平成17年度　鹿児島大学2次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成17年2月25日

- 理[数理・物理]・工・医[医]学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から1問選択，$\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ から1問選択．
  数II・III・A・B・C(120分)
- 理[地環・生命化]，医[理学療法]・歯・農・水産学部 $\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から1問選択．数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康]学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から1問選択．数II・A・Bまたは数III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = x^3 - x$ とし，関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $t \neq t'$ のとき，点 $(t,\ f(t))$ における C の接線と点 $(t',\ f(t'))$ における C の接線は異なることを示せ．

(3) C の接線で点 $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求めよ．

(4) 点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が3本存在するための u，v の満たすべき条件を求めよ．また，その条件を満たす点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $t > 0$ のとき，不等式

$$\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\log t}{t}$ を求めよ．

(3) $f(x) = x \log x$ $(x > 0)$ とする．(2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ を求め，さらに $\displaystyle\lim_{x \to +0} f'(x)$ を求めよ．

(4) 関数 $y = x \log x$ $(x > 0)$ の増減，極値およびグラフの凹凸を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(5) 区間 $[e^{-1},\ e]$ において，曲線 $y = x \log x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 2 個の負でない実数 a，b に対して，$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{a+b}{1+a+b}$ が成り立つことを示せ．

(2) 負でない実数 a，b，c について，$a+b \geqq c$ ならば

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

(3) n を 2 以上の整数とする．n 個の負でない実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n と負でない実数 c について，$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqq c$ ならば

$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_n} \geqq \frac{c}{1+c}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) m を正の整数とする．実数の集合 $\{y \mid 1 \leqq y < m^2\}$ に属する整数の個数を求めよ．

(2) 座標平面において，x 座標と y 座標が整数である点を格子点という．n を正の整数とするとき，集合 A，B を

$$A = \{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq n,\ 1 \leqq y \leqq n^2,\ y < x^2\}$$
$$B = \{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq n,\ 1 \leqq y \leqq n^2,\ x^2 \leqq y\}$$

によって定める．集合 A，B に属する格子点の個数をそれぞれ求めよ．

(3) 正の整数 n に対して，集合 C を

$$C = \{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq n^2,\ 1 \leqq y \leqq n,\ y \leqq \sqrt{x}\}$$

によって定める．集合 C に属する格子点の個数を求めよ．

$\boxed{5}$ 三角形 ABC の頂点 A を中心として，辺 AB を C と反対の側へ 90° 回転させた線分を AD，辺 AC を B と反対の側へ 90° 回転させた線分を AE とする．また，辺 BC の中点 M を通る中線 AM の延長線と C を通り辺 AB に平行な直線との交点を N とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\triangle$ADE と $\triangle$CNA が合同であることを証明せよ．

(2) AM : DE を求めよ．

(3) AM と DE は垂直であることを証明せよ．

$\boxed{6}$ 空間内の点 A，B の座標をそれぞれ $(0,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 0,\ -1)$ とし，原点を O とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は A，B と異なる点で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が垂直となるように動くものとする．このとき，x，y，z の満たすべき条件を求めよ．

(2) P が (1) の条件を満たすとき，直線 AP と xy 平面の交点を $\mathrm{Q}(u,\ v,\ 0)$ とする．u，v を x，y，z を用いて表せ．

(3) このとき，x，y，z を u，v を用いて表せ．

(4) P が (1) の条件を満たし，さらにベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ がベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に垂直となるように動くとき，Q は xy 平面上のどのような図形をえがくかを答えよ．

$\boxed{7}$ α を 0 でない複素数とし，k，m は互いに異なる正の実数とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 複素数平面上において，複素数 $k^2\alpha$ を表す点を A とし，複素数 $m^2\alpha$ を表す点を B とする．線分 AB を $k:m$ に内分する点を表す複素数を γ，$k:m$ に外分する点を表す複素数を δ とする．このとき，γ と δ それぞれを k，m，α を用いて表せ．

(2) 複素数 z が $m|z-k^2\alpha|=k|z-m^2\alpha|$ を満たすとき，$|z|$ を k，m，$|\alpha|$ を用いて表せ．

(3) z は γ，δ と異なる複素数で，$m|z-k^2\alpha|=k|z-m^2\alpha|$ を満たすものとする．このとき，$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}$ は純虚数であることを証明せよ．

8 区別のつかない4個の空箱と，1から4までの番号をつけた4個の玉がある．番号1，2，3，4の玉を番号の順に，次の(ア)，(イ)のように箱に入れる．

(ア) 番号1の玉を空箱の一つに入れる．

(イ) $j = 2,\ 3,\ 4$ について，番号 j の玉を番号1の玉が入っている箱かまたは空箱の一つへ入れる．ただし，番号1の玉が入っている箱へ入れる確率は $1 - \dfrac{1}{j}$ で，空箱へ入れる確率は $\dfrac{1}{j}$ であるとする．

$j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ について，番号 j の玉を入れ終わったとき，玉が入っている箱の個数を X_j とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 確率 $P(X_2 = 1)$，$P(X_3 = 1)$，$P(X_4 = 1)$ を求めよ．

(2) 確率 $P(X_2 = 2)$，$P(X_3 = 3)$，$P(X_4 = 4)$ を求めよ．

(3) $j = 3,\ 4$ について，$2 \leqq i \leqq j - 1$ を満たす i に対し，確率 $P(X_j = i)$ を $P(X_{j-1} = i)$ と $P(X_{j-1} = i - 1)$ を用いて表せ．

(4) X_4 の確率分布を求めよ．

9 行列 A，E を

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) A^2，A^3 を求めよ．

(2) $(E - A)^{-1}$ を求めよ．

(3) $P = E + A + A^2 + \cdots + A^{2n-1}$ を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

10 xy 平面において，2点 $\mathrm{F}_1(a,\ a)$，$\mathrm{F}_2(-a, -a)$ からの距離の積が一定値 $2a^2$ となるような点Pの軌跡を C とする．ただし，$a > 0$ である．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 直交座標 $(x,\ y)$ に関しての C の方程式を求めよ．

(2) 原点を極とし x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ に関しての C の極方程式を求めよ．

(3) C から原点を除いた部分は，平面上の第1象限と第3象限を合わせた範囲に含まれることを示せ．

(4) 点Pが第1象限内にあるとき，Pは点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ を中心とする半径 a の円の周または内部にあることを証明せよ．

11 $f_1(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$，$f_2(x) = -2x + 2$ とする．曲線 $y = f_1(x)$ と曲線 $y = f_2(x)$ の交点をニュートン法を用いて求めたい．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ とおく．区間 $[0,\ 2]$ に $f(x) = 0$ の解があることを示せ．

(2) $f(x) = 0$ の解を，ニュートン法を用いて，適当な初期値 x_1 から始め x_2，x_3，$\cdots$，x_n，$\cdots$ と近似していく．このとき，x_{n+1} を x_n を用いて表す式を求めよ．

(3) $x_1 = 1$ として，x_2 を求めよ．

12 ある工場で生産されている製品の不良品率を p とし，この製品の中から n 個を無作為に抽出して調べるとき，その中の不良品の個数を X 個とする．なお，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数 Z について，$P(|Z| \leqq 1.96) = 0.95$，$P(0 \leqq Z \leqq 1.8) = 0.4641$，$P(0 \leqq Z \leqq 1.9) = 0.4713$，$P(0 \leqq Z \leqq 2) = 0.4772$，$P(0 \leqq Z \leqq 2.1) = 0.4821$ であるとする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) X はどのような確率分布に従うかを答えよ．また，n が大きいとき X の確率分布は何で近似されるかを答えよ．

(2) 標本の不良率 (標本比率)p_0 は同じ値が得られるものとする．このとき，信頼度 95%の信頼区間の幅を，標本の大きさ n の場合の半分にするには，標本の大きさをいくらにすればよいかを求めよ．

(3) 製品の不良率を $p = 0.05$ とする．標本の大きさが $n = 1900$ のとき，確率 $P(76 \leqq X \leqq 114)$ を，二項分布の正規分布による近似を用いて表せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3-x$ を微分すると　$f'(x)=3x^2-1$

C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きは $3t^2-1$ であるから，その方程式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=(3t^2-1)x-2t^3}$$

(2) C 上の点 $(t,\ f(t))$，$(t',\ f(t'))$ における接線の方程式は，それぞれ

$$y=(3t^2-1)x-2t^3, \quad y=(3t'^2-1)x-2t'^3$$

であり，これらの直線が一致するとき

$$3t^2-1=3t'^2-1, \quad -2t^3=-2t'^3 \quad \text{ゆえに} \quad t=t'$$

となり，$t \neq t'$ に反する．したがって，$t \neq t'$ のとき，2 つの接線は異なる．

(3) (1) で求めた接線が点 $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ を通るとき

$$-\frac{2}{3}=(3t^2-1)\cdot\frac{2}{3}-2t^3 \quad \text{整理すると} \quad t^2(t-1)=0$$

よって，求める接線の方程式は

$$t=0 \text{ のとき} \quad \boldsymbol{y=-x}, \qquad t=1 \text{ のとき} \quad \boldsymbol{y=2x-2}$$

(4) (1) で求めた接線が点 $(u,\ v)$ を通るとき

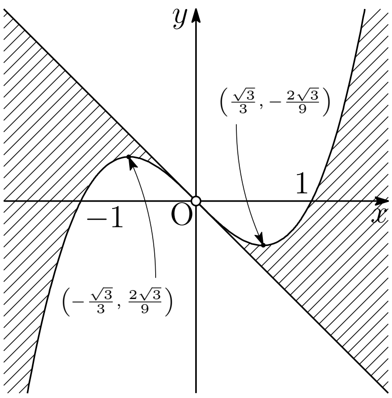
$$v=(3t^2-1)u-2t^3$$

ゆえに　$2t^3-3ut^2+u+v=0 \quad \cdots(*)$

点 $(u,\ v)$ を通る C の接線が 3 本存在するための条件は，t の方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解もつことである．

$$g(t)=2t^3-3ut^2+u+v$$

とおくと　$g'(t)=6t^2-6ut=6t(t-u)$



t の方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき[1]　$g(0)g(u)<0$

すなわち　$(u+v)(-u^3+u+v)<0$

よって　$\begin{cases} v>-u \\ v<u^3-u \end{cases}$ または $\begin{cases} v<-u \\ v>u^3-u \end{cases}$

$(u,\ v)$ の存在範囲は，右の図の斜線部分で，境界線および原点を含まない．

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 の解説を参照)

2 (1) $g(t) = 2\sqrt{t} - 2 - \log t$ とおくと

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}-1}{t}$$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって　$g(t) \geqq 0$　よって　$\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$

(2) (1) の結果から，$t > 1$ のとき

$$0 < \log t < 2\sqrt{t} - 2 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{\log t}{t} < \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t}$$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t}\right) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t} = 0}$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} x\log x$

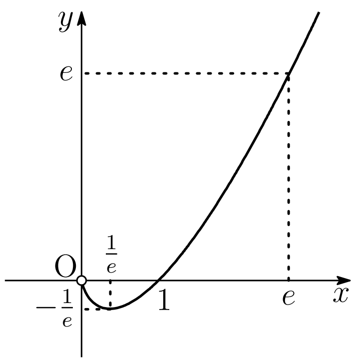
$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\log\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\log t}{t}\right) = \mathbf{0}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to+0}(\log x + 1) = \boldsymbol{-\infty}$

(4) $f'(x) = \log x + 1$ より　$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

グラフの概形は右のようになる．



(5) $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\log x - 1)$ とすると，面積 S は

$$S = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{e} f(x)\,dx = -\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} + \Big[\,F(x)\,\Big]_{1}^{e}$$

$$= F(e) + F\left(\frac{1}{e}\right) - 2F(1) = \boldsymbol{\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{2}}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $a,\ b \geqq 0$ より，$\dfrac{a}{1+a} \geqq \dfrac{a}{1+a+b}$，$\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{b}{1+a+b}$ の辺々を加えると

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geqq \frac{a+b}{1+a+b}$$

(2) $a+b \geqq c \geqq 0$ より，$\dfrac{1}{1+a+b} \leqq \dfrac{1}{1+c}$ であるから

$$1-\frac{1}{1+a+b} \geqq 1-\frac{1}{1+c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{a+b}{1+a+b} \geqq \frac{c}{1+c}$$

上式および (1) の結果から $\quad \dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b} \geqq \dfrac{c}{1+c}$

(3) $a_k \geqq 0\ (k=1,2,\cdots,n)$ であるから，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+a_k} \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1+S_n}=\frac{S_n}{1+S_n} \qquad \cdots ①$$

$S_n \geqq c \geqq 0$ より，$\dfrac{1}{1+S_n} \leqq \dfrac{1}{1+c}$ であるから

$$1-\frac{1}{1+S_n} \geqq 1-\frac{1}{1+c} \quad \text{すなわち} \quad \frac{S_n}{1+S_n} \geqq \frac{c}{1+c} \qquad \cdots ②$$

①，② から $\quad \dfrac{a_1}{1+a_1}+\dfrac{a_2}{1+a_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{1+a_n} \geqq \dfrac{c}{1+c}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $\boldsymbol{m^2-1}$ (個)

(2) $x=k$ 上の格子点の個数は，(1) の結果から，k^2-1 (個) であるから

$$\begin{aligned} n(A) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2-1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)} \end{aligned}$$

$A\cap B=\phi$ であるから，$n(A)+n(B)=n\cdot n^2$ より

$$n(B)=n^3-\frac{1}{6}(n-1)(2n+5)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$$

(3)
$$\begin{aligned} B &= \{(x,\ y)\,|\,1\leqq x\leqq n,\ 1\leqq y\leqq n^2,\ x^2\leqq y\}, \\ C &= \{(x,\ y)\,|\,1\leqq x\leqq n^2,\ 1\leqq y\leqq n,\ y\leqq \sqrt{x}\} \\ &= \{(x,\ y)\,|\,1\leqq y\leqq n,\ 1\leqq x\leqq n^2,\ y^2\leqq x\} \end{aligned}$$

よって $\quad n(C)=n(B)=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$ ■

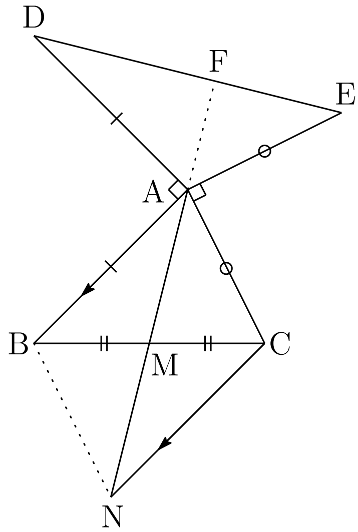
5 (1) $\triangle$ABM と $\triangle$NCM において

$$\mathrm{BM} = \mathrm{CM} \qquad (\text{M は BC の中点})$$
$$\angle\mathrm{AMB} = \angle\mathrm{NMC} \qquad (\text{M の対頂角})$$
$$\angle\mathrm{MBA} = \angle\mathrm{MCN} \qquad (\text{錯角})$$

一辺と両端の角が等しいから

$$\triangle\mathrm{ABM} \equiv \triangle\mathrm{NCM}$$

AB $=$ CN，AB//CN であるから，四角形 ABNC は平行四辺形である．



ゆえに　$\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{ACN} = 180^\circ$

また　$\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{DAE} = 180^\circ$

$\triangle$ADE と $\triangle$CNA について，上の 2 式から

$$\angle\mathrm{ACN} = \angle\mathrm{DAE}$$

このとき　AD $=$ AB $=$ CN，AE $=$ AC

2 辺夾角が等しいから　$\triangle\mathrm{ADE} \equiv \triangle\mathrm{CNA}$

(2) 平行四辺形 ABNC の対角線の交点 M は，AN の中点であるから

$$\mathrm{AM} : \mathrm{AN} = 1 : 2$$

(1) の結果から　AN $=$ DE　よって　**AM : DE = 1 : 2**

(3) AM と DE の交点を F，$\angle\mathrm{AEF} = \angle\mathrm{CAM} = \theta$ とすると

$\angle\mathrm{CAM} + \angle\mathrm{EAF} = 90^\circ$ より　$\angle\mathrm{EAF} = 90^\circ - \theta$

したがって　$\angle\mathrm{AEF} + \angle\mathrm{EAF} = 90^\circ$　ゆえに　$\angle\mathrm{EFA} = 90^\circ$

よって，AM と DE は垂直である．■

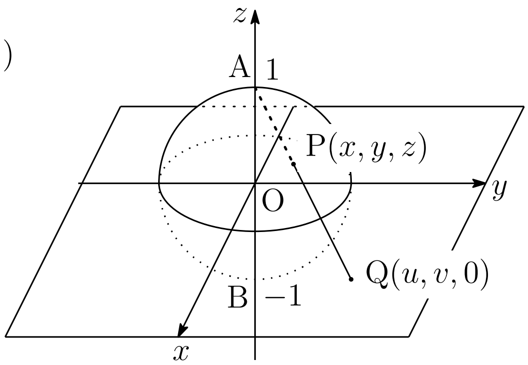
6 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x,\ y,\ z-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x,\ y,\ z+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ であるから

$$x^2 + y^2 + (z-1)(z+1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$$

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= (0,\ 0,\ 1) + t(u,\ v, -1)\\ &= (tu,\ tv,\ 1-t)\end{aligned}$$



したがって

$$x = tu,\ y = tv,\ z = 1-t \quad \cdots (*)$$

$t = 1 - z \neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{u = \frac{x}{1-z},\quad v = \frac{y}{1-z}}$$

(3) $(*)$ を (1) の結果に代入すると

$$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad t\{(u^2+v^2+1)t - 2\} = 0$$

$t \neq 0$ であるから $\quad t = \dfrac{2}{u^2+v^2+1}$

これを $(*)$ に代入すると

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \vec{a}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{a} = 0$ であるから

$$x + y + z = 0$$

これに (3) の結果を代入して整理すると

$$u^2 + v^2 + 2u + 2v - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (u+1)^2 + (v+1)^2 = 3$$

よって，**点 $(-1, -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円をえがく．** ■

$\boxed{7}$ (1) 2 点 A$(k^2\alpha)$，B$(m^2\alpha)$ について，線分 AB を $k:m$ に内分する点 γ，線分 AB を $k:m$ に外分する点 δ は $(k \neq m)$

$$\gamma = \frac{m{\cdot}k^2\alpha + k{\cdot}m^2\alpha}{k+m} = \frac{km(k+m)\alpha}{k+m} = \boldsymbol{km\alpha}$$
$$\delta = \frac{-m{\cdot}k^2\alpha + k{\cdot}m^2\alpha}{k-m} = \frac{-km(k-m)\alpha}{k-m} = \boldsymbol{-km\alpha}$$

(2) $m|z-k^2\alpha| = k|z-m^2\alpha| \cdots (*)$ より　$m^2|z-k^2\alpha|^2 = k^2|z-m^2\alpha|^2$

ゆえに　$m^2(z-k^2\alpha)(\overline{z}-k^2\overline{\alpha}) = k^2(z-m^2\alpha)(\overline{z}-m^2\overline{\alpha})$

整理すると　$(m^2-k^2)(|z|^2-k^2m^2|\alpha|^2) = 0$

k，m は互いに異なる正の実数であるから

$$|z|^2 = k^2m^2|\alpha|^2 \cdots (**) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{|z| = km|\alpha|}$$

(3) z は γ，δ と異なる複素数であるから　$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z} \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma-z}{\delta-z} + \overline{\left(\frac{\gamma-z}{\delta-z}\right)} &= \frac{\gamma-z}{\delta-z} + \frac{\overline{\gamma}-\overline{z}}{\overline{\delta}-\overline{z}} \\
&= \frac{(\gamma-z)(\overline{\delta}-\overline{z}) + (\overline{\gamma}-\overline{z})(\delta-z)}{|\delta-z|^2} \\
&= \frac{\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta-(\overline{\gamma+\delta})z-(\gamma+\delta)\overline{z}+2|z|^2}{|\delta-z|^2}
\end{aligned}$$

(1) の結果から

$$\begin{aligned}
\gamma+\delta &= km\alpha + (-km\alpha) = 0, \\
\gamma\overline{\delta}+\overline{\gamma}\delta &= km\alpha(-km\overline{\alpha}) + km\overline{\alpha}(-km\alpha) = -2k^2m^2|\alpha|^2
\end{aligned}$$

上の 2 式および $(**)$ から　$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z} + \overline{\left(\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}\right)} = 0$

よって，$\dfrac{\gamma-z}{\delta-z}$ は純虚数である．

解説　複素数 $z = x+yi$ に対して $(x,\ y$ は実数$)$

$$\overline{z} = x-yi, \quad \mathrm{Re}\,z = x = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad \mathrm{Im}\,z = y = -\frac{i}{2}(z-\overline{z})$$

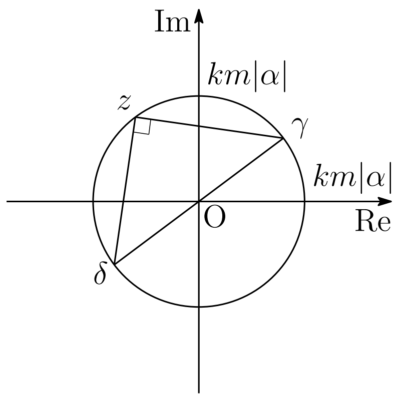
をそれぞれ z の共役，実部，虚部という．したがって

$$\begin{aligned}
z\ \text{は実数} &\iff z-\overline{z}=0 \\
z\ \text{は純虚数} &\iff z+\overline{z}=0 \quad (z\neq 0)
\end{aligned}$$

別解 (1)，(2) の結果から，z は γ と δ を直径の両端とする円周上の点である．

したがって $\quad \arg\dfrac{\gamma - z}{\delta - z} = \pm\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\dfrac{\gamma - z}{\delta - z}$ は，純虚数である．



$\boxed{8}$ (1) $P(X_j = 1)$ は，番号 j の玉まですべて 1 つの箱に入る確率であるから

$$P(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P(X_3 = 1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$
$$P(X_4 = 1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2) $P(X_j = j)$ は，番号 j の玉まで順次空箱に入る確率であるから

$$P(X_2 = 2) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$
$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$
$$P(X_4 = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{24}}$$

(3) $X_j = i$ は，$X_{j-1} = i$ および $X_{j-1} = i - 1$ の後に現れる確率過程である．

(i) $X_{j-1} = i$ から $X_j = i$ となるのは，番号 j の玉が番号 1 の玉の入った箱に入る場合．

(ii) $X_{j-1} = i - 1$ から $X_j = i$ となるのは，番号 j の玉が空箱に入る場合．

上の (i)，(ii) から，求める関係式は次のようになる．

$$\boldsymbol{P(X_j = i) = P(X_{j-1} = i) \times \left(1 - \frac{1}{j}\right) + P(X_{j-1} = i - 1) \times \frac{1}{j}}$$

(4) (1)〜(3) の結果から

$$
\begin{aligned}
P(X_3=2) &= P(X_2=2)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+P(X_2=1)\times\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\\
P(X_4=2) &= P(X_3=2)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+P(X_3=1)\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}\\
P(X_4=3) &= P(X_3=3)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+P(X_3=2)\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

よって，X_4 の確率分表は，次のようになる．

X_4	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	1

■

9 (1) $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ より

$$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

上式より $A^2=-\frac{1}{2}E\cdots$① であるから

$$A^3=A^2A=-\frac{1}{2}A=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\sqrt{\mathbf{3}} \\ \sqrt{\mathbf{3}} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(2) ① より

$$(E+A)(E-A)=E-A^2=\frac{3}{2}E \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{3}(E+A)(E-A)=E$$

したがって

$$(E-A)^{-1}=\frac{2}{3}(E+A)$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -\sqrt{\mathbf{3}} \\ \sqrt{\mathbf{3}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(3) $P=E+A+A^2+\cdots+A^{2n-1}$ の両辺に左から $E-A$ を掛けると

$$(E-A)P=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{2n-1})$$
$$=E-A^{2n}=E-(A^2)^n$$
$$=E-\left(-\frac{1}{2}E\right)^n=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}E$$

上式の両辺に左から $(E-A)^{-1}$ を掛けると

$$P=(E-A)^{-1}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}E$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left\{\mathbf{1}-\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right\}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -\sqrt{\mathbf{3}} \\ \sqrt{\mathbf{3}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

■

10 (1) $\mathrm{F_1}(a,\ a)$，$\mathrm{F_2}(-a, -a)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ より

$$\mathrm{F_1P} = \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}, \qquad \mathrm{F_2P} = \sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$$

これを $\mathrm{F_1P{\cdot}F_2P} = 2a^2$ に代入すると

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} = 2a^2$$

両辺を平方すると

$$\begin{aligned}\{(x^2+y^2+2a^2)-2a(x+y)\}\{(x^2+y^2+2a^2)+2a(x+y)\} &= 4a^4\\ (x^2+y^2+2a^2)^2-4a^2(x+y)^2 &= 4a^4\\ (x^2+y^2)^2+4a^2(x^2+y^2)+4a^4-4a^2(x+y)^2 &= 4a^4\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{(x^2+y^2)^2-8a^2xy=0}$

(2) (1) の結果に $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を代入すると

$$(r^2)^2-8a^2r\cos\theta{\cdot}r\sin\theta=0 \quad ゆえに \quad r^2(r^2-4a^2\sin2\theta)=0$$

$r=0$ は，$r^2=4a^2\sin2\theta$ に含まれるから，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r^2=4a^2\sin2\theta}$$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より　　$0 \leqq 2\theta < 4\pi$

$r \neq 0$ より $r^2>0$ であるから　　$\sin2\theta>0$

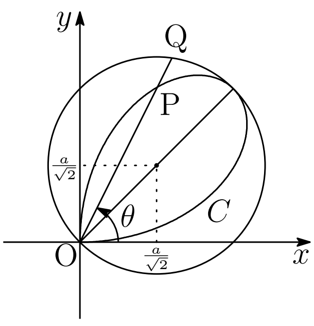
ゆえに　$0<2\theta<\pi$，$2\pi<2\theta<3\pi$　すなわち　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

よって，C から原点を除いた部分は，平面上の第 1 象限と第 3 象限を合わせた範囲に含まれる．

(4) 点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt2},\ \dfrac{a}{\sqrt2}\right)$ を中心とする半径 a の円を極方程式で表すと

$$r=2a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

この円周上の点 Q と C 上の点 P を右の図のようにとると



$$\mathrm{OQ}=\sqrt2a(\sin\theta+\cos\theta)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ^2-OP^2} &= 2a^2(\sin\theta+\cos\theta)^2-4a^2\sin2\theta\\ &= a^2(\sin\theta-\cos\theta)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって，第 1 象限にある P は，点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt2},\ \dfrac{a}{\sqrt2}\right)$ を中心とする半径 a の周または内部にある． ■

11 (1) $f(x) = f_1(x) - f_2(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - (-2x+2)$ より

$$f(0) = -2 < 0, \quad f(2) = \left(2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!}\right) - (-2) = \frac{44}{15} > 0$$

$f(x)$ は区間 $[0,\ 2]$ において連続であるから，中間値の定理により，区間 $[0,\ 2]$ に $f(x) = 0$ の解が存在する．

(2) $y = f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が x_{n+1} であるから

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad \text{ゆえに} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ より，$f'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ であるから

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \dfrac{{x_n}^3}{3!} + \dfrac{{x_n}^5}{5!}}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}} = \boldsymbol{\frac{240 - 40{x_n}^3 + 4{x_n}^5}{360 - 60{x_n}^2 + 5{x_n}^4}}$$

(3) (2) の結果に $x_1 = 1$ を代入すると $\boldsymbol{x_2 = \dfrac{204}{305}}$ ■

12 (1) X は **2 項分布** $\boldsymbol{B(n,\ p)}$ に従う．
n が大きいとき，X は**正規分布** $\boldsymbol{N(np,\ np(1-p))}$ に従う．

(2) 標本の大きさ n の場合の信頼度 95%の信頼区間の幅は

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

信頼区間の幅が半分になる標本の大きさを n' とすると

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n'}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

ゆえに　$\sqrt{\dfrac{1}{n'}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{n}}$　すなわち　$n' = 4n$

よって，標本の大きさを **4 倍**にすればよい．

補足 信頼区間は

$$p_0 - 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < p < p_0 + 1.96\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

(3) $p = 0.05$，$n = 1900$ より

$$np = 1900 \times 0.05 = 95, \quad np(1-p) = 1900 \times 0.05 \times (1-0.05) = 9.5^2$$

X は，正規分布 $N(95,\ 9.5^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X-95}{9.5}$ は正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．よって

$$\begin{aligned} P(76 \leqq X \leqq 114) =& P\left(\frac{76-95}{9.5} \leqq Z \leqq \frac{114-95}{9.5}\right) \\ =& P(-2 \leqq Z \leqq 2) \\ =& 2P(0 \leqq Z \leqq 2) \\ =& 2 \times 0.4772 = \mathbf{0.9544} \end{aligned}$$

■