に対する信頼度 99%の信頼区間の幅は

$$\begin{aligned}2\times2.58\times\sqrt{\frac{\overline{P}\left(1-\overline{P}\right)}{n}}&=2\times2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}{400}}\\&=2\times2.58\times\frac{1}{20}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\\&\fallingdotseq\mathbf{0.112}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $C_3 : y = ax^2 + bx + c$ とおくと，$y' = 2ax + b$

点 $(1,\ 3)$ を通るから　　$a + b + c = 3$　$\cdots$①

点 $(4,\ 3)$ で直線 $y = \dfrac{3}{2}x - 3$ に接するから

$$16a + 4b + c = 3 \quad \cdots②,\quad 8a + b = \frac{3}{2} \quad \cdots③$$

①，②，③ を解いて　$a = \dfrac{1}{2}$，$b = -\dfrac{5}{2}$，$c = 5$

よって　　$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{5}{2}x + 5}$

(2) C_1，C_3 の方程式から，y を消去すると

$$x^2 + 2x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 5 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 10)(x - 1) = 0$$

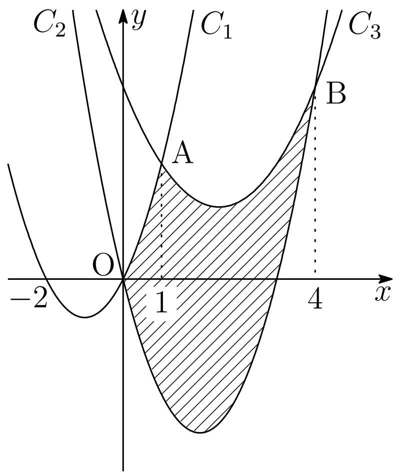
x 座標が大きい方から　$x = 1$　よって　**A(1，3)**

C_2，C_3 の方程式から，y を消去すると

$$x^2 - 4x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 5 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 2)(x - 5) = 0$$

x 座標が大きい方から　$x = 5$　よって　**B(5，5)**

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \{(x^2 + 2x) - (x^2 - 4x)\}\,dx \\
&\quad + \int_1^5 \left\{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 5\right) - (x^2 - 4x)\right\} dx \\
&= \int_0^1 6x\,dx + \int_1^5 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 5\right) dx \\
&= \Big[\ 3x^2\ \Big]_0^1 + \Big[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 5x\ \Big]_1^5 = \boldsymbol{\frac{61}{3}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) $y = f(x) = \sin x$ とおくと

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2} \\ &= 1\cdot\cos x = \boldsymbol{\cos x} \end{aligned}$$

(2) $y = \sin^2 x$ より

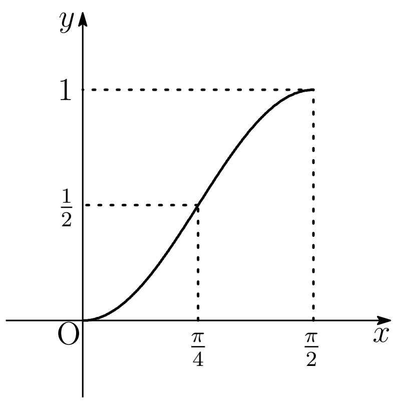
$$y' = 2\sin x\cos x = \boldsymbol{\sin 2x}, \quad y'' = \boldsymbol{2\cos 2x}$$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における増減・凹凸は次のようなる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	0	$+$	$+$	$+$	0
y''		$+$	0	$-$	
y	0	⤴	$\frac{1}{2}$	⤵	1

よって，変曲点は $\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

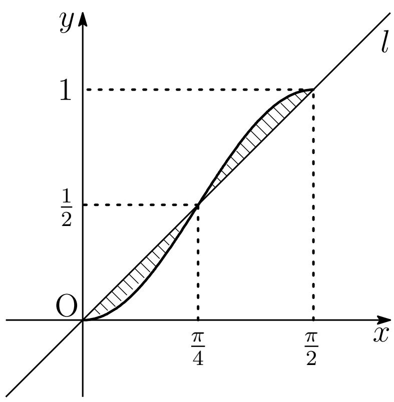
グラフの概形は，右のようになる．



(4) l の傾きは $\dfrac{1}{2} \div \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2}{\pi}$

ゆえに，l の方程式は $y = \dfrac{2}{\pi}x$

求める面積は，右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\pi}x - \sin^2 x\right)dx \\ &\qquad + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x - \frac{2}{\pi}x\right)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{\pi} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &\qquad \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x^2}{\pi}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{4-\pi}{8}} \end{aligned}$$